
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644266 0
THEORIE
OPTISCHEN INSTRUMENTE
NACH ABBE
Dr. S. CZAPSKI

Verlag von Eduard Trewendt in Breslau.

Handwörterbuch der Chemie.

Unter Mitwirkung

von

Dr. **Ahrens**-Breslau, Prof. Dr. **Anschütz**-Bonn, Prof. Dr. **Balbiano**-Rom, Dr. **Baurath**-Berlin, Prof. Dr. **Biedermann**-Berlin, Dr. **Bunzel**-Breslau, Prof. Dr. **Ciamician**-Bologna, Dr. **C. Deite**-Berlin, Prof. Dr. **E. Drechsel**-Leipzig, Dr. **Dürkopf**-Breslau, Prof. Dr. **Eder**-Wien, Prof. Dr. **C. Engler**-Karlsruhe, Prof. Dr. **A. Hantzsch**-Zürich, Prof. Dr. **K. Heumann**-Zürich, Prof. Dr. **O. Jacobsen** (†), Prof. Dr. **R. Nietzki**-Basel, Prof. Dr. **N. Pringsheim**-Berlin, Dr. **Ruer**-Breslau, Prof. Dr. **L. Rügheimer**-Kiel, Prof. Dr. **E. Salkowski**-Berlin, Prof. Dr. **B. Tollens**-Göttingen, Prof. Dr. **A. Weddige**-Leipzig, Prof. Dr. **E. Wiedemann**-Erlangen u. A.

herausgegeben von

Prof. Dr. A. Ladenburg.

Erster bis zehnter Band. Mit Holzschnitten. Lex. 8. Geheftet Mk. 166,00.
In [illegible] Halbfranzband Mk. 190,00.

Bd. I, 1883, geh. Mk. 18,00, geb. Mk. 20,40. Bd. II, [illegible], geh. Mk. 16,00, geb. Mk. 18,40.
Bd. III, 1885, geh. Mk. 16,00, geb. Mk. [illegible]. Bd. IV, 1886, geh. Mk. 16,00, geb. Mk. 18,40.
Bd. V, 1887, geh. Mk. 16,00, geb. [illegible]. Bd. VI, 1888, geh. Mk. 16,00, geb. Mk. 18,40.
Bd. VII, 1889, geh. Mk. 16,00, geb. Mk. 18,40. Bd. VIII, 1890, geh. Mk. 16,00, geb. Mk. 18,40.
Bd. IX, 1891, geh. Mk. 18,00, geb. Mk. 20,40. Bd. X, 1892, geh. Mk. 18,00, geb. Mk. 20,40.

Inhalt der erschienenen Bände:

(Die Namen der Mitarbeiter sind den von ihnen bearbeiteten Artikeln beigefügt).

Erster Band.

Zweiter Band.

Einzelau[illegible]e der Naturwissenschaften.

Inhalt des Handwörterbuches der Chemie (Fortsetzung).

Vom **Elften Band** ist bis jetzt erschienen:

(Fortsetzung im Erscheinen begriffen).

THEORIE

DER

OPTISCHEN INSTRUMENTE

NACH ABBE

VON

DR. SIEGFRIED CZAPSKI
Wissenschaftlichem Mitarbeiter der optischen Werkstätte von CARL ZEISS in Jena



BRESLAU
VERLAG VON EDUARD TREWENDT
1893.

Sonderdruck

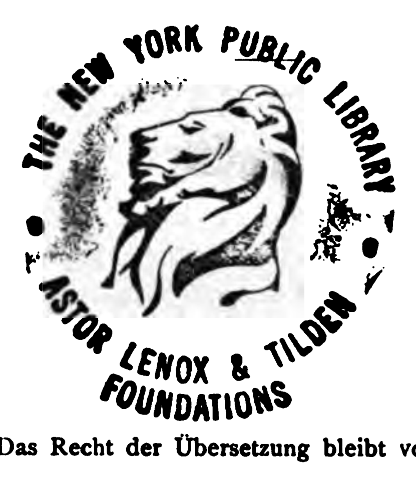
aus dem

Handbuch der Physik

von

A. Winkelmann

Band II.



Vorwort.

Die folgenden Blätter enthalten einen Abdruck der Artikel, welche ich für das von Herrn Prof. WINKELMANN herausgegebene, im gleichen Verlag erscheinende »Handbuch der Physik«, über Dioptrik und die Theorie der optischen Instrumente geschrieben habe.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle dem Herausgeber wie Verleger jenes Handbuchs meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das Entgegenkommen, welches sie mir in Bezug auf Umfang wie Zeitpunkt meiner Veröffentlichung an jener Stelle bewiesen haben — ein Entgegenkommen, von welchem ich wiederholt und in ziemlich ausgiebigem Maasse Gebrauch machen musste.

Der Begriff der »optischen Instrumente« ist im Folgenden in seinem engsten Sinne verstanden, als Bezeichnung derjenigen Instrumente, welche Bilder von äussern Gegenständen entwerfen. Ich habe selbst diejenigen Instrumente mit abzuhandeln unterlassen, welche man sonst mit unter diesen engern Begriff subsumirt, wie die auf der Anwendung von Winkelspiegeln beruhenden in der Geodäsie und Astronomie angewendeten, das Stereoskop und dergl., weil ich die Theorie derselben in andern Werken genügend klar und vollständig vorgetragen fand, sodass ich jenen Darstellungen nichts Besseres an die Seite zu setzen mich getraut hätte. Es war aber der eigentliche Zweck meiner Darstellung, vornehmlich dasjenige mitzutheilen, was meiner Meinung nach nicht schon anderwärts vollständiger und zusammenhängender zu finden ist; von dem Uebrigen nur das Wesentliche und für meinen speciellen Zweck Nothwendige anzuführen und für das nähere Studium dieser Gebiete der geometrischen Optik bloss Literatur-Hinweise zu bieten.

In den Vorbemerkungen zu den einzelnen Abschnitten habe ich mich bemüht, den wesentlichen Inhalt derselben anzugeben und den Zusammenhang hervorzuheben, in welchem sie untereinander sowie mit dem Endzweck der Darstellung stehen. Auf diese einleitenden Bemerkungen kann ich daher wohl die-

jenigen verweisen, welche sich im Voraus über die in der Darstellung waltenden Gesichtspunkte unterrichten wollen.

Es sei mir an dieser Stelle nur gestattet, in aller Kürze zu erörtern, worin das Unterscheidende der vorliegenden Darstellung von den mir bekannten sonstigen besteht und worin ich den Fortschritt erblicke, den die hier vorgetragenen Theorien und Anschauungen Abbe's für das Verständniss der optischen Instrumente bedeuten.

Ich finde denselben in drei Punkten.

Erstens in der *Fundirung der Theorie der optischen Bilder auf eine allgemeinere Grundlage.* Diese Theorie, d. h. die Gesetze und Beziehungen, welche zwischen Bildern und ihren Objekten überall bestehen, weist Abbe als blossen Ausdruck des Bestehens der Collineationsverwandtschaft nach, somit als gänzlich unabhängig von allen den besonderen Voraussetzungen über die Form und Anordnung der wirksamen Flächen, über die Lage und Oeffnung der abbildenden Büschel sowie über die physikalischen Gesetze ihrer Modification (Spiegelung, Brechung), auf welche man sie bisher stets gegründet hat. Dieser Nachweis, dass dieselben Gesetze überall herrschen müssen, wo ihre elementaren Voraussetzungen — eindeutige punktweise Abbildung zweier Räume durch Vermittelung geradliniger Strahlen — erfüllt sind, ermöglicht erst, in allen besonderen Verwirklichungsformen optischer Bilder eine Scheidung desjenigen vorzunehmen, was in den Gesetzen derselben auf jener allgemeinen Grundlage beruht und was in eben dieser Verwirklichungsart seinen Ursprung hat. Sie beseitigt manche Zweifel über die Leistungen, welche bei optischen Instrumenten von einer bisher noch nicht existirenden Zusammensetzung etwa künftig ein Mal möglich sein könnten und lässt auch die bekannten Beziehungen, entsprechend der Verschiedenheit des Ausgangspunktes für ihre Auffindung, theilweise in einem andern Zusammenhang erscheinen oder weist ihnen eine andere Rangordnung zu, als ihnen sonst zuertheilt wurde.

Das Gegenstück zu dieser methodischen Feststellung der Voraussetzungen und des Giltigkeitsbereichs optischer Abbildung im Allgemeinen bildet eine *vollständigere Berücksichtigung der besonderen Art und Weise, in welcher in einem gegebenen Instrument Bilder zu Stande kommen.* Und dies nach zwei Richtungen hin.

Ist es für die allgemeine Theorie der optischen Bilder völlig gleichgiltig, auf welche Weise, durch welche Hilfsmittel dieselben entstanden gedacht werden, welche Neigungen zur Axe und welche Oeffnungen die Strahlenbüschel haben, die sie erzeugen, welche Ausdehnung die so hervorgebrachten Bilder besitzen und von welchem Standpunkt und in welcher Weise sie beobachtet werden — so liegt für die realen Verwirklichungsweisen optischer Abbildungen, d. h. für die optischen Instrumente der Schlüssel für das Verständniss ihrer Wirkung und [illegible]nt. auch für die Construction vollständig in eben jenen besonderen Momen-

[illegible] Erst die in einem System stattfindende *Begrenzung der Strahlen und*

der hieraus resultirende Strahlengang — nach ABBE in sehr einfacher Weise bestimmt durch die Lage und Grösse je zweier Blenden im Objekt- wie Bildraum, die selber paarweise im Verhältniss von Objekt und Bild zu einander stehen — geben die Unterlagen für die Beantwortung der Fragen nach der Wirkung eines Instruments in dessen wichtigsten Aeusserungen. Von ihnen hängt die in einem Bilde herrschende Perspective, hängt die Vergrösserung ab, welche es für einen in bestimmter Stellung zum Instrument befindlichen Beobachter besitzt und der Umfang, in welchem das Bild für ihn sichtbar ist. Durch ihre passende Regulirung kann man ein Instrument vortheilhaft für die Benützung zu mikrometrischen Messungen mittelst optischer Bilder machen; sie allein endlich bedingt die Tiefenwirkung (das Penetrationsvermögen), die Helligkeit (Lichtstärke) der Bilder und vor allem auch die Grenzen der eigentlichen Leistungsfähigkeit (das Unterscheidungs- und Trennungsvermögen) eines optischen Instruments.

Die nothwendige Voraussetzung für eine solche Discussion, damit dieselbe nicht in der Luft schwebend erscheine — daher in der Darstellung das natürliche Mittelglied zwischen ihr und der zuerst erwähnten — bildet der Nachweis, dass sich mit den zu Gebote stehenden physischen Mitteln eine Abbildung überhaupt realisiren lässt und eine Untersuchung darüber, auf welche Weise und bis zu welchem Bereich dies der Fall sei.

Was den letzteren Punkt betrifft, — die mögliche Erweiterung der jeder Abbildung zunächst scheinbar gesteckten Grenzen — so werden die mathematischen Entwickelungen in der Theorie der Aberrationen, wenn man in denselben nicht bei den ersten Schritten stehen bleiben will, bald so complicirt, dass sie keinerlei Uebersicht und allgemeine Schlussfolgerungen mehr gestatten. Die Resultate praktisch-rechnerischer Bemühungen andrerseits — gänzlich abhängig von der Geschicklichkeit, Erfahrung und Ausdauer des Rechners und seiner Einsicht in die Besonderheiten seiner Aufgabe, ferner abhängig von der technischen Vollkommenheit, mit welcher der Constructionsplan zur Ausführung gebracht wird und endlich von der durch physiologische Faktoren stark beeinflussten Beurtheilungsweite der Bilder — lassen Einwänden der verschiedensten Art nach beiden Richtungen hin stets offenes Spiel.

Einer derartigen Sachlage gegenüber scheint es mir von Wichtigkeit, dass sich — wiederum auf ganz allgemeine Voraussetzungen hin und in Folge dessen mit dem Anspruch auf eben so allgemeine Giltigkeit — ein Nachweis darüber erbringen lässt, welchen Grad der Vollkommenheit optische Bilder überhaupt erreichen können und dass die Vereinigung weitgehender Ansprüche nach verschiedenen Richtungen hin in sich widerspruchsvoll, daher das Streben nach einer solchen von vornherein aussichtslos ist. Dieser Nachweis erstreckt sich in der vorliegenden Darstellung nur auf einige Punkte. Vielleicht ist ein Andrer so glücklich, ihn auf die anderen, im Text näher angegebenen Bildeigenschaften mit ausdehnen zu können.

Diese allgemeinen Erörterungen bilden die Unterlagen für die eigentliche besondere Theorie der optischen Instrumente, in welcher die Hauptgattungen derselben (Auge, Projectionssystem, Lupe, Mikroskop und Fernrohr) im einzelnen durchgegangen und von den allgemeinen Betrachtungen auf sie Anwendung gemacht wird. Es wird also bei jedem dieser Instrumente die dioptrische Grundwirkung bestimmt und die Faktoren hervorgehoben, von denen sie abhängt, ferner die Art der in ihm stattfindenden Strahlenbegrenzung und ihr eigenthümlicher Einfluss auf die Wirkung des Instruments. Hieran schliesst sich bei den künstlichen Instrumenten eine kurze kritische und historische Uebersicht über die wichtigsten bisher bekannt gewordenen Constructionstypen derselben.

Die Beengung in dem mir zu Gebote gestellten Raum und das Dilemma zwischen Lieferungsfrist und Musse zur Fertigstellung haben mich gerade in diesem Abschnitt genöthigt, mich auf die Zeichnung der allgemeinsten Umrisse zu beschränken. Kenner der einzelnen Instrumente werden daher wohl die Discussion mancher sie interessirender Fragen vermissen. Sollte die hier gegebene Darstellung trotzdem einigen Beifall finden, so würde ich nach meiner persönlichen Neigung besonders gern eine spätere Gelegenheit wahrnehmen, um gerade auf diesem Gebiete das jetzt Versäumte nachzuholen.

Die Methoden zur empirischen Bestimmung der Constanten der optischen Instrumente bilden den Gegenstand des letzten Capitels; sie liefern eine natürliche Ergänzung der voranstehenden durchweg rein theoretischen Erörterungen.

Auch hier habe ich mich auf das wesentlichste beschränkt und z. B. vorläufig abgesehen von der Darstellung der Methoden, welche man vorgeschlagen und angewandt hat, um die Qualität eines Systems nach ihren verschiedenen Richtungen hin zu prüfen. Der grösste Theil dieser Methoden beruht überdies so sehr auf praktischer Erfahrung und auf der Beachtung von Merkmalen, die sich mit Worten kaum genügend sicher angeben lassen, dass ich von vornherein Bedenken trug, eine schriftliche Anleitung zu solchen Erprobungen zu versuchen, wo bekanntermaassen kaum eine mündliche mit unmittelbaren Hinweisen verbundene immer zum Ziele führt.

Die Theorie der optischen Instrumente bezw. der durch solche vermittelten Abbildung findet ihren eigentlichen Schlussstein erst da, von wo sie rationeller Weise auch ihren Ausgangspunkt nimmt: in der Betrachtung des physischen Processes der Bildentstehung. An mehreren Stellen der vorliegenden Darstellung musste von den Resultaten einer solchen Betrachtung bereits Gebrauch gemacht oder auf die Ergänzung der rein dioptrischen Beweisführung durch jene physikalische hingewiesen werden.

Für selbstleuchtende Objekte ist eine solche Theorie des physischen Abbildungsprocesses auf bekannten Grundlagen und nach bekannten Verfahrungsweisen unschwer zu erbringen, zumal durch die Arbeiten von SCHWERD, AIRY, ANDRÉ, H. STRUVE, LOMMEL u. A. alle wichtigen Fragen im wesentlichen bereits gelöst sind

Die Abbildung von Objekten jedoch, welche nicht selbst Erreger von Lichtwellen sind, sondern nur das von anderen Lichtquellen auf sie gestrahlte Licht ihrer natürlichen Beschaffenheit entsprechend modificirt weiterstrahlen und

dadurch mittelbar leuchtend werden, ist nicht nach denselben und auch nicht nach gleich einfachen Normen zu bestimmen. Die Feststellung der Gesetze, denen eine derartige Abbildung unterliegt, bildet den Inhalt desjenigen, was specieller als die »ABBE'sche Theorie« bezeichnet wird und in den allgemeinsten Grundzügen durch die Veröffentlichungen ihres Urhebers[1]) DIPPEL's[2]) sowie einiger anderer (DE CASTELARNAU, HEURCK, DALLINGER)[3]) auch schon bekannt geworden ist.

Es war ursprünglich meine Absicht, an dieser Stelle eine genauere Darlegung auch dieser Theorie zu geben. Ich bemerkte jedoch bald, dass mich die consequente Ausführung dieses Planes zur Wiedergabe ziemlich weitläufiger vorbereitender Betrachtungen auf einem Gebiete zwingen würde, welches man füglich als »allgemeine Diffractionstheorie« bezeichnen könnte. In Folge dessen würde, wie ich sah, eine einigermaassen erschöpfende Darstellung mehr Raum und mehr Zeit in Anspruch nehmen, als ich ihr jetzt widmen konnte. Um die Herausgabe des z. Th. seit langer Zeit gedruckt vorliegenden Theils des Buches nicht noch länger — ja auf unbestimmte Zeit — hinauszuschieben oder umgekehrt bloss um der äusseren Fertigstellung willen die Darstellung jener Theorien hastig abzufassen, und entsprechend unvollständig werden zu lassen entschloss ich mich in Uebereinstimmung mit dem Herrn Verleger, jenen jetzt für sich herausgehen und diese später als besonderes Bändchen folgen zu lassen. Zu diesem Entschluss trug noch der Umstand bei, dass Herr Professor ABBE die Absicht ausgesprochen hatte, in der nächsten Zeit seine Untersuchungen auf dem Gebiete der allgemeinen Diffractionstheorie selbst darzustellen. Eine solche — an sich schon wünschenswerthe — Veröffentlichung würde mir aber natürlich die Lösung meiner besonderen Aufgabe wesentlich erleichtern und mir auch ermöglichen, meine Darstellung unbeschadet der Strenge viel übersichtlicher zu gestalten. Ich hoffe, sie binnen Jahresfrist abgeschlossen zu haben.

Schliesslich seien mir noch ein paar Bemerkungen gestattet über den Antheil, den Herr Professor ABBE an der vorliegenden Darstellung hat, und denjenigen, welchen ich selbst an ihr beanspruchen darf.

Wie schon aus dem Voranstehenden hervorgeht und die Lektüre des Buches Jedem noch deutlicher zeigen wird, ist der Inhalt desselben in seinen wesentlichen Grundlagen das geistige Eigenthums ABBE's. Der Darstellung seiner Untersuchungen und Anschauungen über das Wesen und die Wirkung der optischen Instrumente war dieses Buch ja von vornherein gewidmet. Was jedoch diese Darstellung selbst betrifft, so brachten es die Verhältnisse mit sich, dass ich trotz stetem persönlichen Verkehr mit diesem meinem verehrten Lehrer und

[1]) Beiträge zur Theorie des Mikroskops etc. M. SCHULTZE's Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 438. 1873, und einige Aufsätze im Journ. of the R. Micr. Soc., daselbst auch solche von CRISP, STEPHENSON u. A.

[2]) Handbuch der allgemeinen Mikroskopie. Braunschweig 1882, pag. 89 ff.

[3]) Des ersteren Vision microscopica, Madrid 1885, der anderen beiden Handbücher über das Mikroskop.

Freunde kaum mehr als den allgemeinen Plan und Gang derselben mit ihm besprechen konnte, die Ausführung im Einzelnen aber mir allein oblag und ihm noch heute kaum zu Gesicht gekommen ist. Ich befinde mich also in der Lage, dass ich jedes Verdienst um den Inhalt des Dargestellten durchaus ablehnen, die Verantwortung für die Richtigkeit und angemessene Form ganz auf mich nehmen muss.

Dass einige Capitel, wie das I., III. VI. IX., und manche Theile in anderen auch inhaltlich nicht auf Abbe zurückzuführen sind, sondern die Untersuchungen anderer Forscher wiedergeben, wird der Kundige sofort bemerken und braucht daher kaum hervorgehoben zu werden. In dem VI. Capitel über »Prismen und Prismensysteme« habe ich einige von mir selbst gelegentlich angestellte Untersuchungen mitgetheilt, durch welche, wie mir schien, dieser Gegenstand nach einigen Richtungen hin vervollständigt wird und er denjenigen Zusammenhang enthält, der ihm früher wohl fehlte.

Wenn das Büchlein Andere anregen sollte, zur Lösung der in ihm behandelten Probleme ihrerseits beizutragen, so hat es seinen wesentlichen Zweck erfüllt.

Jena, im März 1893.

S. Czapski.

I. Geometrische Optik.

Einleitung.

Die Gesammtheit der uns bekannten Erscheinungen des Lichts hat zu der Annahme geführt, dass das Licht in transversalen Schwingungen eines sehr feinen, sehr elastischen und überall verbreiteten Mediums, des sogen. Lichtäthers bestehe. Auf Grund dieser Vorstellung gelingt es, von den meisten Erscheinungen des Lichts ziemlich vollständig Rechenschaft zu geben.

Es giebt aber ein grosses Gebiet von Lichterscheinungen — und darunter befinden sich gerade solche in grosser Zahl, welche sich im gewöhnlichen Leben am häufigsten darbieten, und eine weitgehende praktische Anwendung gefunden haben — die in ihrem wesentlichen Theile nicht von der genannten näheren Natur des Lichts abhängen, sondern die auf gewissen allgemeineren Eigenschaften der Lichtbewegung beruhen, — Eigenschaften, die an sich sehr einfach sind und die auch für sich, ohne Berücksichtigung, ja selbst ohne Kenntniss der näheren Natur des Lichts zur Grundlage der hierher gehörigen Untersuchungen genommen werden können und — in früheren Zeiten ebensowohl, als in der Gegenwart — mit Erfolg genommen worden sind.

Diese allgemeinen Eigenschaften der Lichtbewegung lassen sich aus den Grundvorstellungen über die Natur desselben unter Zuhilfenahme einiger durch die Erfahrung dargebotener Hilfsprinzipien mathematisch streng ableiten und dadurch tiefer begründen. Sie lassen sich aber auch ohne weiteres als durch die Erfahrung gegeben ansehen und zum selbständigen Ausgangspunkt der Untersuchung nehmen.

Es sind dies die Gesetze 1) der geradlinigen Ausbreitung des Lichts; 2) der Unabhängigkeit der Theile eines Lichtbündels von einander; 3) das Gesetz der regelmässigen Zurückwerfung, Spiegelung, Reflexion und 4) das Gesetz der regelmässigen Brechung (Refraction) des Lichts.

Alle vier Gesetze beziehen sich nur auf die Richtung der Lichtbewegung, also eine rein geometrische Eigenschaft derselben. Die Anwendung dieser Gesetze auf die in der Natur sich darbietenden oder künstlich herstellbaren Combinationen bildet den Gegenstand der »geometrischen Optik«.

Die eigentlich so genannte geometrische Optik erstreckt sich jedoch nicht auf alle Erscheinungen des Lichts, soweit in ihnen bloss Richtungsänderungen in Frage sind, sondern sie beschränkt sich auf diejenigen Fälle, in welchen die wirkenden Medien isotrop, unkrystallinisch, sind.

Wenn nun aber auch die genannten Gesetze genügen, um auf ihnen ein sehr vollständiges System aufzubauen, d. h. ein solches, welches die beobachtbaren Erscheinungen sehr annähernd wiedergiebt, und gestattet, noch nicht beobachtete

Erscheinungen richtig vorauszusagen, so werden wir doch der näheren Vorstellungen über die Natur des Lichts und deren Consequenzen auch im Verfolge des hier ins Auge gefassten beschränkteren Untersuchungsgebietes nicht entrathen können. Es hat öfters zu Irrthümern geführt, dass man die Gesetze der geometrischen Optik über diejenigen Grenzen hinaus, in welchen sie durch die Erfahrung bestätigt oder durch die strengere Theorie gestützt waren, anwandte. Namentlich eine vollständige Theorie der optischen Instrumente und der meteorologisch-optischen Erscheinungen lässt sich nur durch Rückgreifen auf die Begriffe der Undulationstheorie gewinnen; und es wird in jedem Falle gut sein, sich zu vergewissern, wie weit die aus den einfachen Vorstellungen gezogenen Folgerungen in der strengen Theorie noch eine Stütze finden, wenn man die geometrische Optik als physikalische Disciplin und nicht als ein blosses Uebungsfeld der Mathematik behandeln will.

Diesem Standpunkte gemäss sollen des weiteren auch im Folgenden ausser den allgemeinen Beziehungen, welche aus den Grundgesetzen abgeleitet worden sind, nur solche Consequenzen derselben behandelt werden, welche entweder zum Verständniss wichtiger Naturerscheinungen oder dem der optischen Instrumente nöthig sind. —

Das Gesetz der Ausbreitung des Lichts in geraden Strahlen ist ebensowenig, als eines der anderen Grundgesetze der Physik, aus einzelnen, eigens hierzu angestellten Beobachtungen geschlossen worden, noch ist es durch solche überhaupt streng beweisbar. Es nimmt seine Gewissheit, gerade so wie die Grundgesetze anderer physikalischer Disciplinen, aus der Uebereinstimmung der aus ihm gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung. Ueberall im gewöhnlichen Leben, und in aller Strenge in der praktischen Astronomie und Geoäsie, wird auf die unbedingte Giltigkeit dieses Gesetzes gebaut und wird umgekehrt die Geradlinigkeit einer Strecke aus der Thatsache der Bewegung des Lichtes in ihr gefolgert; und stets haben sich die hieraus weiter gezogenen Schlüsse mit der ursprünglichen Annahme vollkommen vereinen lassen. Diese zahllosen, zum Theil so kritischen Bestätigungen des Gesetzes haben demselben eine Sicherung und allgemeine Annahme verschafft, wie kaum einem anderen Naturgesetze.

Trotzdem ist, wie seit hundert Jahren wohlbekannt ist, das Gesetz nicht unbedingt, und in der gewöhnlich ausgesprochenen Form überhaupt nicht richtig.

Wenn man daran geht, es einer möglichst strengen Prüfung durch das Experiment zu unterziehen; wenn man, um es als Elementargesetz nachzuweisen, möglichst mit den elementaren Bestandtheilen des Lichts, den »Strahlen« selbst zu operiren versucht, also durch Schirme mit sehr engen Oeffnungen aus einem grösseren Lichtbündel solche »Strahlen« heraushebt und ihren Weg verfolgt, so bemerkt man, dass die Ausbreitungsrichtung des Lichts desto unbestimmter, vieldeutiger, und damit die Existenz isolirt darstellbarer »Lichtstrahlen« überhaupt desto zweifelhafter wird, je mehr man sie zu erreichen strebt. Denn je enger man die fragliche Oeffnung macht, desto weiter breitet sich das durch sie getretene Licht, statt in einer einzigen Richtung weiterzugehen, in ein Büschel von variabler Helligkeit aus; einen je kleineren Schirm man in den Weg eines Lichtbündels stellt, desto weniger ist der auf einem gegenübergestellten Schirm entworfene Schatten dem schattenwerfenden Körper bloss geometrisch ähnlich, desto mehr tritt an die Stelle dessen, was wir als Schatten zu bezeichnen gewohnt sind, eine ganz andere Erscheinung; und ähnliches mehr. Wir brauchen

uns bei einer näheren Beschreibung solcher Versuche nicht aufzuhalten; denn wir gelangen auf diesem Wege zu nichts anderem, als zu dem, was als ein besonderes, wichtiges Erscheinungsgebiet der Optik Diffraction, Beugung des Lichts genannt und genau studirt worden ist.

Trotzdem hiernach das Gesetz der Ausbreitung des Lichts in Strahlen nur eingeschränkte Giltigkeit hat, verliert es doch kaum an Bedeutung, auch auf dem Boden der strengeren Theorie des Lichts, welche die oben erwähnten Erscheinungen völlig zu erklären vermag. Jene Theorie[1]) zeigt vielmehr, übereinstimmend mit der Erfahrung, dass bis zu einem erheblichen Grade der Annäherung in den gewöhnlich vorkommenden Fällen, d. h. überall da, wo wir es mit Lichtbüscheln von endlichem Querschnitt zu thun haben, diese Büschel sich in vielen Beziehungen so verhalten als seien sie aus einzelnen Strahlen zusammengesetzt, welche sich unabhängig von einander in geraden Linien fortbewegen. Nur in den, meist ziemlich subtilen Fällen, welche in der Lehre von der Interferenz und Beugung des Lichts betrachtet werden, und auch da oft nur bei besonderer Aufmerksamkeit, sind die Ausnahmen von dieser Regel wahrzunehmen, wiewohl die Regel in aller Strenge niemals gilt.

Auch an den Grenzen von Büscheln endlichen Querschnitts verhält sich das Licht abweichend von den Grundgesetzen der geometrischen Optik; aber alsdann ist die Menge des abweichenden Lichts verschwindend gegen die des, in diesem Sinne, regulären, kann also gegenüber jener für viele Zwecke vernachlässigt werden.

Die anderen beiden Grundgesetze treffen, wie die strenge Theorie des Lichts und ebensolche experimentelle Prüfung zeigen, bis zu demselben Grade der Annäherung zu, wie die beiden ersten, das heisst in allen Fällen wo, und in so weit, man gemäss den vorliegenden äusseren Bedingungen berechtigt ist, überhaupt von »Strahlen« zu sprechen. Hiervon weiter unten mehr.

Wiewohl also die angenommenen Grundgesetze der geometrischen Optik nicht unbedingt richtig sind, und zum Theil sogar keine eigentlich reale Bedeutung haben, so verliert doch diese Disciplin nicht ihre Berechtigung; vielmehr hat sie eine solche immer noch, auch in dem strengeren Systeme der Wissenschaft, als formale Unterdisciplin, welche gestattet, aus wesentlich einfacheren und der gemeinen Erfahrung zugänglicheren Annahmen als die strenge Theorie, einen grossen und praktisch sehr wichtigen Theil von deren Resultaten abzuleiten, mit wesentlich geringeren Mitteln, als jene es vermag und doch mit einer, für sehr viele Fälle hinreichenden Annäherung an die Wirklichkeit.

Es wurde schon oben daran erinnert, dass die Wissenschaft — und dies mit sehr gutem Rechte und bestem Erfolge — auch bei anderen Disciplinen der Physik ganz ebenso verfährt. So sind wir gegenwärtig von der Discretheit der Materie vollkommen überzeugt, fahren aber doch fort, in einer grossen Zahl von Untersuchungen die Continuität derselben anzunehmen. So geht neben den Forschungen nach dem tieferen Wesen der Elektricität die alte, auf der Annahme der beiden elektrischen »Fluida« basirte Elektrostatik unbeirrt ihren Weg weiter. So ist in noch grösserer Aehnlichkeit mit dem vorliegenden Fall, die Elektrodynamik AMPÈRE's auf die Annahme von Elementarwirkungen gegründet, von denen Niemand glaubt und ebensowenig postulirt, dass sie als solche Realität

[1]) S. z. B. KIRCHHOFF, Zur Theorie der Lichtstrahlen. Sitzber. Berl. Ak. 1882, pag. 641; WIED. Ann. 18, pag. 663. 1883.

hätten — genau ebenso wie von den »Lichtstrahlen«. Aber wiewohl Strom»elemente« und deren Wirkung auf einander niemals beobachtet worden sind, so ist die Einführung ihres Begriffs und die Annahme eines Wirkungsgesetzes von solchen dennoch eine äusserst fruchtbare gewesen, in so fern sie gestattet, die Wirkung endlicher geschlossener Ströme auf einander, mit einer, ebenfalls in vielen Fällen sehr weitreichenden Annäherung an die beobachtbare Wirklichkeit zu berechnen.

Eine gleiche didactische und methodische Berechtigung, wie die Loslösung der geometrischen Optik von der physikalischen Lehre des Lichts hat dann innerhalb dieser noch die weitere Scheidung in phoronomische Optik (Undulationstheorie) und mechanische Optik (Theorie des Aethers).

Verhalten des Lichts an der Grenze zweier verschiedener Medien.

So lange sich das Licht in einem völlig homogenen Mittel bewegt, thut es dies, mit den angegebenen Einschränkungen in geradlinigen Strahlen. Gelangt es an die Grenze eines Mittels von anderer optischer Beschaffenheit, so spaltet es sich in zwei Theile, die sich von der getroffenen Stelle der Grenzfläche aus mit, im allgemeinen plötzlich, veränderter Richtung fortbewegen:

a) Ein Theil des Lichts bleibt im ersten Medium — zurückgeworfenes, reflectirtes Licht.

b) Der übrige Theil des Lichts geht in das zweite Medium über und pflanzt sich zunächst in ihm fort — gebrochenes Licht.

Eine genauere Untersuchung zeigt allerdings, dass diese scharfe Scheidung niemals eintritt. Auch der Theil des Lichtes, welcher in das erste Mittel zurückkehrt, war vorher bis zu einer gewissen, sehr geringen Tiefe in das zweite Mittel eingedrungen. Die natürlichen Farben der Körper haben in der bei dieser Gelegenheit vor sich gegangenen selectiven Absorption des Lichts ihren Entstehungsgrund, wie an anderer Stelle auseinandergesetzt wird. In welchem Maasse und bis zu welcher Tiefe ein solches Eindringen des sogen. reflectirten Lichtes stattfindet, hängt ausser von der Natur der aneinandergrenzenden Mittel, auch noch in hohem Grade von der Beschaffenheit der Grenzfläche ab; z. B. davon, ob der zweite Körper in festem oder etwa pulverisirtem Zustande vorliegt, ob seine Oberfläche im ersteren Falle rauh oder polirt ist.

Auf die nähere Natur der hier in Frage stehenden Vorgänge kann nur in der physikalischen Theorie des Lichts eingegangen werden.

Die Richtung des reflectirten Lichts hängt nach dem dritten Grundgesetz der geometrischen Optik in einer bald näher anzugebenden Weise nur von der Neigung des einfallenden Lichtstrahls gegen das von ihm getroffene Element der Grenzfläche ab. Und in der That, wenn diese Fläche mathematisch regelmässig und vollkommen glatt polirt ist, so findet die Bewegung des Lichts fast ausschliesslich in den, jenem Gesetze entsprechenden Richtungen statt. Die Reflexion an solchen Flächen heisst daher regelmässige Reflexion.

Je mehr aber die Trennungsfläche unregelmässig ist, in der Art, dass ihre Elemente schon auf kleinem Gebiete oft und stark ihre Richtung ändern, d. h. je mehr die Fläche rauh, matt ist, desto weniger findet jenes Grundgesetz auf die Reflexion des Lichtes an ihr Anwendung. Die Anordnung der Elemente ist bei solchen Flächen wohl nie näher angebbar, so dass für eine Berechnung ihrer Wirkung nach dem Reflexionsgesetz schon die nöthige Unterlage fehlt. Es ist dann aber auch die Grösse der verschiedentlich wirkenden Flächenstücke eine so geringe, dass die Regeln der geometrischen Optik, wie in der Einleitung hervorgehoben, überhaupt nicht ohne weiteres auf das Verhalten des Lichts an

ihnen anwendbar sind. Endlich wird in einem solchen Falle, wie leicht ersichtlich, das in eine geringe Tiefe des zweiten Mittels eingedrungene Licht mit wirksam sein müssen und die Erscheinung beeinflussen. Von dem, z. B. auf eine ebene Fläche in einer Richtung auffallenden Licht werden dann Theile, in stetig variirender Intensität, nach allen Richtungen zerstreut — diffuse Reflexion.[1])

Gerade durch den Umstand, dass eine diffus reflectirende Fläche sich in ihren kleinsten Theilen verschieden gegen das Licht verhält, werden uns diese, und damit die Fläche selbst, als discrete Ausgangspunkte von Lichtbewegungen sichtbar, während durch Reflexion an vollkommen glatten Flächen — wie wir später sehen werden — nur Bilder der äusseren, ihrerseits entweder selbst leuchtenden oder diffus reflectirenden Gegenstände entstehen, die reflectirenden Flächen selbst aber durchaus unsichtbar bleiben. In der Wirklichkeit wird diese Unsichtbarkeit freilich meist durch die unvermeidlichen Kratz- oder Sprungstellen, Stäubchen u. dergl. mehr oder minder aufgehoben. Denn in der Wirklichkeit giebt es keine Grenzflächen, die dem einen oder dem anderen Falle vollkommen entsprechen, so dass wir es immer nur mit einer mehr oder minder grossen Annäherung an das im Idealfalle stattfindende Verhalten zu thun haben.

In Bezug auf das gebrochene Licht gelten zum Theil dieselben Bemerkungen, wie sie in Bezug auf das reflectirte eben gemacht wurden. Wenn die Grenzfläche der beiden Medien glatt ist, so hängt die Richtung des gebrochenen Lichts gemäss dem bald anzugebenden vierten Grundgesetz der geometrischen Optik nur von der Richtung des einfallenden Strahls gegen das getroffene Flächenelement und der Natur der beiden aneinandergrenzenden Medien ab. Ist die Trennungsfläche aber matt, rauh, so wird das in das zweite Medium eindringende Licht diffus gebrochen, in ganz analoger Weise, wie das in das erste Medium zurücktretende Licht diffus reflectirt wird.

Innerhalb des zweiten Mediums kann das Licht verschiedene Modifikationen erfahren. Stets geht ein Theil des Lichts als solches verloren und wird in andere Formen von Energie — Wärme, Electricität, chemische Energie — verwandelt, absorbirt. Oft ändert das Licht auch nur seine Art, Farbe, innerhalb des neuen Mittels, und bietet dann die interessanten Erscheinungen der Fluorescenz dar. Jenachdem durch eine Schicht von gegebener Dicke ein grösserer oder geringerer Theil des auf sie gefallenen Lichtes hindurchgelassen wird, nennt man den Körper mehr oder weniger »durchsichtig«. Ein Mittel kann für verschiedene Farben verschiedene Absorption und daher auch verschiedenen Grad der Durchsichtigkeit besitzen.

Wenn das Medium, in welchem sich das Licht bewegt, vollkommen homogen ist, so kann man durch hinreichend dünne Schichten desselben andere Objekte, wenn auch in verringerter Helligkeit, so doch in vollkommen unverminderter Schärfe sehen. Medien, welche in homogener Masse Partikel anderer optischer

---

[1]) Dieselbe wurde zuerst von BOUGUER, Traité d'optique ed. p. Lacaille, Paris 1760, und LAMBERT, Photometria, Augsb. 1760, studirt; später namentlich von F. ZÖLLNER, Photometr. Unters. Leipzig 1865. CHR. WIENER, Lehrb. d. darst. Geometrie. Bd. 1, pag. 390. 1884. K. ANGSTROM, WIED. Ann. 26, pag. 253. 1885. B. MESSERSCHMITT, Dissert. Erlangen 1888. H. SEELIGER, Vierteljahrschr. d. astr. Ges. 20, pag. 264. 1885; 21, pag. 216. 1886; Sitzber. k. bair. Akad. 1888, pag. 201. CH. GODARD, Journ. de phys. 7, pag. 435. 1888. E. LOMMEL, WIED. Ann. 36, pag. 473. 1889.

Eigenschaft zerstreut enthalten, wie dies z. B. bei der Milch, dem Blut, dem Porzellan, der feuchten atmosphärischen Luft der Fall ist, heissen trübe Medien. Die in ihnen vorhandenen Partikel verursachen eine innere diffuse Reflexion[1]), deren Natur nur nach den Vorstellungen der physikalischen Lichttheorie näher definirbar ist. Im durchgehenden Lichte lassen diese trüben Medien die äusseren Gegenstände nur unscharf erkennen, weshalb sie auch durchscheinend genannt werden. Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, dass es in der Natur absolut durchsichtige Medien nicht giebt, sondern nur ein gradueller Unterschied der Trübheit vorhanden ist, welcher allerdings so gross ist, dass er zu einer Verschiedenheit der allgemeinen Bezeichnung vollauf berechtigt. Ebenso ist bekannt, dass es in der Natur keine ganz undurchsichtigen Mittel giebt, sondern in hinreichend dünnen Schichten alle Medien durchsichtig oder wenigstens durchscheinend werden. Doch beziehen sich diese Bemerkungen schon nicht mehr auf das Verhalten des Lichts an der Grenze zweier Medien, sondern auf seinen Verlauf innerhalb je eines Mittels.

In dem Folgenden werden alle Medien, welche das Licht trifft, als vollkommen durchsichtig, homogen, und als durch vollkommen glatte Flächen begrenzt angenommen, oder vielmehr es wird das Verhalten des Lichts an ihnen nur in so weit, als es von jenen Eigenschaften bedingt ist, untersucht.

Entsprechend dem Zwecke und Character der geometrischen Optik wird von allen Eigenschaften des Lichtes, welche nicht zu Aenderungen geometrischer Verhältnisse Anlass geben, in dem Vortrag derselben abgesehen. Also wird keine Rücksicht darauf genommen, ob das Licht von einem selbstleuchtenden oder diffus strahlenden Körper ausgeht, oder von Brennpunkten, die erst durch besondere optische Veranstaltungen aus jenen hervorgegangen sind; ferner ob das Licht intensiv oder schwach, ob natürliches oder in irgend einem Polarisationszustande befindliches ist. Hingegen liegt es ganz im Sinne der geometrischen Optik, als einer Hilfsdisciplin der physikalischen Optik, und einer selbst physikalischen Disciplin, nicht den Schnittpunkt irgend welcher »Strahlen« verschiedenen Ursprungs als »Brennpunkt« des betreffenden Büschels aufzufassen, sondern als solchen nur den Vereinigungspunkt cohärenter Strahlen gelten zu lassen, d. h. von Strahlen, welche ursprünglich von ein und demselben leuchtenden Punkte ausgingen; oder — wie die Definition des Lichtstrahls in der Ausdrucksweise der Wellentheorie lautet — nur solche, welche Normalen derselben Wellenfläche sind, was wir schon hier betonen wollen.

Um der Sicherheit der Terminologie willen stellen wir den weiteren Ausführungen folgende Definitionen voran.

Das von irgend einer — gleichgiltig ob selbst- oder indirekt leuchtenden — Fläche sich ausbreitende Licht denken wir uns zusammengesetzt aus den Antheilen, die von je einem Element der Fläche ausgehen. Das von einem solchen Flächenelement ausgehende Licht bildet ein physikalisches Lichtbüschel.

Das in Oeffnungswinkel und Querschnitt kleinste physikalische Büschel, welches praktisch noch von dem übrigen Licht getrennt und isolirt weiteren

---

[1]) Rayleigh, Illumination in a Fog., Phil. Mag., pag. 443. 1885; Chwolson, Photometrische Untersuchungen über die innere Diffusion des Lichts. Mél. phys. et chim. 12, pag. 475. 1886, und Grundzüge einer mathem. Theorie ders., ibid. 13, pag. 83. 1889, abgedruckt in 's Repert. 23, pag. 139 u. 211. 1878; 26, pag. 364 u. 385. 1890.

Veränderungen unterworfen werden kann, ist ein physikalischer Lichtstrahl (NEWTON).

In der streng geometrischen Optik bildet man die Fiction, dass das Licht von den einzelnen Punkten einer Fläche ausgehe. Dieser Punkt heisst dann der Brennpunkt des Lichtbüschels oder kurzweg der leuchtende Punkt. Wenn die Winkelöffnung und der Querschnitt des Büsches verschwindend klein ist, so nennt man das Büschel ein Elementarbüschel. (Wo nicht die entgegengesetzte Annahme ausdrücklich gemacht ist, denken wir uns die Form des Elementarbüschels als die eines geraden Kegels bezw. Cylinders). Die Büschel denkt man sich als Aggregate von Lichtstrahlen, welche letztere als mathematische gerade Linien behandelt werden.

Jeder Strahl eines Elementarbüschels kann als seine Axe angesehen werden.

Des näheren oft, und bei endlichen Büscheln durchaus heisst Axe oder Hauptstrahl des Büschels derjenige Strahl, welcher der, durch den Brennpunkt gehenden Schwerpunktslinie des Büschels — dieses als homogenen Körper gedacht — entspricht; also bei cylindrischen und conischen Büscheln die geometrische Axe, Symmetrielinie des Kegels bezw. Cylinders. Die Axe ist der Repräsentant der Richtung des Büschels.

Ein Büschel heisst convergent oder divergent, je nachdem wir es an einer Stelle betrachten, die im Sinne der gedachten Lichtbewegung vor oder hinter dem Vereinigungspunkte der Strahlen, dem Brennpunkte, liegt. Der Grad der Con- oder Divergenz von Büscheln wird durch ihren Oeffnungswinkel, bei Elementarbüscheln durch ihre relativen Oeffnungswinkel, in der Ebene oder im Raume, gemessen.

Der Brennpunkt eines Büschels heisst reell, wenn die Strahlen sich in Wirklichkeit in ihm schneiden oder nur durch die Dazwischenkunft eines fremden Körpers daran gehindert werden, dies in ihrem weiteren Verlaufe zu thun, d. h. wenn sie in der Richtung ihrer Bewegung verlängert, sich in ihm schneiden würden. Der Brennpunkt heisst virtuell, wenn die Strahlen nur in ihrer Verlängerung nach rückwärts — entgegen der Lichtbewegung — sich in ihm schneiden.

Convergente Büschel können daher nur reelle Brennpunkte haben; divergente Büschel aber beide Arten. Ursprünglich ist ein Büschel immer divergent und sein Brennpunkt reell. Durch die Wirkung der optischen Instrumente oder sonstige Reflexionen und Brechungen kann es in ein Büschel der anderen beiden Arten verwandelt werden.

Der Raum, in welchem sich das Licht bewegt, ganz gleich ob derselbe mit wägbarer Materie erfüllt ist, oder nicht, heisst das Medium oder Mittel. Der Brennpunkt eines Büschels wird stets in demjenigen Mittel liegend angenommen in welchem thatsächlich die Strahlen verlaüfen, deren reeller oder virtueller Vereinigungspunkt er ist, auch wenn dieser dem Orte nach in ein anderes Mittel fällt.

Der Unterschied zwischen reellen und virtuellen Brennpunkten wird nur wegen der praktischen Consequenzen, die er mit sich bringt, statuirt und festgehalten.

Wenn durch irgend welche optischen Mittel die von einem leuchtenden Punkte ausgegangenen Strahlen zum Theil wieder in einen Punkt vereinigt werden, so nennt man diesen das optische Bild des ursprünglichen Punktes. Je nachdem das Bild ein reeller oder virtueller Brennpunkt ist, heisst es selbst reell oder virtuell. Die zur Vereinigung gebrachten Strahlen können dabei ein end-

liches oder auch ein unendlich dünnes (Elementar-) event. auch nur ebenes Partialbüschel bilden.

Virtuelle Brennpunkte geben nicht unmittelbar Bilder z. B. auf einer Tafel, sondern müssen durch optische Mittel erst in reelle verwandelt werden (z. B. durch das Auge). Diese reellen Brennpunkte haben dann gemäss demselben Satze wieder die Eigenschaft, die Strahlen mit gleicher Phase zu vereinigen, sodass sie nunmehr in der That Bilder jener virtuellen geben.

Vermöge der Umkehrbarkeit der Lichtwege (pag. 10) können Objekt- und Bildpunkt ihre Function vertauschen, d. h. jeder Bildpunkt als Objekt Strahlen aussendend in den Richtungen, in welchen solche in ihm zur Vereinigung kamen, wird durch dieselben optischen Mittel genau im vorherigen Objektpunkt abgebildet. Statt zu sagen, ein Punkt sei das Bild eines anderen, nennt man daher beide in Bezug auf die betreffenden optischen Mittel »conjugirte« Punkte.

Was von einem einzelnen Punkte gilt, trifft auch auf mehrere zu, welche ein mehr oder weniger ausgedehntes Objekt und Bild formiren.

Ein Unterschied zwischen einem selbstleuchtenden Objekt und einem optischen Bild ist der, dass ersteres von allen Seiten, letzteres aber im allgemeinen nur innerhalb beschränkter Raumgebiete sichtbar ist.

Historische Anmerkung. EUCLIDES (300 v. Chr.), dem Begründer der wissenschaftlichen Geometrie, ist auch die erste Grundlegung der geometrischen Optik zuzuschreiben. Er nimmt die Lichtstrahlen geradlinig an, aber, ebenso wie die griechischen Philosophen, als vom Auge ausgehend, und zwar in gleichen Entfernungen von einander. Auf dieser Grundlage entwickelt er die Perspektive. In seiner »Katoptrik« folgert er das richtige Reflexionsgesetz ganz treffend aus der symmetrischen Gleichheit von Objekt und Bild bei ebenen Spiegeln. HERO von Alexandrien 200 (?) v. Chr. leitete dasselbe Gesetz aus dem »Oeconomie-Princip« der Natur ab. Aber erst der Araber ALHAZEN (um 1100 n. Chr.) stellte fest, dass das Licht von den gesehenen Gegenständen ausgehe und bestimmte das Reflexionsgesetz näher durch die Feststellung, dass die Ebene, in welcher der einfallende und reflectirte Strahl verliefen, senkrecht auf der reflectirenden Ebene stünden. (ALHAZENI, Opticae thesaurus libri VII; item VITTELLONIS, libri X, Basel 1572). Die Anfänge der Lehre von der Brechung des Lichts (»Dioptrik« von KEPLER genannt, als Pendant zu der »Katoptrik« des Euclid) sind auf PTOLEMÄOS zurückzuführen (2. Jahrhundert n. Chr.), welcher Refractionstafeln von anerkennenswerther Genauigkeit veröffentlichte. (GOVI, L'Ottica di Claudio Tolomeo, Turin 1885). Nächst ihm wurde die geometrische Optik, nach fast tausendjährigem Stillstand, erst wieder von den Arabern zu studiren begonnen (ALHAZEN). Durch diese und die späteren, ROGER BACON, MAUROLYCUS, VITTELIO, PORTA und namentlich KEPLER wurden manche qualitative Eigenschaften der Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen gefunden, das Entstehen der Bilder im Auge, sowie die Ursache der Kurz- und Weitsichtigkeit angegeben, die sphärische Aberration entdeckt und die Grundzüge einer Theorie der Fernröhre geliefert. CARTESIUS hat dann neben werthvollen Specialuntersuchungen z. B. über Regenbögen, dem von WILLIBROD SNELLIUS (Anfang des 17. Jahrhunderts) gefundenen Brechungsgesetze die jetzt übliche bequemere Form gegeben (Dioptrice, enth. in Principia philosophiae. Amstelod. 1672) und NEWTON endlich erwies, dass der Brechungsindex caet. par. eine Function der Farbe sei. (Optics. London 1704.)

An einer auf neueren Forschungen beruhenden pragmatischen Geschichte der geom. Optik fehlt es. Sehr verdienstlich ist auch jetzt noch als Quellenwerk für die ältere Zeit WILDE, Geschichte der Optik. Berlin 1838—43.

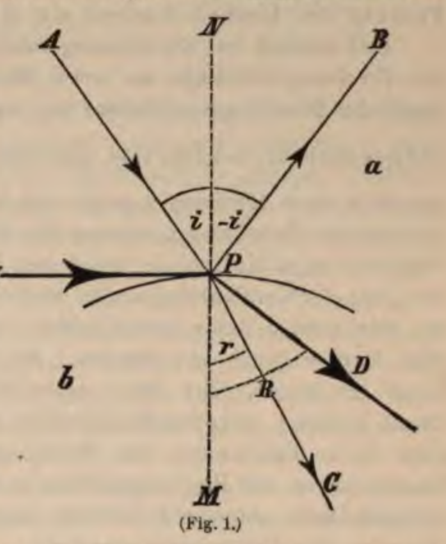
Grundgesetze.

Die Richtung, welche der regelmässig zurückgeworfene und der ebenso gebrochene Theil des Lichts im Verhältniss zu dem einfallenden einschlagen, wird durch die folgenden Gesetze bestimmt (drittes und viertes Grundgesetz der geometrischen Optik).

Definitionen. Der spitze Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der im Einfallspunkte auf der Trennungsfläche der beiden Medien errichteten Normalen, — der Einfallsnormalen, — bildet, heisst der Einfalls-, Incidenzwinkel. Der spitze Winkel, welchen der reflectirte bezw. gebrochene Strahl mit derselben Normalen bildet, heisst der Reflexions- bezw. Brechungswinkel. Die Ebene, in welcher der einfallende Strahl und die Normale liegen heisst die Einfallsebene. Es gilt dann:

1) Der reflectirte und der gebrochene Strahl liegen in der Einfallsebene und auf der entgegengesetzen Seite des Einfallslots, wie der einfallende Strahl.

2) (Grundgesetz der Reflexion.) Der reflectirte Strahl bildet mit dem Einfallslot den gleichen Winkel, wie der einfallende Strahl: $APN = -BPN = i$ (Fig. 1).



(Fig. 1.)

3) Grundgesetz der Brechung. Der Sinus des Brechungs-Winkels steht zu dem Sinus des Einfallswinkels in einem Verhältniss, welches nur von der Natur der beiden aneinandergrenzenden Medien a und b und der Art (Wellenlänge) des wirksamen Lichts, aber nicht von der Grösse des Einfallswinkels abhängig ist: $\sin CPM/\sin APN = \sin r/\sin i = n_{a,b} = const\ (i)$.

Die Verhältniszahl $n_{a,b}$ heisst der Brechungsindex des Mediums a gegen das Medium b für die betreffende Lichtart.

Ueber die erfahrungsmässige Begründung dieser Grundgesetze gilt das in der Einleitung gesagte. Die Ableitung derselben aus den Voraussetzungen der Undulationstheorie wurde zuerst von Huyghens[1]) gegeben, später von Fresnel schärfer formulirt.[2]) Die genaueste Bestätigung hat das Reflexionsgesetz durch astronomische Beobachtungen erfahren, bei welchen die Höhe eines Sterns einerseits direkt durch Einstellung auf ihn mit dem Meridianinstrumente, andererseits indirekt durch Messung der Tiefe seines Spiegelbildes in einem Quecksilberhorizont bestimmt wird. Die auf diese Art beobachtete Tiefe wird immer genau der Höhe gleich gefunden, bei jedem Betrage der letzteren. Dergleichen Messungen sind aber einer sehr grossen Genauigkeit fähig, so dass sie eine ebenso genaue Prüfung der Consequenzen des fraglichen Gesetzes repräsentiren.

Das Brechungsgesetz wird am schärfsten auf die Probe gestellt durch Bestimmungen der Brechungsverhältnisse selber (s. das betr. Cap.) und durch die Uebereinstimmung der unter seiner Annahme berechneten optischen Constructionen, wenn dieselben exakt ausgeführt sind, mit der Rechnung.

In Bezug auf letzteres Gesetz hat die Erfahrung weiterhin zu erkennen gegeben, dass — was bei der Reflexion eo ipso statt hat — der einfallende und der gebrochene Strahl stets mit einander vertauscht werden können, so dass, wenn irgendwo ein unter dem Winkel i im Medium a einfallender Strahl unter

[1]) Traité de la lumière. Leiden 1690, pag. 21 u. 33.

[2]) Oeuvres compl. I. div. loc. S. Verdet-Exner, Wellentheorie des Lichts 1, pag. 142 und Kirchhoff l. c.

dem Winkel r in das Medium b gebrochen wird, derselbe unter dem Einfallswinkel r im Medium b einfallend genau unter dem Winkel i in das Medium a gebrochen würde. Mit anderen Worten: wenn $n_{ab} = \sin r / \sin i$ der Brechungsexponent des Mediums a gegen das Medium b ist, so ist $n_{ba} = \sin i / \sin r = 1/n_{ab}$ der Brechungsexponent des Medium b gegen das Medium a; also $n_{ab} = 1/n_{ba}$

Wir schliessen hieraus: wenn ein Strahl nach irgend welchen Reflexionen und Brechungen so auf eine Fläche fällt, dass er senkrecht reflectirt wird, so durchläuft er genau seinen vorherigen Weg, nur in umgekehrter Richtung — Princip der Umkehrbarkeit der Strahlenwege. —

Und endlich hat die Messung zahlreicher Brechungsverhältnisse gezeigt, dass das Brechungsverhältniss n_{ab} eines Mediums a gegen b vollständig besimmt ist, wenn die Brechungsverhältnisse n_{ac}, n_{bc} der Medien a und b gegen irgend ein anderes Medium c bekannt sind, und zwar, dass $n_{ab} = \frac{n_{ac}}{n_{bc}}$. Der relative Brechungsexponent eines Mediums a gegen das Medium b ist also gleich dem Verhältniss der relativen Brechungsexponenten der Medien a und b gegen ein drittes Medium c. Hierdurch wird die Zahl der möglichen Brechungsexponenten, welche sonst gleich der Zahl der Combinationen aller Medien mit einander wäre, in eindeutiger Weise auf eine einzige Reihe zurückgeführt, nämlich auf die der Brechungsexponenten aller Medien gegen ein einziges. Als das letztere wird vornehmlich der leere Raum genommen. Die Brechungsverhältnisse gegen den leeren Raum heissen darum absolute, oder Brechungsindices schlechthin. Das Vacuum selbst hat gemäss dieser Bestimmung den Brechungsindex 1; die bekannten durchsichtigen Medien haben alle Brechungsindices > 1; nur einige Metalle, in Prismen von sehr geringer Dicke untersucht (KUNDT) haben Indices < 1 ergeben. (S. später: Bestimmung des Brechungsexponenten.)

Vermöge dieser Beziehungen lässt sich die Gleichung, welche das Brechungsgesetz ausspricht, in einer symmetrischen Form schreiben, welche wir künftig oft anwenden werden. Wir haben $\sin r = n_{ab} \cdot \sin i$. Da nun $n_{ab} = n_a / n_b$ ist, wenn wir mit n_a, n_b die Brechungsexponenten der Medien a und b gegen den leeren Raum bezeichnen, so wird

$$n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r,$$

oder das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des Winkels (Strahl-Normale) ändert sich bei je einer Brechung nicht. Wir wollen dieses Produkt die »optische Invariante« nennen.

Man erkennt ferner, dass die Reflexion durch dieselbe Gleichung wie die Brechung dargestellt wird, indem für sie nur $n_a : n_b$ den speciellen Werth -1 erhält. Wir werden daher in dem Folgenden oft nur die Probleme der Brechung direkt behandeln und das für die Reflexion geltende Resultat ohne weiteres aus jenem durch die Substitution $n_a : n_b = -1$ gewinnen.

Dispersion des Lichts. Wie schon bemerkt hängt die durch Brechung herbeigeführte Richtungsänderung des Lichts an der Grenze zweier Medien, also der relative Brechungsexponent derselben nicht nur von der Beschaffenheit dieser Medien ab (für welche er umgekehrt ein wesentliches Charakteristikum ist) sondern auch von der Art (Farbe, Wellenlänge) des wirksamen Lichts; n ist eine Function von λ. Die Natur dieser Function, soweit sie aus den vorhandenen Beobachtungen und der Theorie des Lichts hat erschlossen werden können, wird in einem eigenen späteren Abschnitt (s. Dispersionstheorie) eingehender discutirt werden. Vorläufig genügt uns die von NEWTON zuerst erfahrungsmässig festgestellte Thatsache an sich.

Wie eine solche Verschiedenheit der Brechungsexponenten für verschiedene Farben in Erscheinung treten muss, können wir auf Grund des bisher Abgeleiteten schon angeben. Denn ist der Brechungsexponent eines Mediums gegen den leeren Raum (oder auch gegen ein anderes Medium) für eine gewisse Farbe $= n$, so gilt für diese $\sin i = n \cdot \sin r$. Ist der Brechungsexponent für eine benachbarte Farbe (Wellenlänge) $= n + dn$, so wird ein Strahl von der betreffenden Farbe, welcher unter demselben Winkel i einfällt, wie der erste, unter einem Winkel $r + dr$ gebrochen, welcher von r verschieden ist, gemäss

$$n \cdot \cos r \cdot dr + \sin r \cdot dn = 0$$

oder

$$dr = -(dn/n) \operatorname{tg} r.$$

Unter demselben Winkel einfallende Strahlen verschiedener Wellenlänge werden also schon durch eine einzige Brechung (und noch mehr durch zwei solche geeignet angeordnete) in verschiedene Richtungen gelenkt. NEWTON schloss umgekehrt aus der ungleichen Ablenkung verschiedener Farben durch Prismen auf die verschiedene Brechbarkeit des verschieden farbigen Lichts und auf die Zusammensetzung des weissen Sonnenlichts aus verschiedener Farbe. Die Art der Auffindung dieses Factums durch NEWTON (im J. 1666) gilt noch heute für ein Muster inductiver Forschung und die von ihm gegebene Darstellung seiner Untersuchung für eins der lesenswerthesten Dokumente der älteren Physik S. Letter to Oldenburg dd. Cambridge Feb. 10, 1671 (abgedruckt in TAIT, Light Edinb. 1884, pag 78 ff.) und OPTICKS, London 1704 (3. ed. 1721). Book I, Prop. 1—7.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass der Brechungsexponent der Medien im allgemeinen desto grösser ist, je kleiner die Wellenlänge des betreffenden Lichts ist, dass er also im sichtbaren Theil des Spectrums von dem rothen Ende nach dem blauen hin stetig wächst. Doch giebt es eine Klasse von Körpern, welche eine Ausnahme von dieser Regel bilden, in welchen also entweder das ganze sichtbare Spectrum oder Theile desselben den umgekehrten Zusammenhang zwischen Brechungsexponent und Wellenlänge aufweisen. Man nennt diese Art von Dispersion darum anomale. Auch von dieser wird weiter unten noch näher die Rede sein.

Man glaubte früher, dass die Grösse des Brechungsexponenten stets Hand in Hand ginge mit der Dichte der Körper. Wenn sich nun auch dieser Zusammenhang nach den späteren Untersuchungen als ein keineswegs durchgängiger erwiesen hat, so findet er doch sehr oft Statt und man hat den einmal eingeführten Begriff der »optischen Dichte« zur Abkürzung der Ausdrucksweise beibehalten. Der Ausdruck, ein Medium sei optisch dichter als ein anderes, soll daher nichts weiter besagen, als, es habe einen grösseren Brechungsexponenten als jenes. —

Totalreflexion. Wir haben die Beziehung zwischen Brechungs- und Einfallswinkel durch die Gleichung ausgedrückt $n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r$. Wenn $n_a < n_b$, also $n_{ab} < 1$ ist, so bestimmt sich gemäss dieser Gleichung zu jedem Einfallswinkel i der Brechungswinkel r. Da der grösste Einfallswinkel $i_{max} = J = \pi/2$ ist, so ist der grösste Brechungswinkel unter diesen Umständen bestimmt durch die Gleichung $\sin (r_{max} = R) = n_a/n_b$. Allen einfallenden Strahlen entsprechen also gebrochene, die in einem Kegel von der Halböffnung $arc\,(\sin = n_a/n_b)$ enthalten sind. Betrachten wir umgekehrt den Uebergang des Lichts aus dem Medium b in das Medium a, oder, was dasselbe ist, nehmen wir an, es sei $n_a > n_b$,

also $n_{ab} > 1$, dann giebt es aus der Gleichung $n_a \cdot sin\ i = n_b \cdot sin\ r$ reelle Brechungswinkel r nur zu Einfallswinkeln i, deren sin kleiner ist als n_b/n_a oder kleiner als $1/n_{ab}$, entsprechend dem grössten möglichen Brechungswinkel $r = \frac{\pi}{2}$. Strahlen, welche unter einem grösseren Winkel i einfallen, als dem dieser Gleichung entsprechenden, können gar nicht mehr gebrochen werden, sondern — wenn auch genaue Untersuchungen gezeigt haben, dass auch hier das Licht zum Theil in das zweite Medium eindringt, so geschieht dies doch nur bis zu sehr geringer Tiefe, und auch dieser Theil des Lichts kehrt seine Bewegungsrichtung um und — alles eingefallene Licht wird in das erste Medium reflectirt. Man nennt diese Art von Reflexion daher Totalreflexion und den Einfallswinkel, von welchem an dieselbe beginnt, welcher also der Gleichung genügt, $sin\ J = n_b/n_a = 1/n_{ab} = n_{ba}$, den »kritischen Winkel« oder Winkel der Totalreflexion.

Beiläufig mag bemerkt werden, dass bei durchsichtigen Medien die relative Menge des reflectirten Lichts überhaupt mit dem Einfallswinkel wächst, so dass sie von dem, senkrechter Incidenz entsprechenden Minimum bis zur Totalreflexion stetig wächst.

Der Winkel der Totalreflexion hängt nur von den Brechungsexponenten der beiden an einander grenzenden Medien ab. Er ist daher auch im allgemeinen von der Wellenlänge, Farbe des betrachteten Lichts abhängig. Der Winkel der Totalreflexion in einem Medium, welches an das Vacuum grenzt, bestimmt in einfachster Weise dessen absoluten Brechungsexponenten $sin\ J = 1/n$.

Hilfssätze. Aus dem Reflexions- und Brechungsgesetze lassen sich einige Hilfssätze ableiten, welche uns in der Folge manchmal nützlich sein werden, und die wir daher hier voranstellen. In Bezug auf die Reflexionen folgt aus deren Gesetz: 1) dass der einfallende und der reflectirte Strahl gleiche Winkel auch mit jeder durch den Einfallspunkt gehenden zur Einfallsnormalen senkrechten Geraden bilden, und 2) dass die Projectionen des einfallenden und zurückgeworfenen Strahls auf irgend eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene ebenfalls das Reflexionsgesetz befolgen. Der Beweis dieser Sätze liegt auf der Hand. Wir wollen daher nur die entsprechenden für die Brechung geltenden Sätze beweisen, aus welchen sich die ersteren ja auch ergeben, wenn $n_a = -n_b$ oder $n = -n'$ gesetzt wird. Hier gilt:

1) Die Cosinus der Winkel, welche einfallender und gebrochener Strahl mit irgend einer durch den Fusspunkt der Einfallsnormalen zu dieser senkrechten, d. h. in der Tangentialebene der brechenden Fläche gelegenen Geraden bilden, stehen ebenfalls im umgekehrten Verhältniss der Brechungsexponenten.

2) In demselben Verhältniss stehen die Sinus der Winkel, welche jene Strahlen mit einer durch die Normale gelegten Ebene bilden.

3) Für die Projectionen des einfallenden nnd des gebrochenen Strahls auf eine durch die Normale gelegte Ebene gilt das Brechungsgesetz mit einem Brechungsindex, welcher von der Neigung der Strahlen gegen jene Ebene abhängt.

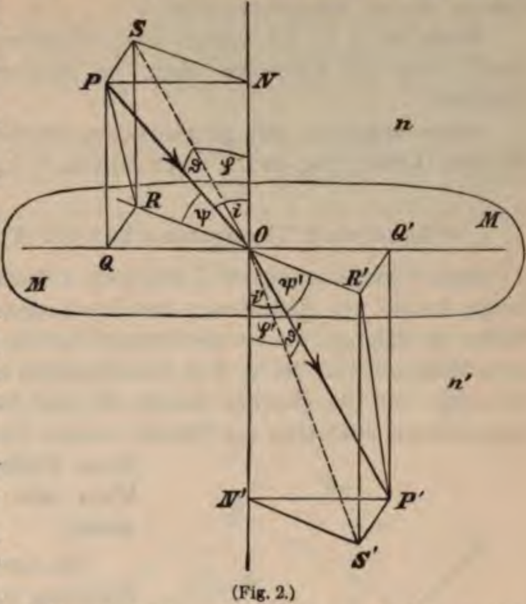
Sei, zum Beweise dessen, ON (Fig. 2) die Einfallsnormale, MM die brechende Ebene oder Tangentialebene der brechenden Fläche in O, PO der einfallende, OP' der gebrochene Strahl. Dann gilt

$$n \cdot sin(PON = i) = n' \cdot sin(P'ON' = i');$$

daher auch

$$n \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - i = POQ\right) = n' \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - i' = P'OQ'\right)$$

Mache ich die Länge von OP und OP' proportional zu resp. n und n', so ist hiernach, wenn Q und Q' die Fusspunkte der von P und P' auf die Ebene MM gefällten Lothe sind, $OQ = OQ'$. Ziehe ich nun durch O in der Ebene MM irgend eine andere Gerade, ROR' und fälle von P und P' Senkrechte auf sie, nach R und R', so sind die Verbindungslinien QR und $Q'R'$ auch senkrecht auf ROR'. Daher auch $OR = OR'$. Es ist aber $OR = OP \cdot \cos POR$; $OR' = OP' \cdot \cos P'OR'$, folglich in der That $\cos POR : \cos P'OR' = n' : n$ (1. Satz).



(Fig. 2.)

Denke ich mir nun durch ON und die (beliebige) Gerade RR' eine Ebene gelegt und von den, wie vorher bestimmten Punkten P und P' Senkrechte auf diese Ebene gefällt, nach S und S', so ist $PS = QR$ und $P'S' = Q'R'$, also auch $PS = P'S'$, da ja $QR = Q'R'$. Aber $PS = OP \cdot \sin POS$; $P'S' = OP \cdot \sin P'OS'$, folglich $\sin POS : \sin P'OS' = OP' : OP = n' : n$ (2. Satz).

Endlich ist $SO \cdot \sin SON = SN = S'O \sin S'ON' = S'N'$. Aber $SO = PO \cdot \cos POS$; $S'O = P'O \cos P'OS'$, folglich $n \cdot \sin SON \cdot \cos SOP = n' \cdot \sin S'ON' \cdot \cos S'OP'$ oder $\sin SON : \sin S'ON' = n' \cdot \cos S'OP' : n \cos SOP$ (3. Satz).

Bei der Bezeichnung der Figur gilt also, neben der Fundamentalgleichung, $n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$ oder $\sin i : \sin i' = n' : n$ noch $\cos\psi : \cos\psi' = n' : n$; $\sin\vartheta : \sin\vartheta' = n' : n$ und $\sin\varphi : \sin\varphi' = \frac{n'}{n}(\cos\vartheta' : \cos\vartheta) = n' \cos\vartheta' : n \cos\vartheta$.

Charakteristisch für die Natur der Brechung — im Gegensatze zur Reflexion — ist folgende Eigenschaft: Die durch Brechung bewirkte Ablenkung eines Strahls von der Einfallsrichtung wächst mit zunehmendem Einfallswinkel immer schneller — während sie bei der Reflexion diesem proportional ist (stets $= \pi - 2i$).

In der That folgt aus $n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$ zunächst $di/tg\, i = di'/tg\, i'$. Ist nun $n' > n$, so ist $i' < i$, daher auch $tg\, i' < tg\, i$ und, da im selben Verhältniss stehend, $di' < di$. Die Ablenkung γ ist aber $= i - i'$ Diese nimmt also, da $d(i - i') > 0$ ist mit i jedenfalls zu.

Des Näheren ist

$$\frac{di - di'}{di} = \frac{d\gamma}{di} = 1 - \frac{tg\, i'}{tg\, i}, \quad \text{also} \quad \frac{d^2\gamma}{di^2} = -\frac{d}{di}\left(\frac{tg\, i'}{tg\, i}\right).$$

Nun nimmt aber $tg\, i'/tg\, i$ mit i ab; denn

$$\frac{d}{di}\left(\frac{tg\, i'}{tg\, i}\right) = \frac{d}{di}\left(\frac{\sin i'}{\sin i}\,\frac{\cos i}{\cos i'}\right) = \frac{n}{n'}\,\frac{d}{di}\left(\frac{\cos i}{\cos i'}\right) = -\frac{n}{n'}\,\frac{\sin\gamma}{\cos^2 i'}$$

und γ ist, wie eben bewiesen, selbst > 0; also ist $\frac{d^2\gamma}{di^2} = +\frac{n}{n'}\frac{\sin\gamma}{\cos^2 i'}$ stets positiv, $\frac{d\gamma}{di}$

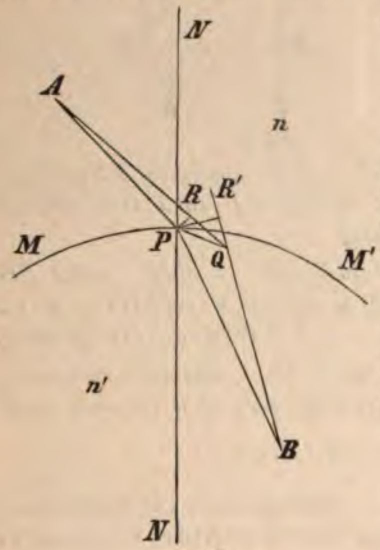
nimmt mit wachsendem i (oder i') zu, d. h. die durch Brechung bewirkte Ablenkung wächst immer schneller.

Wenn $n' < n$, so erfolgt die Ablenkung nach der anderen Seite des Strahls (von der Normalen weg); im übrigen bleiben alle Schlussfolgerungen dieselben.

Einen eleganten rein geometrischen Beweis dieses nützlichen Satzes hat TAIT gegeben (LIGHT, pag. 90), s. auch HEATH, l. c., pag. 23.

Allgemeine Theoreme über die Reflexion und Brechung.

Satz vom kürzesten Lichtweg. Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen von einem Punkte A nach einem Punkte B gelangt, so ist die Summe der Produkte aus Brechungsexponent je eines Mediums und der in ihm durchlaufenen Strecke, $\Sigma n l$, ein Grenzwerth, d. h. sie weicht von der gleichen Summe für alle dem thatsächlichen Wege unendlich benachbarten höchstens um Glieder zweiter Ordnung ab. Es ist also $\delta \Sigma n l = 0$. Jenes Produkt wird »Lichtweg«, »reducirter Weg« oder »optische Länge« des Strahls genannt.



(Fig. 3.)

Sei, um den Satz zunächst für eine einzelne Brechung (und damit auch Reflexion) zu beweisen, MM' in (Fig. 3) eine brechende Fläche; der Weg eines das Brechungsgesetz befolgenden Strahls führe von A nach B über P, so dass $n \cdot \sin APN = n' \cdot \sin BPN$ erfüllt ist. Sei Q ein dem Punkte P unendlich benachbarter Punkt der Fläche MM' (ausserhalb der Einfallsebene), so ist zu beweisen, dass $n \cdot AP + n' PB$ bis auf Grössen der zweiten oder höherer Ordnung $= n AQ + n' QB$ ist.

In der That ist mit eben dieser Annäherung, wenn ich mir mit AP um A und mit BP um B Bögen geschlagen denke, welche resp. AQ in R und BQ in R' treffen

$$AQ = AR + RQ = AP + PQ \cdot \sin RPQ = AP - PQ \cos APQ,$$

ebenso $$BQ = BP + PQ \cos BPQ,$$

also $$n AQ + n' BQ = n AP + n' BP - PQ\,(n \cos APQ - n' \cos BPQ).$$

Wir haben aber pag. 13 bewiesen, dass die in der Klammer stehende Grösse unter den gemachten Annahmen $= 0$ ist (1. Satz); folglich sind in der That die Lichtwege von A nach B über P und Q bis auf Grössen zweiter Ordnung einander gleich: $\delta(n AP + n' PB) = 0$.

Nach dem Princip der Superposition von Variationen können wir von der Gleichung $\delta \Sigma n l = 0$ für eine einzelne Reflexion und Brechung sofort Anwendung machen auf den Fall beliebig vieler. Bei stetiger Aenderung des Brechungsexponenten folgt ebenso $\delta \int n\,dl = 0$.

(Der zweite und die höheren Differentiale können grösser oder kleiner als Null oder auch gleich Null sein. Die gewöhnliche Fassung des Satzes, dass jene

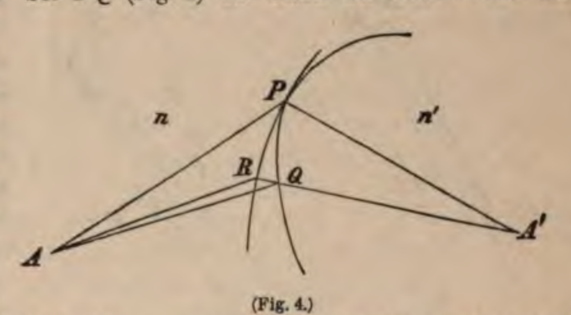
[1]) Unter Anwendung der Elemente der Flächentheorie ist dieser Beweis natürlich mathematisch strenger zu führen.

Summe ein Minimum sei, ist daher nicht correkt, sondern nur historisch überkommen.)

Für ebene Trennungsflächen ist der optische Weg immer ein Minimum, wie für die Reflexion schon HERO v. Alexandrien, für die Brechung FERMAT zuerst bewiesen hat[1]), wir wollen uns daher der Kürze wegen für den allgemeinen Fall desselben Ausdrucks bedienen.

Wichtig ist, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, nämlich, dass sich der Bedingung $\delta\Sigma nl = 0$ für den Weg eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten bei gegebenen reflectirenden und brechenden Flächen nur durch das Reflexions- und Brechungsgesetz genügen lässt. Wegen des Beweises sei auf HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., Leipzig 1867, pag. 239, und Wissensch. Abh., Leipzig 1883, Bd. 2, pag. 147, verwiesen.

Ob in einem speciellen Falle der Weg ein Minimum oder Maximum oder was sonst ist, davon kann man sich, wenn die Gestalt der Grenzfläche gegeben ist, folgendermaassen überzeugen. Sei PQ (Fig. 4) ein Stück der Grenzfläche und PA' der nach dem Brechungsgesetz zu AP gehörige Strahl. Um zu erfahren, ob APA' ein kürzester oder ein längster Weg zwischen A und A' sei, denke ich mir die Fläche $n \cdot AP + n'PA' = const$ construirt, die sogen. aplanatische Fläche (s. u.); PR sei ein Stück derselben. Diese Fläche muss die brechende in P jedenfalls berühren, weil dort für beide $\delta(nAP + n' \cdot PA') = 0$ ist. Ist nun die brechende Fläche in P nach dem dünneren Medium (n) zu stärker convex als die aplanatische, so ist für jene der Weg APA' ein Maximum, anderenfalls ein Minimum.



(Fig. 4.)

In der That, sei Q ein P unendlich benachbarter Punkt der brechenden Fläche, so ist der Lichtweg von A nach A' über Q, $[Q] = n \cdot AQ + n'QA'$. Der über R durch die aplanatische Fläche, $[R] = nAR + n'RQ + n'QA'$, wenn R der Schnittpunkt von $A'Q$ mit der aplanatischen Fläche ist. Also ist

$$[Q] - [R] = n(AQ - AR) - n'RQ.$$

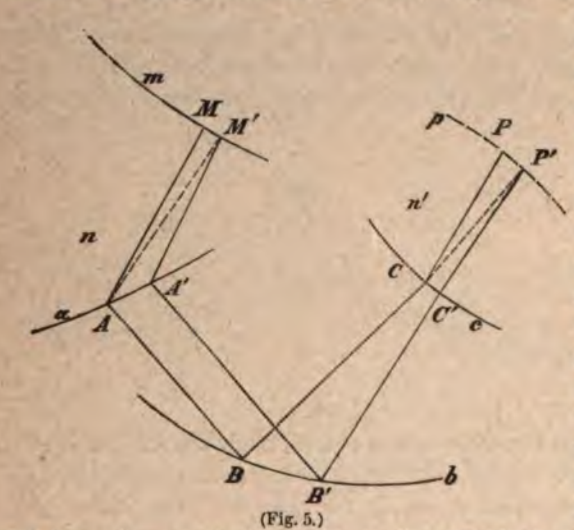
Nun ist $AQ - AR < RQ$ als Seiten eines Dreiecks, daher, wenn $n < n'$, a fortiori $n(AQ - AR) < n'RQ$, also der Weg über Q kleiner, als der über R. Letzterer ist aber gleich dem über P, folglich ist unter diesen Umständen der Weg über P ein Maximum. In ganz analoger Weise lässt sich erkennen, dass wenn die brechende Fläche nach dem optisch dünneren Medium weniger convex ist, also die aplanatische, der Lichtweg über P ein Minimum ist.

Princip der schnellsten Ankunft. Nach den Experimenten von FOUCAULT und in Uebereinstimmung mit der Undulationstheorie des Lichts stehen die Brechungsexponenten zweier Medien im umgekehrten Verhältniss der Geschwindigkeiten der Lichtbewegung in ihnen, also $n/n' = v'/v$, oder allgemein $n = k/v$; $n' = k/v'$; $n'' = k/v''$ etc. Unter Benützung dieser Beziehung geht die Gleichung $\delta\Sigma nl = 0$ über in $\delta\Sigma(l/v) = 0$. Da aber die Geschwindigkeit $v = l/t$ ist, wenn t die zur Durchlaufung der Strecke l vom Licht gebrauchte Zeit bedeutet, so wird schliesslich $\delta\Sigma t = 0$, d. h. die Zeit, welche das Licht gebraucht, um von

[1]) HUYGHENS, Traité de la Lumière. Leyden 1690, pag. 39.

einem Punkte A unter beliebig vielen Reflexionen und Brechungen nach einem anderen Punkte B zu gelangen, ist für den Weg, welchen der Strahl gemäss dem Reflexions- und Brechungsgesetz einschlägt, um unendlich kleine Grössen der zweiten oder höheren Ordnung verschieden von der für die diesem unendlich benachbarten Wege.

Unter Benützung dieses Satzes lässt sich der folgende wichtige Satz von MALUS[1]) beweisen. Derselbe lautet: Ein System von Strahlen, welches ein Mal senkrecht zu einer Fläche ist, bleibt dies auch nach beliebig vielen Reflexionen und Brechungen. Da die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen senkrecht stehen auf jeder Kugel um diesen Punkt als Mittelpunkt, so würde für solche der MALUS'sche Satz besonders gelten. Nach der Wellentheorie drückt derselbe etwas Selbstverständliches aus, da gemäss dieser die Strahlen nichts anderes sind, als die Normalen zur Wellenfläche. Vom Standpunkte der geometrischen Optik lässt sich der Satz folgendermaassen beweisen (nach RAYLEIGH)[2]). Seien $MABCP$, $M'A'B'C'P'$ . . . (Fig. 5). Strahlen, welche auf der Fläche m bezüglich in M, M' normal stehen und in ihrem weiteren Verlauf an den Flächen a, b, c, bezüglich in $A, A' \ldots B, B' \ldots$, C, C', . . Reflexionen oder Brechungen erfahren haben.



(Fig. 5.)

Ich kann dann nach irgend einer dieser Reflexionen oder Brechungen, z. B. nach der an Fläche c stattgehabten, auf den betreffenden Strahlen jedenfalls Punkte $P, P' \ldots$ so bestimmen, dass die Summe der reducirten Wege von M bis P, M' bis P' etc. die gleiche wird. Die durch die Punkte $P, P' \ldots$ gehende Fläche ist dann die gesuchte Orthogonalfläche der Strahlen. Verbinde ich zum Beweise dessen M' mit A und C mit P', so ist bei genügender Nähe von M an M' $[M'ABCP']$ nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als MM' verschieden von $[M'A'B'C'P']$. Laut Annahme ist aber $[M'A'B'C'P'] = [MABCP]$; daher, nach Subtraction der gemeinsamen Wegstrecken, wenn der erste Brechungsexponent mit n, der letzte mit n' bezeichnet wird, im Grenzfalle $n \cdot MA + n' \cdot CP = n \cdot M'A + n' CP'$. Nach der Voraussetzung, dass die Strahlen ursprünglich auf m senkrecht stehen, ist aber $lim \cdot M'A = MA$ bis auf unendlich Kleine von wenigstens zweiter Ordnung; folglich auch ebenso nahe $lim \cdot CP' = CP$, d. h. CP steht auf p in P senkrecht, und ebenso die anderen Strahlen $C'P'$ etc.

Analytische Beweise des MALUS'schen Theorems s. ausser in der Originalabhandlung bei HELMHOLTZ, l. supra cit. und HEATH, l. c., pag. 102.

Optische Länge zwischen conjugirten Brennpunkten. Aus dem FERMAT'schen in Verbindung mit dem MALUS'schen Satze können wir einen wichtigen Schluss ziehen; nämlich: wenn durch irgend welche Reflexionen und

[1]) Journ. de l'Ec. Polyt. 14, pag. 1 u. 84 1808.

[2]) Encyclop. Brit. 9. ed. Art. Optics, pag. 798.

Brechungen alle in einem gegebenen Winkelraum enthaltenen von einem Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einen Punkt (homocentrisch) vereinigt werden, so ist für sie die optische Länge vom Ausgangs- bis zum Vereinigungspunkt die gleiche. Denn in der That, weil dann von Strahl zu Strahl $\delta \Sigma nl = 0$ ist, so ist $\Sigma nl = const$ innerhalb des betreffenden Winkelraums. Strahlen (Elementarwellen), welche von einem Punkte (Flächenelement) mit gleicher Phase ausgehen, kommen also bei homocentrischer Vereinigung im neuen Brennpunkt auch wieder mit gleicher Phase an. (Phasenverzögerungen, welche etwa bei der Reflexion oder Brechung eintreten, treffen alle Strahlen gleichmässig, wofern dieselben nicht etwa von dem Einfallswinkel abhängen — was, so viel bekannt, nicht der Fall ist — beeinträchtigen also die Giltigkeit dieses Satzes nicht.) In solchen Vereinigungspunkten müssen sich die Strahlen also auch gemäss der Undulationstheorie verstärken, und es kommt daselbst zur Erzeugung eines sich in dem betreffenden Winkelraum selbst wie ein leuchtender Punkt verhaltenden Oscillationscentrums. Hierauf beruht die Möglichkeit einer Abbildung durch optische Mittel.

Aplanatische Flächen. Die Aufgabe, eine Fläche so zu bestimmen, dass die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen sämmtlich wieder in einen Punkt gebrochen (oder reflectirt) werden, ist nach dem Voranstehenden mathematisch einfach so formulirbar, dass $nl + n'l'$ für alle Punkte der gesuchten Fläche denselben Werth haben solle, wenn l vom leuchtenden, l' vom Vereinigungspunkt aus gemessen wird. Die Lösung dieser Aufgabe bietet keine besonderen Schwierigkeiten und ist an mehreren Stellen zu finden[1]. Da sie andererseits auch kein besonderes physikalisches oder praktisches Interesse besitzt, so begnügen wir uns mit der Anführung einiger Resultate und weisen nur darauf hin, dass in diesen Fällen für den reducirten Weg des Lichtes zwischen den beiden Punkten wie überhaupt stets bei homocentrischer Strahlenvereinigung auch der zweite und alle höheren Differentialquotienten des Ausdruckes Σnl ebenfalls verschwinden.

Im Falle einer Reflexion ist $l + l' = const$ bekanntlich die Bipolar-Gleichung eines Rotationsellipsoids, dessen Brennpunkte der leuchtende und der Vereinigungspunkt sind, wie auch aus der bekannten Eigenschaft eines solchen Ellipsoids geschlossen werden kann, dass die Radii vectores gegen die Normale des betreffenden Flächenpunktes gleich geneigt sind, also dem Reflexionsgesetz genügen. Rückt der eine Punkt ins Unendliche, so wird die Fläche ein Rotationsparaboloid mit dem anderen Punkt als Brennpunkt und einer zu der Strahlenrichtung parallelen Axe.

Im Falle einer Brechung führt die Gleichung $nl + n'l' = const$ auf die sogen. Cartesischen Ovale. In dem Specialfall, dass wieder der eine, z. B. der leuchtende Punkt im Unendlichen liegt, ist es eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren einer Brennpunkt auch der der Strahlen ist. Für eine besondere andere, später anzugebende Lage der beiden Punkte zur Fläche ist dieselbe eine Kugel.

Ganz ähnlich sind die Ergebnisse, wenn man die Wiedervereinigung der Strahlen statt durch eine einzige Fläche, durch mehrere solche bewirken will.

Von den aplanatischen Flächen kann man theoretisch Gebrauch machen, um für eine gegebene Lage zweier Punkte und gegebene Gestalt einer, zwei Medien trennenden Fläche diejenigen Stellen der letzteren zu bestimmen, über

[1] S. z B. MEISEL, Geometrische Optik. Halle 1886, pag. 148.

welche durch Reflexion oder Brechung ein Strahl von dem einen Punkte nach dem anderen gelangen kann. Je nachdem die beiden Punkte in demselben oder in verschiedenen Medien (auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Fläche) liegen, construirt man um sie die Schaar der Flächen $l + l' = const$ oder $nl + nl' = const$. Jede Stelle der Trennungsfläche, welche von einer dieser aplanatischen Flächen berührt wird, hat die gesuchte Eigenschaft, weil für sie eben $\delta \Sigma nl = 0$ ist.

Wir werden den Begriff des »Aplanatismus« übrigens später noch strenger zu fassen haben, wenn wir seine specielle Bedeutung in der Theorie der optischen Instrumente behandeln.

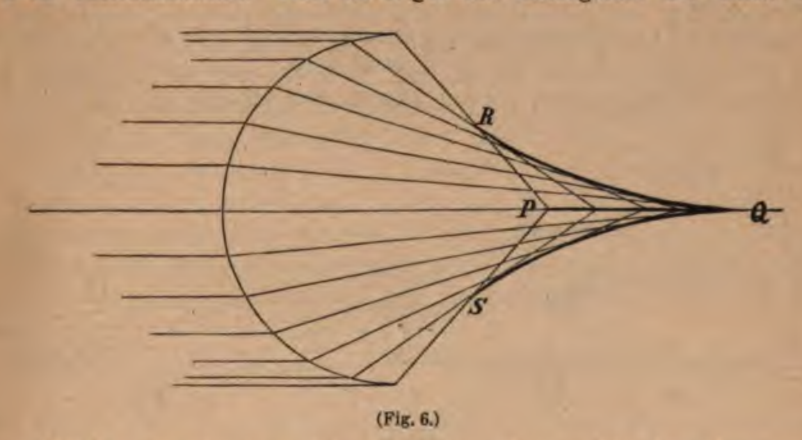
Das Problem der aplanatischen Flächen ist im Uebrigen, wie schon bemerkt, von sehr geringem und mehr negativem praktischen Interesse; letzteres insofern, als die Untersuchung zeigt, dass die Kugel im Allgemeinen keine aplanatische Fläche ist; ersteres weil weder die Natur uns die anderen Arten aplanatischer Flächen darbietet, noch künstlich solche exact genug hergestellt werden können, ausser mit sehr bedeutender Mühe und nur in Fällen, wo die Abweichung der aplanatischen Fläche von der Kugel äusserst gering ist, wie bei den astronomischen Reflectoren oder irrelevant, wie bei den sogen. Scheinwerfern. Wir sind praktisch auf die Anwendung sphärischer Flächen angewiesen und haben es bei Naturprodukten (z. B. den Augen) meist mit Rotationsflächen von schwer genau angebbarer Art zu thun. Bei der Reflexion und Brechung an diesen werden die von einem Punkte ausgehenden Strahlen im Allgemeinen und streng nicht wieder in einen Punkt (homocentrisch) vereinigt.

Allgemeines optisches Strahlenbüschel; Caustiken (Brennflächen). Da als optisches Strahlenbüschel, wie in der Einleitung hervorgehoben, nur ein solches angesehen werden kann, welches in letzter Instanz auf einen selbstleuchtenden Punkt (Oscillationscentrum) zurückgeführt werden kann, so hat ein solches gemäss dem Satz von MALUS auch stets ein System von Orthogonalflächen, eben die Wellenflächen, in welchen gleiche Phase der Oscillation herrscht. »Jedem optischen Büschel, wie auch immer es entstanden sei, werden daher die Eigenschaften zukommen, welche die Normalen stetig gekrümmter Flächen besitzen. Die Theorie der letzteren lehrt aber, dass, wenn wir uns durch einen beliebigen Strahl a eine Ebene gelegt denken, welche die Fläche in einer Curve schneidet und diese Ebene um den Strahl drehen, die Curve im Allgemeinen im Schnittpunkte mit a verschiedene Krümmung besitzt und dass die Ebene der grössten Krümmung der Schnittcurve senkrecht steht auf der Ebene ihrer kleinsten Krümmung. Von den dem Strahl a unendlich nahen Normalen der Wellenfläche — welche also benachbarte Strahlen sind — schneiden daher diejenigen, deren Fusspunkte in der Linie grösster oder kleinster Krümmung liegen, den Strahl a in dem Mittelpunkte bezüglich des grössten oder kleinsten Krümmungskreises; die anderen dagegen schneiden den Strahl a gar nicht. Auf jedem Strahle giebt es also im Allgemeinen zwei Brennpunkte, in denen er von benachbarten Strahlen geschnitten wird, welche Punkte den Mittelpunkten der grössten und kleinsten Krümmung im Fusspunkte des Strahles der Wellenfläche entsprechen. Nur wenn die Krümmung der Wellenfläche in dem Fusspunkte des Strahles nach allen Richtungen gleich gross ist, wird der Strahl von allen, ihm unendlich benachbarten in einem Punkte geschnitten« (HELMHOLTZ).

Die Strahlen, deren Fusspunkte in einer Krümmungslinie der Wellenfläche liegen, schneiden einander bei endlicher Ausdehnung jener Linie successive in verschiedenen Punkten. Sie sind daher die Einhüllenden einer Curve, die aus

lauter Brennpunkten unendlich benachbarter Strahlen gebildet ist. Dieselbe heisst daher Brenncurve oder Caustik. Die aufeinander folgenden Krümmungslinien einer Wellenfläche geben ebenso viele Brennlinien, welche insgesammt eine Fläche, die Brennfläche des Strahlensystems, bilden. Da es zwei Schaaren von Krümmungslinien giebt, so giebt es im Allgemeinen zu jeder Orthogonalfläche auch zwei Brennflächen, und jeder Strahl ist gemeinsame Tangente beider Flächen.

Besonders einfach ist der Fall, wo die Wellenfläche eine Rotationsfläche ist. Die eine Schaar von Krümmungslinien sind dann die Meridiancurven der Fläche und die ihnen entsprechende Caustik ist eine Fläche, welche durch Rotation der Evolute der Meridiancurve um die Symmetrieaxe entsteht. Die andere Schaar von Krümmungslinien entspricht den Breitenkreisen der Erdkugel, d. h. es sind parallele Kreise, deren Mittelpunkte auf der Symmetrieaxe liegen. Die zu ihnen gehörigen Normalen bilden je einen geraden Kreiskegel und schneiden die Axe je in einem Punkt. Die zweite Brennfläche ist daher reducirt auf ein Stück der Axe. Den Charakter einer solchen Brennfläche veranschaulicht Fig. 6 im Meridianschnitt. Hier ist RQS die Erzeugende der einen Brenn-



(Fig. 6.)

fläche; PQ die Gerade, in welche die andere Brennfläche hier degenerirt ist. (Die Figur stellt den Fall der Brechung eines parallelstrahligen Büschels an einer Kugel von höherem Index dar.)

Mit der Aufgabe, die Gestalt der Caustiken in besonderen Fällen zu bestimmen, wollen wir uns hier abermals nicht weiter beschäftigen, da sich auch an diese mehr ein mathematisches, als ein physikalisches oder praktisches Interesse knüpft[1]).

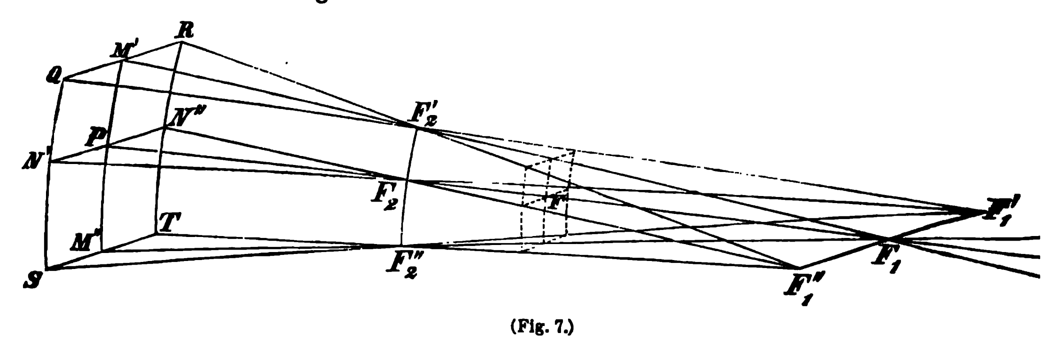
Bemerkt werden muss, dass Untersuchungen über die Intensität in den Punkten einer Caustik und namentlich über die Intensitätsvertheilung in Schnittebenen mit solchen, auf dem Boden der geometrischen Optik allein angestellt[2]),

[1]) Man findet die Literatur über Caustiken ziemlich vollständig sammt der über »Strahlenbüschel« in VERDET, die Wellentheorie des Lichtes, übersetzt von EXNER. Braunschweig 1881, Bd. 1, pag. 7 u. 8. Wir fügen zu dieser nur die Angabe einiger besonders werthvoller Abhandlungen, nämlich CAYLEY, Phil. Trans. 1857 u. 1867, und PASCH, CRELLE's Journ. 1872, Ausserdem kommen für diese Probleme die Lehrbücher der geometrischen Optik in Betracht. namentlich die von CODDINGTON, LOYD, MEISEL und HEATH. S. auch SCHELLBACH, Zeitschr. f. Physik u. Chem. Unt. 1887. Vortreffliche Zeichnungen in dessen in ENGEL's »Darstellende Optik«, Halle 1878, in welchen aber stets nur auf den Meridianschnitt Rücksicht genommen ist.

[2]) S. z. B. S. FINSTERWALDER, Ueber Brennflächen und die räumliche Vertheilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Inaug.-Diss. Tübingen 1886.

einen sehr beschränkten Werth haben und meist ganz illusorisch sind. Denn die Brennpunkte, welche die Caustik formiren, sind solche von unendlich dünnen Büscheln, würden also für sich allein (wegen des weitgehenden Diffractionseffects so schmaler Wellenzüge) fast gar nicht mehr den Regeln der geometrischen Optik folgen. In benachbarten Brennpunkten kommt aber das Licht mit stetig verschiedener Phase an und die Helligkeit sowohl in den Punkten der Caustik selbst, als in denen einer Schnittebene von den Phasen der sie treffenden Elementarwellen in hohem Grade abhängt. Wenn daher auch die nach den Reflexions- und Brechungsgesetzen berechnete Caustik im Grossen und Ganzen die Stellen hervorstechender Lichtconcentration richtig angiebt, in so fern sie eben aus wirklichen Brennpunkten gebildet ist, so kann doch näheres über die Lichtvertheilung eines optischen Büschels nur mit Hülfe der Undulationstheorie, nämlich des Intereferenzprincips ermittelt werden. Eine auf dieser Grundlage stehende Untersuchung, wie sie z. B. AIRY[1]) mit specieller Rücksicht auf den Regenbogen geführt hat, giebt auch Rechenschaft von den in der Nähe jeder Caustik beobachtbaren, lichtschwächeren Wiederholungen derselben (den überzähligen Bögen), für welche die geometrische Optik gar keine Erklärung zu liefern vermag.

Allgemeine Constitution eines unendlich dünnen, optischen Strahlenbüschels. Es ist schon oben bemerkt, dass ein beliebiger Strahl des Büschels im Allgemeinen nur von den in zwei bestimmten Ebenen ihm un-



(Fig. 7.)

endlich benachbarten Strahlen geschnitten wird, nämlich von den in der Ebene der grössten und der kleinsten Krümmung seiner Orthogonalflächen gelegenen, also von denjenigen, deren Fusspunkte die Elemente jener Krümmungs-Kreise selbst bilden. Suchen wir eine nähere Vorstellung von der Lagenbeziehung der Strahlen, welche ein unendlich dünnes Büschel bilden, zu gewinnen. Denken wir uns zu diesem Zwecke durch einen Punkt P der Wellenfläche die Bögen grösster und kleinster Krümmung gelegt, $M'M''$ und $N'N''$, welche auf einander in P senkrecht stehen. Die Mittelpunkte dieser Bögen, also die Brennpunkte des durch P gehenden Strahles seien F_1 und F_2; wir wollen sie kurz ersten und zweiten Brennpunkt nennen. Den durch P gehenden Strahl bezeichnen wir als »Hauptstrahl« des ganzen Büschels; derselbe ist zugleich Hauptstrahl der ebenen Partial-Büschel $M'F_1M''$ und $N'F_2N''$. Die Bögen der grössten und kleinsten Krümmung in einem, P benachbarten Punkt, z. B. M', stehen ebenfalls auf einander senkrecht. Es wird aber auch wegen der Kleinheit des betrachteten Elements der Wellenfläche, also des Bogens $M'P$, bis auf unendlich kleine Abweichungen der Bogen $N'N''$, parallel sein dem entsprechenden Bogen der zweiten Hauptkrümmung in M', QR und der durch M' gehende Bogen der ersten Hauptkrümmung

[1]) Cambr. Soc. 6, pag. 379. 1838.

coincidiren mit $M'M''$. Der Brennpunkt des ebenen Büschels $QM'R$ wird nun jedenfalls auf dem Hauptstrahl desselben liegen, d. i. auf dem durch M' gehenden Strahl. Dieser geht aber als Strahl des Büschels $M'M'$ durch F_1. Folglich verläuft das jetzt betrachtete ebene Büschel gänzlich in der Ebene QRF_1, und ebenso die durch andere zu $M'M''$ senkrechte Bögen gehenden Strahlen in den durch F_1 und diese Bögen gelegten Ebenen. Wo auch ihre Brennpunkte F_2', F_2'' etc. liegen mögen, so müssen alle diese Strahlenebenen, weil auf $F_1M'M''$ senkrecht und durch F_1 gehend, sich in einer durch F_1 gehenden auf der Ebene $M'M''$ und daher auf dem Hauptstrahl PF_1 senkrechten Linie $F_1'F_2''$ schneiden. Wir nennen dieselbe die erste Brennlinie.

Genau dieselbe Betrachtung ist auf die zu $M'M''$ parallelen Bögen der ersten Hauptkrümmung QS, RT, etc. anwendbar. Die Hauptstrahlen dieser ebenen Partialbüschel gehen, als Strahlen des Partialbüschels $N'PN''$, sämmtlich durch den Brennpunkt dieses F_2. Alle diese ebenen Partialbüschel stehen ausserdem auf der Ebene der zweiten Hauptkrümmung $F_2N'N''$ senkrecht; sie schneiden sich also in einer auf $F_2N'N''$ und damit auf dem Hauptstrahl PF_2 senkrechten Linie $F_2'F_2''$, welche wir zweite Brennlinie nennen wollen. Halten wir diese beiden Systeme ebener Partialbüschel zusammen, so ist klar, dass letztere Brennlinie nichts anderes repräsentirt, als die Brennpunkte der zuerst betrachteten ebenen Partialbüschel, und ebenso $F_1'F_1''$ die der jetzt betrachteten.

Wir haben also das Resultat: Die Gesammtheit der Strahlen eines unendlich dünnen, optischen Büschels schneidet sich in zwei geraden Linien, den Brennlinien, welche in den beiden Brennpunkten des Hauptstrahles bezüglich auf diesem senkrecht stehen und in zu einander senkrechten Ebenen (den Hauptkrümmungsebenen der betreffenden Wellenfläche) liegen. In der durch den ersten Brennpunkt gehenden Brennlinie liegen die Brennpunkte der zur ersten Hauptkrümmungsebene senkrechten ebenen Partialbüschel, d. h. derjenigen zweiter Art und umgekehrt (STURM'scher Satz)[1]).

Man sieht, dass aus den beiden Brennlinien und dem Hauptstrahl das ganze Büschel construirbar ist. Man hat nur jeden Punkt der einen Brennlinie mit jedem der anderen zu verbinden und hierbei stets unendlich nahe dem Hauptstrahl zu bleiben.

Die Constitution des Büschels ist aber auch bestimmt aus vier von seinen Strahlen, von denen nicht mehr als zwei durch je einen Punkt einer Brennlinie gehen.

Ebenen senkrecht zum Hauptstrahl schneiden das Büschel in Figuren von verschiedener Gestalt, je nach dem Ort des Schnitts und je nach der Begrenzung des Büschels auf der brechenden Fläche bezw. der Wellenfläche. An einer leicht anzugebenden Stelle F zwischen den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 ist der Schnitt des Büschels etc. ähnlich seiner anfänglichen Begrenzung (Stelle der geringsten Confusion genannt).

Für die Herleitung des Vorstehenden war wesentlich die Annahme, dass die gleichnamigen Hauptkrümmungsebenen in benachbarten Punkten eines unendlich kleinen Flächenelements einander merklich parallel seien. Dies findet aber nicht streng, sondern im Allgemeinen nur bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung statt. Daher gelten die abgeleiteten Beziehungen auch nur mit derselben Annäherung.

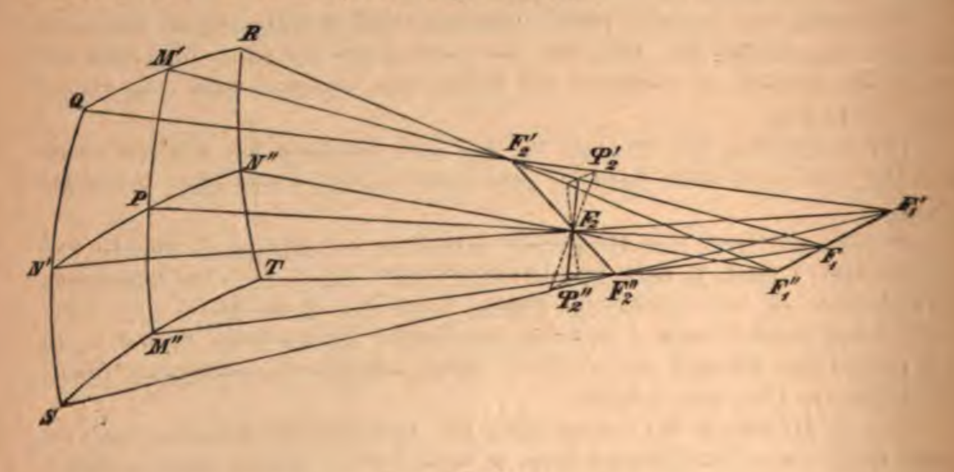
---

[1]) Journ. de Liouville 3, pag. 357. 1838; übers. in POGG. Ann. 65, pag. 116, 374 1845. Compt. rend. 20, pag. 554, 761, 1238. 1845.

Genau genommen[1]) kann man jeder Wellenfläche eine andere Fläche näher anschmiegen, als, wie vorhin implicite angenommen, den Scheitel eines elliptischen Paraboloids und sind dann deren Hauptkrümmungen der Betrachtung zu Grunde zu legen. Die ebenen Partialbüschel, z. B. der ersten Hauptkrümmungen, schneiden dann die zum Hauptstrahl gehörige Ebene der zweiten successive in verschiedenen Linien, welche in jener Ebene mit dem Hauptstrahl alle beliebigen Winkel einschliessen können, und desgleichen im Allgemeinen die Partialbüschel der zweiten Hauptkrümmung die Ebene der ersten Krümmung. Mit Berücksichtigung der Grössen der zweiten Ordnung gehen durch die beiden Brennpunkte des Hauptstrahls also keine Brennlinien, sondern Brennflächenstücke. Im Besonderen kann dann auch der Fall eintreten, dass diese Brennflächenstücke in Linien degeneriren, welche aber oft gegen den Hauptstrahl merklich anders als senkrecht geneigt sind, wofür gerade die Brechung eines homocentrischen Büschels an einer Rotationsfläche ein Beispiel giebt. Und wenn in Folge der vorliegenden geometrischen Verhältnisse ein Büschel von endlicher Dicke im wesentlichen dieselbe Constitution hat, wie ein solches unendlich dünnes, — was sehr wohl der Fall sein kann — so werden die Abweichungen von dem vorhin statuirten auch der Beobachtung zugänglich werden können. Aber diese Ueberlegung kann den STURM'schen Satz als solchen natürlich nicht aufheben, da dieser Giltigkeit ja nur innerhalb der angezeigten Genauigkeitsgrenzen beansprucht.

Im Allgemeinen ist ja die Strahlenvereinigung in den Brennpunkten bezw. Brennlinie selbst nur eine solche von erster Ordnung. Es können daher der Natur der Sache nach Sätze, welche sich auf die allgemeinen Eigenschaften optischer Strahlenbündel beziehen, keine Beziehung auf die Grössen der zweiten Ordnung enthalten und umgekehrt Sätze, welche auf diese Grössen Rücksicht nehmen, nicht ebenso allgemein sein, wie der STURM'sche Satz.

Dies hat neuerdings MATTHIESSEN unter Berufung auf eine bezügliche Abhandlung von WEINGARTEN[2]) auch zugestanden[3]).



(Fig. 8.)

[1]) MATTHIESSEN, Münch. Sitzber. Bd. 13, pag. 44. 1883. Acta mathem. IV, 2, pag. 185. 1884, und SCHLÖMILCH's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888.

[2]) CRELLE's Journ. 98, pag. 281. 1885.

[3]) Berlin-Eversbusch, Zeitschr. f. vergl. Augenheilk. 6, pag. 106. 1889. S. auch CZAPSKI, Zur Frage nach der Richtung der Brennlinien in dünnen optischen Büscheln. WIED. Ann. 42, pag. 332. 1891.

Dass auch in den Fällen, wo strenggenommen, bis auf Abweichungen von höherer als der 2. Ordnung spitzwinklig gegen den Hauptstrahl geneigte Brennlinien vorhanden sind, eine durch einen der Brennpunkte senkrecht zum Hauptstrahl gelegte Ebene mit dem Büschel nirgend einen Querschnitt von weniger als der zweiten Ordnung (im Vergleich mit der Breite des betrachteten Wellenflächenstücks) hat, also der STURM'sche Satz richtig bleibt, zeigt eine einfache Ueberlegung (Fig. 8). Ein z. B. durch F_2 gelegter senkrechter Querschnitt hat bei den in der Figur angenommenen besonders ungünstigen Verhältnissen seinen grössten Querschnitt im Durchschnitt mit den äussersten ebenen Partialbüscheln QRF_2' und STF_2'' (bei rundlicher Begrenzung des Elements der Wellenfläche, an einer zwischen F_2 und Φ_2' gelegenen Stelle). Dieser Querschnitt q ist aber, wenn wir $F_2\Phi_2' = dr$, d. i. gleich der Differenz der zweiten Hauptkrümmungsradien in M' und P und die mittlere Länge eines Hauptkrümmungsbogens zweiter Art wie $N'N'' = ds$ setzen $q = ds \cdot dr/r$ — also im Allgemeinen unendlich klein gegen ds.

Das hier betrachtete unendlich dünne Strahlenbündel ist eine specielle Art des allgemeinen geradlinigen Strahlenbüschels, welches nicht mehr die Eigenschaft hat, ein System von Orthogonalflächen zu besitzen. Ein solches wird in der Natur z. B. durch die irregulär in doppeltbrechenden Medien gebrochenen Strahlen repräsentirt. Die Eigenschaften dieses allgemeinen Büschels, deren Studium natürlich auch auf die des speciellen ein Licht wirft, insofern es zeigt, welche von den Eigenschaften dieses letzteren in seiner blossen Geradlinigkeit, welche auf den besonderen Annahmen beruhen, hat besonders HAMILTON[2]) studirt; nach ihm KUMMER[3]), MÖBIUS[4]), MEIBAUER[5]) u. A. (s. die Literaturangaben in VERDET, l. c.).

Nach den voranstehenden Festsetzungen kann als die Aufgabe der Dioptrik unendlich dünner Büschel, allgemein gefasst, die ausgesprochen werden: wenn die Brechungsexponenten zweier Medien n und n', die Gestalt der sie trennenden Fläche $f(x, y, z) = 0$, die Richtung eines einfallenden Strahls und die Orte der Brennpunkte und Lagen der Brennlinien auf ihm gegeben ist, letztere drei Bestimmungsstücke auch für den gebrochenen bezw. reflectirten Strahl zu finden. C. NEUMANN[6]) hat eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe mitgetheilt unter der Annahme der Giltigkeit des STURM'schen Satzes; MATTHIESSEN[7]) ohne die letztere. Hier sei auf diese Darstellungen nur hingewiesen, die Aufgabe selbst werden wir später in einer Anzahl besonderer Fälle behandeln.

Literatur.

Als die beste neuere Gesammtdarstellung der geometrischen Optik (der speciellen Katoptrik und Dioptrik und allgemeinen Theorie der optischen Instrumente) muss das Buch von R. S. HEATH bezeichnet werden: A Treatise on Geometrical Optics. Cambridge 1887. Elementary Treatise, ibid. 1888. Doch ist der Standpunkt des Verfassers mehr der des Mathematikers; so dass gegenüber der vorliegenden Darstellung vieles ausführlicher behandelt ist, vieles aber wiederum weit kürzer oder auch gar nicht. Eine Uebersetzung dieses Werks ins Deutsche ist vorbereitet.

---

[1]) Trans. Irish Acad. 15, pag. 69. 1828; 16, pag. 1, 94. 1830/31; 17, pag. 87. 1837. Auch POGG. Ann. 28, pag. 633. 1833; 29, pag. 324. 1834.

[2]) CRELLE's Journ. 57, pag. 189. 1859; Berl. Monatsber. 1860, pag. 469; Abh. Berl. Akad. 1866.

[3]) Sitzb. Sächs. Akad. 14, pag. 1. 1862.

[4]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 8, pag. 369. 1863. Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts. Berlin 1864.

[5]) Sitzber. Sächs. Akad. 1880, pag. 42.

[6]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888.

Unter den zahlreichen sonstigen Gesammtdarstellungen der geometrischen Optik (Katoptrik und Dioptrik) sind aus früherer Zeit als die bedeutendsten zu nennen:

R. SMITH, A compleat System of Opticks. 2 Bde. Cambridge 1738. Ein Theil dieses Werks ist übersetzt (»aus dem Englischen ins Deutsche und aus dem synthetischen Vortrage in den analytischen«) von

A. G. KÄSTNER. Vollständiger Lehrbegriff der Optik. Altenb. 1755.

L. EULER, Dioptrice. 3 Bde. Petrop. 1769—71. Ein Auszug und Umarbeitung dieser ist G. S. KLÜGEL, Analytische Dioptrik. Leipz. 1778.

J. F. W. HERSCHEL, Light. Encycl. Metrop. 1827, übers. v. J. C. E. SCHMIDT, Stuttgart 1831.

H. CODDINGTON, Treatise on the refraction of light. London 1829.

H. LLOYD, Treatise on Light and Vision. London 1831.

R. POTTER, An Elementary Treatise on Optics London, pt. I. 1847 (3. Aufl. 1865), pt. II. 1851.

S. PARKINSON, A. Treatise on Optics. London 1859, 4. Aufl., 1884.

Alle diese Werke ausser dem von HEATH behandeln nur specielle Probleme der Dioptrik. Die Literatur über die durch GAUSS angebahnte neue Richtung der Optik sowie die hervorragenderen Werke und Abhandlungen über besondere Gebiete werden betreffenden Orts angegeben werden.

Die ältere Literatur bis ca. 1830 ist ziemlich vollständig aufgeführt am Schlusse von LITTROW's Dioptrik. Wien 1830 und in der »Litteratur der Optik« (o. O. u. J.) v. H. W. DOVE.

II. Geometrische Theorie der optischen Abbildung.
(Nach ABBE.)

Die verschiedenen Standpunkte für die Behandlung des Problems.

Mit dem im vorangehenden Kapitel Gegebenen ist dasjenige in der Lehre von der Spiegelung und Brechung des Lichts, was ein unmittelbares physikalisches Interesse besitzt, ziemlich erschöpft. Der weitere Inhalt unserer Darstellung kann sich nunmehr nur noch auf die Anwendungen dieser Lehre beziehen. Diese begreifen einerseits die Erklärung gewisser — meist meteorischer — Naturerscheinungen in sich, andererseits liefern sie die Principien für die Construktion bezw. das Verständniss der sogen. optischen Instrumente, die ihrerseits namentlich als Hilfsmittel der Forschung in- und ausserhalb des physikalischen Gebietes eine grosse Bedeutung besitzen.

Wir wenden uns hier vornehmlich den letzteren zu.

Es handelt sich bei diesen in letzter Linie stets darum, dass durch Vermittelung von Reflexionen oder Brechungen (oder Combinationen beider) an geeignet geformten und zusammengestellten optischen Medien Bilder äusserer Gegenstände (oder Bilder solcher Bilder) hervorgebracht werden, und zwar besteht das Zustandekommen dieser Bilder stets darin, dass ein Theil der von je einem Punkte A des Gegenstandes ausgehenden Strahlen durch die Reflexionen und Brechungen, welche er erfährt, so modificirt wird, dass er wieder nach einem Punkte, dem Bildpunkte, A', convergirt.

Man hat nun die Gesetze, welche zwischen den Bildern und ihren Objekten bestehen, bis in die neueste Zeit fast ausnahmslos in der Weise studirt, dass man die besonderen Fälle, in welchen eine Wiedervereinigung von homocentrisch divergirenden Strahlenbüscheln stattfindet, näher untersuchte, und nur auf Grund solcher specieller Untersuchungen gelangte man schliesslich durch Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate zu gewissen allgemeineren Beziehungen.

Auch GAUSS, dem der grösste und wichtigste Fortschritt auf dem Wege solcher Verallgemeinerung der speciellen Theoreme zu verdanken ist, ging in seinen berühmten »Dioptrischen Untersuchungen«[1]) von den besonderen Voraussetzungen centrirter Kugelflächen, eines fadenförmigen axialen Strahlen- und Abbildungsraumes, sowie von der Giltigkeit des Brechungsgesetzes selbst aus und liess nur die bis dahin stets gemachte Einschränkung auf den Fall unendlich dünner in Contakt befindlicher Linsen, d. h. mit den Scheiteln coincidirender sphärischer Flächen vollständig fallen. Ihn leitete offenbar — und ausgesprochener Maassen — das Bestreben, die Gesetze der Abbildung durch beliebig zusammengesetzte Linsensysteme zurückzuführen auf gleich einfache Formen, wie sich bei einer einzelnen brechenden Fläche oder einer einzigen Linse verschwindender Dicke ergeben. Wiewohl er nun zeigte, dass in diesen Gesetzen die ursprünglichen Bestimmungsstücke des Systems (Radien, Dicken, Brechungsindices) eine sehr beiläufige Rolle spielten, dass die Abbildung vielmehr von gewissen Constanten viel allgemeinerer Art abhänge, so entging doch auch ihm anscheinend die Erkenntniss, dass alle Annahmen über die besondere Art der Verwirklichung einer optischen Abbildung den Kern der Frage, d. h. deren allgemeine Gesetze überhaupt nicht tangirten. Es war aber schon damals bekannt und ist später noch öfters gezeigt worden, dass es noch andere Fälle dioptrischer Abbildung von sehr verschiedener Art giebt, wie: durch die Brechung (oder Reflexion) schiefer Büschel (s. später) oder durch die Brechung axialer Büschel an nicht centrirten Systemen von Kugelflächen, auch durch Brechung von Büscheln beider Art an anderen als sphärischen Flächen, endlich auch durch eine Art von Strahlenvereinigung, die gar nicht mehr rein dioptrischer Natur ist[2]) — in allen diesen Fällen konnte und musste immer erst besonders gezeigt werden, dass auch sie schliesslich zu ganz gleichartigen Grössen- und Lagenbeziehungen zwischen Objekt und Bild führen, wie sie von GAUSS für den von ihm betrachteten Fall gefunden waren.

Wenn nichts anderes, so müsste diese Uebereinstimmung in den allgemeinen Resultaten von Untersuchungen, die theilweise auf so verschiedener Basis angestellt waren, den Gedanken nahelegen, dass die gedachten Beziehungen überhaupt gar nicht von den besonderen Voraussetzungen abhängen, auf Grund deren sie jedesmal von Neuem abgeleitet worden sind, sondern dass sie eine Folge sind der bereits erwähnten viel allgemeineren und rein geometrischen Voraussetzung, von der naturgemäss Alle in erster Linie ausgehen: von der Voraussetzung nämlich, dass eine Abbildung durch Strahlen überhaupt stattfinde. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass sich dies in der That so verhält.

MÖBIUS hat, wie es scheint, zuerst[3]) darauf hingewiesen, dass die »axiale« Abbildung durch eine einzelne brechende sphärische Fläche die Verhältnisse der collinearen Verwandtschaft zum Ausdruck bringt, und dass in Folge dessen alle Theoreme über die Wirkung auch beliebig zusammengesetzter Systeme brechender und spiegelnder Flächen nichts als eine einfache und direkte Abfolge dieser durch eine Brechung involvirten Beziehung von Objekt und Bild seien. Ihm sind in der Darstellung Mehrere gefolgt[4]), seine Theorie unter Zuhilfenahme der Betrachtungen der neueren Geometrie weiter ausbauend und begründend,

---

[1]) Göttingen 1841. Abh. Gött. Ges. d. Wiss. 1. 1838—43. Werke Bd. 5, pag. 243. 1867.

[2]) S. z. B. S. EXNER, PFLÜGER's Archiv f. d. ges. Physiol. 38, pag. 274. 1886.

[3]) Sitzber. Sächs. Ges. d. Wiss. 1855, pag. 8.

[4]) LIPPICH, Mitth. d. natw. Vers. Steiermark 2, pag. 1. 1871. — BECK, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18, pag. 588. 1873. — H. HANKEL, Elemente der projectiv. Geometrie. Leipzig 1875, pag. 146.

ohne aber die Voraussetzung aufzugeben, welche auch er noch festgehalten hatte: dass zur Verwirklichung der collinearen Beziehung eine gewisse Art der dioptrischen Wirkung nöthig sei. Hiernach scheinen immer noch die gefundenen Gesetze optischer Bilder abhängig von den physikalischen Vorgängen, durch deren Vermittelung sie entstehen.

Erst ABBE hat, ohne Kenntniss der MOEBIUS'schen Arbeit (seit Anfang der 70 er Jahre in seinen Universitätsvorlesungen) den letzten noch übrigbleibenden Schritt gethan: bei der Ableitung der allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung alle Voraussetzungen über die Verwirklichung der letzteren zunächst ganz bei Seite zu lassen. Das einigermaassen überraschende Resultat dieser Untersuchung ist dies: dass alle die Sätze, welche die Lagen- und Grössenverhältnisse optischer Bilder betreffen, sowie die dabei aufgestellten Begriffe (der Brennweiten, Brennpunkte und sonstigen Cardinalelemente) ihrem Wesen nach gänzlich unabhängig sind von den physikalischen und geometrischen Bedingungen ihres Entstehens; dass sie nichts anderes sind, als der Ausdruck mathematisch nothwendiger Beziehungen, die sich überall da vorfinden müssen, wo auf irgend eine Weise zwei Raumgebiete in solche Beziehungen zu einander treten, dass eine optische Abbildung des einen in den anderen stattfindet.

Unter optischer Abbildung ist dabei wie oben eine punktweise Abbildung vermittels gerader Strahlen verstanden, also eine Abbildung, bei welcher jedem Punkte des einen Raums ein, und nur ein Punkt des anderen entspricht und der Strahlengruppe, welche durch den ersteren Punkt geht, im anderen Raume Strahlen entsprechen, die sämmtlich durch den Bildpunkt gehen.

Diese beiden Merkmale sind ausreichend, um den Begriff einer bestimmten Art von Abbildung festzulegen, und es sind zugleich die einzigen wesentlichen Merkmale, durch welche die Abbildungsweise charakterisirt wird, welche durch Lichtstrahlen unter Vermittelung spiegelnder oder brechender Flächen irgendwann zu Stande kommt. Von den speciellen geometrischen und physikalischen Umständen der Abbildung hängt nichts weiter ab als einerseits die numerischen Werthe der Constanten, welche in den allgemeinen Abbildungsgleichungen auftreten, und dort, mangels einer besonderen Voraussetzung, natürlich unbestimmt bleiben müssen; zweitens die Bestimmung darüber, in welchem begrenzten Raumgebiet, bezw. unter welchen sonstigen Einschränkungen der allgemeine Fall der Abbildung in dem betrachteten Sonderfall verwirklicht ist und drittens endlich die geometrische Lokalisirung der in einander abgebildeten Räume und ihre Lagebeziehung gegen die Grenzen der angewandten physischen Mittel.

Es scheint aber keineswegs überflüssig, diese Auffassung, d. h. diese Scheidung dessen, was schon aus dem allgemeinen Begriffe der optischen Abbildung folgt und dessen was erst Folge der speciellen dioptrischen Voraussetzungen ist, in der Theorie der optischen Instrumente möglichst streng durchzuführen. Denn für jede verständige Anwendung einer Lehre ist die richtige Bestimmung der zureichenden und nothwendigen Voraussetzungen derselben ein wesentliches Erforderniss. Bei der üblichen Darstellungsweise aber wird diese Bestimmung zum mindesten ausser Acht gelassen, wenn nicht geradezu falsch getroffen. Hierdurch wird die theoretische Erörterung vieler concreter Fragen in eine falsche Bahn gewiesen, und die zutreffende Anwendung der Theorie oft genug verhindert oder doch erschwert. Dies gilt z. B. namentlich in Bezug auf die oft discutirten Fragen, welche die Grenzen der Leistungsfähigkeit der optischen Werkzeuge (auch in dioptrischer Beziehung) betreffen.

Unter Zuhilfenahme der Lehren und Betrachtungsweisen der neueren Geo-

metrie ist der hier zu erbringende Nachweis sehr schnell zu geben. Da aber die uns mit in erster Reihe interessirenden Maassbeziehungen auf dem synthetischen Wege stets etwas umständlicher abzuleiten sind und im Interesse der Allgemeinverständlichkeit dieser sehr elementaren Beziehungen geben wir dem analytischen Wege in der Entwicklung derselben den Vorzug.

Die allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung.

Herleitung der Abbildungsgleichungen.

Nehmen wir also — aller besonderen Voraussetzungen uns zunächst entschlagend — an, dass eine »optische Abbildung« stattfinde, d. h. wie oben definirt, eine Abbildung eines Raumgebietes in ein anderes mittels geradliniger Strahlen in der Art, dass den durch einen Punkt P des Raumes R (des Objektraumes) gehenden Strahlen, im Raume R' (dem Bildraum) Strahlen entsprechen, die sämmtlich wieder durch einen Punkt P', das Bild des Punktes P, gehen. Aus dieser, der oberflächlichsten Erfahrung über die faktische Entstehung optischer Bilder zu entnehmenden Charakteristik der Abbildungsweise folgen dann alle weiteren wesentlichen Merkmale derselben.

Zunächst 1) ist aus ihr zu schliessen, dass die gedachte Abbildung eindeutig ist — da die Strahlen als geradlinige sich paarweise nur in je einem Punkte schneiden, also auch zu einem Objektpunkte geometrisch wie physisch nur einen conjugirten oder Bildpunkt zur Folge haben können.

2) Den Punkten auf einer geraden Linie im einen Raume entsprechen als Bilder Punkte im anderen Raume, die wieder auf einer Geraden liegen. Denn dem Strahle S, welcher durch die auf einer geraden Linie gelegenen Punkte $P_1 P_2 P_3$ hindurchgeht, entspricht laut Annahme ein Strahl S' im Bildraum, der nach unserer Grundannahme durch jeden der drei jenen $P_1 P_2 P_3$ conjugirten Punkte $P_1' P_2' P_3'$ hindurchgeht, und da der Strahl geradlinig ist, so liegen $P_1' P_2' P_3'$ auf einer geraden Linie. (Ueber die Punktfolge auf conjugirten Geraden ist hierdurch natürlich noch nichts bestimmt; dieselbe ergiebt sich erst später).

Dieses gegenseitige eindeutige Entsprechen von Punkten und Geraden bezeichnet die Geometrie bekanntlich als »Collineation« oder »collineare Verwandtschaft«. Es ist also im Vorangehenden bereits bewiesen, dass jede optische Abbildung die beiden Abbildungsräume in collineare Verwandtschaft setzt.

Da die Beziehung zwischen den beiden Räumen dem Gesagten zufolge eine vollständig gleichwerthig-gegenseitige ist, so dient die Bezeichnung des einen als Objekt-, des anderen als Bildraum nur zur Erleichterung des Ausdrucks, ohne dass dem einen im Verhältniss zum anderen unter dem hier vertretenen Gesichtspunkte irgend welche ausgezeichneten Eigenschaften zukommen.

Zur Entwickelung der weiteren Eigenschaften der gedachten Abbildung bedienen wir uns am bequemsten einer dritten, ebenfalls unmittelbar aus 2) sich ergebenden Folgerung, nämlich

3) Einer Ebene E im Objekt Raum entspricht auch wieder eine Ebene E' im Bildraum. Denn die Ebene ist definirt durch zwei sich schneidende Gerade; zwei solchen a, b im einen Raum entsprechen aber nach 2) zwei ebensolche a', b' im anderen Raum. Jeder weiteren in der ersteren Ebene enthaltenen Geraden c, die also die zuerst angenommenen beiden Geraden schneidet entspricht nun im Bildraum eine Gerade c', welche nach der ursprünglichen Annahme den einen wie den anderen der beiden dort gelegenen Strahlen schneiden muss, welche also in dieselbe Ebene fällt.

Dieses Merkmal der Abbildung von Ebenen in Ebene wollen wir also den analytischen Entwickelungen als fundamentales zu Grunde legen. Aus ihm folgt sofort rückwärts die Abbildung von Geraden in Gerade und von Punkten in Punkte jeweilig als der Schnitte je zweier Ebenen bezw. Geraden.

Nehmen wir, um den Zusammenhang der beiden Rähme R und R' näher zu untersuchen, in ihnen je ein, zunächst beliebig orientirtes, rechtwinkliges Parallel-Coordinatensystem an. Die Coordinaten eines Punktes P im einen, dem Objektraum, seien x, y, z; die seines conjugirten Punktes im Bildraum, P', seines Bildes x', y', z'; dann ist die Beziehung zwischen den Punkten P und P' mathematisch formulirt, indem wir

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, z) \\ y' &= \chi(x, y, z) \\ z' &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

setzen.

Die Beziehung der beiden Räume wäre (analytisch) bekannt, wenn die Funktionen φ, χ, ψ vermittelt wären. Von diesen Funktionen wissen wir nur, dass sie nach 1) stetig und eindeutig sind.

Einer Ebene E' im Bildraum, die durch die Gleichung

$$A'x' + B'y + C'z' + D' = 0 \tag{2}$$

bestimmt ist, entspricht ferner nach 3) eine Ebene E im Objektraum, deren Gleichung wir analog

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

schreiben können.

Vermöge (1) entspricht aber der durch (2) bestimmten Ebene des Bildraums im Objectraum das geometrische Gebilde

$$\Psi(x, y, z) \equiv A'\varphi(x, y, x) + B'\chi(x, y, z) + C'\psi(x, y, z) + D' = 0. \tag{4}$$

Da $\Psi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer mit E identischen Ebene sein soll, so muss $\Psi(x, y, z)$ für alle durch (3) definirten Punkte und nur für diese selbst verschwinden. Es muss sich daher Ψ identisch umformen lassen in die Gestalt

$$\Psi(x, y, z) \equiv (Ax + By + Cz + D)\Phi(x, y, z), \tag{5}$$

worin Φ den Bedingungen unterworfen ist

a) Φ darf nie $= \infty$ werden für Werthsysteme (x, y, z), welche die Gleichung (3) erfüllen — damit nicht für Punkte der Ebene (3) $\Psi \gtrless 0$ werde, d. h. der Fall eintrete, dass zu einem Punkte der Ebene (2) kein entsprechender Punkt durch die Gleichung $\Psi = 0$ festgelegt werde — was gegen die Grundannahme eines durchgängigen Entsprechens der beiden Ebenen wäre.

b) Φ darf nie $= 0$ werden, wenn Gleichung (3) nicht erfüllt ist, weil dies involviren würde, dass es Punkte in der Ebene $\Psi = 0$ gebe, die mit Punkten ausserhalb der Ebene E coincidirten — was gegen die Annahme der eindeutigen Abbildung von Ebenen in Ebenen wäre; und drittens

c) nur wenn $Ax + By + Cz = \infty$ ist, darf $\Phi = 0$ werden; denn den unendlich fernen Punkten der Objektebene brauchen nicht nothwendig unendlich ferne Punkte der Bildebene zu entsprechen; zu einer Annahme hierüber ist bis jetzt noch keine Handhabe gegeben, und es hängt von dem besonderen Werthe der sich dann darbietenden Terms $0 \cdot \infty$ ab, ob es der Fall ist oder nicht.

Unter diesen Einschränkungen für die Werthe der Funktion Φ ergiebt im übrigen die Identität der Gleichungen (4) und (5)

$$A'\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right) + B'\left(\frac{\chi}{\Phi}\right) + C'\left(\frac{\psi}{\Phi}\right) + D'\left(\frac{1}{\Phi}\right) \equiv Ax + By + Cz + D. \tag{6}$$

Die linke Seite von (6) kann aber nur dann identisch auf einen linearen Ausdruck führen, wenn die Faktoren von $A' B' C'$ und D' selbst lineare Formen sind, also wenn

$$\begin{array}{l|l} \frac{\varphi}{\Phi} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 & \text{oder } \varphi = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{ax + by + cz + d} = x' \\ \frac{\chi}{\Phi} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 & \qquad \chi = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{ax + by + cz + d} = y' \\ \frac{\psi}{\Phi} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 & \qquad \psi = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{ax + by + cz + d} = z' \\ \frac{1}{\Phi} = ax + by + cz + d & \text{und } \Phi = \frac{1}{ax + by + cz + d}. \end{array} \tag{7}$$

Hiermit sind aber die gesuchten Funktionen φ, χ und ψ, welche den gestellten Bedingungen genügen, gefunden. (Man überzeugt sich leicht, dass dies bei Φ auch der Fall ist). Es sind Quotienten linearer Ausdrücke mit gleichem Nenner. Die Abbildung ist also aus den gemachten Voraussetzungen in der That analytisch vollständig bestimmt und zwar durch 16 oder — wenn man überall mit d dividirt — durch 15 Coëfficienten. Wir wollen uns diese Division durch d vorgenommen denken, für die neuen, d mal kleineren, Coëfficienten aber die vorige Bezeichnung beibehalten.

Wir haben nun die geometrischen Eigenschaften der so bestimmten Abbildung zu entwickeln und werden dieselben dann gleich benützen, um durch entsprechende Wahl der Coordinatensysteme in den beiden Räumen die Zahl der Coëfficienten der Abbildung zu reduciren und so die Ausdrücke für φ, χ und ψ erheblich zu vereinfachen.

Reduktion der Abbildungsgleichungen auf die einfachsten Grundformen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zunächst die

a) Beziehungen zwischen den Oertern conjugirter Ebenen. Gemäss den Gleichungen (7) entspricht die Ebene E' des Bildraumes, deren Gleichung (2) $A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$ ist, im Objektraum dem Gebilde

$$o = \frac{1}{ax + by + cz + 1}(A'a_1 + B'a_2 + C'a_3 + D'a)x + (A'b_1 + B'b_2 + C'b_3 + D'b)y + (A'c_1 + B'c_2 + C'c_3 + D'c)z + A'd_1 + B'd_2 + C'd_3 + D', \tag{8}$$

dessen Gleichung wie verlangt von der Form

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{ax + by + cz + 1} \tag{9}$$

ist. Es ist also auch

$$(2)\ A'x' + B'y' + C'z' + D' \equiv \frac{Ax + By + Cz + D}{ax + by + cz + 1}\ (9).$$

Einem Nullwerden von (2) entspricht nun im Allgemeinen ein Nullwerden des Zählers von (9), d. h. der Ebene E', deren Gleichung (2) ist, entspricht im Allgemeinen im Objektraum die Ebene E, deren Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$, ist, worin die Coëfficienten — vermöge der Identität von (8) und (9) — mit denen der Abbildung und denen von E' verbunden sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} A &= A'a_1 + B'a_2 + C'a_3 + D'a \\ B &= A'b_1 + B'b_2 + C'b_3 + D'b \\ C &= A'c_1 + B'c_2 + C'c_3 + D'c \\ D &= A'd_1 + B'd_2 + C'd_3 + D'd. \end{aligned} \tag{10}$$

Endlichen Werthen von x', y', z' entsprechen daher im Allgemeinen auch endliche Werthe von x, y, z und umgekehrt.

Man sieht aber aus der Form des Ausdruckes (9), dass es ein System von Werthen x', y', z' giebt, denen unendlich grosse Werthe von x', y', z' entsprechen, nämlich diejenigen, welche der Gleichung

$$ax + by + cz + 1 = 0 \tag{11}$$

genügen, d. h. in einer gewissen Ebene F liegen. Das Bild dieser im Endlichen gelegenen Ebene F des Objektraumes liegt im Unendlichen. Die Abbildung erleidet daher an ihr eine Unstetigkeit und zwar ist dieses die **einzige** Unstetigkeitsstelle jenes Raumes.

Eine analoge Ebene existirt, wie schon aus der Gegenseitigkeit aller Beziehungen in den beiden Räumen folgt, auch im Bildraum. In der That wenn $A = B = C = 0$ ist — was gewisse Beziehungen zwischen den wesentlichen Coëfficienten $\frac{A'}{B'}\,\frac{B'}{D'}$ und $\frac{C'}{D'}$ der Ebene E' und denen der Abbildung involvirt, d. h. eine bestimmte Ebene F' determinirt — so kann das Nullwerden von (9) nur noch eintreten durch Unendlichwerden des Nenners, d. h. im Allgemeinen durch Unendlichwerden von x, y, z. Der durch die Bedingungen $A = B = C = 0$ bestimmten Ebene F' des Bildraumes entspricht also eine unendlich ferne im Objektraum; sie ist daher die Discontinuitätsebene des Bildraumes[1]. Diese in der Anwendung so wichtigen Ebenen — bekanntlich Brennebenen genannt — nehmen daher auch vom rein geometrischen Gesichtspunkte eine ganz besondere Bedeutung in Anspruch.

Es giebt jedoch eine Art von Abbildung, bei welcher keine Unstetigkeit der Abbildung vorhanden ist: wenn nämlich $a = b = c = 0$ ist. In diesem singulären Fall der Abbildung, welcher in einer Klasse von optischen Instrumenten verwirklicht ist, entsprechen offenbar im Endlichen gelegene Ebenen des Bildraumes stets im Endlichen gelegenen Ebenen des Objectraumes und vice versa. Wir werden uns mit diesem Fall noch näher zu beschäftigen haben. Er heisst (aus später ersichtlichen Gründen) der Fall der »teleskopischen« Abbildung.

Wir wollen nun durch weitere Discussion unserer Abbildungsgleichungen zweitens

b) die Beziehungen zwischen den Richtungen conjugirter Ebenen ableiten und aus diesen eine erste Vereinfachung jener Gleichungen gewinnen.

Orientirung der yz-Ebenen. Die Richtungscoëfficienten A, B, C einer Ebene E im Objektraum hängen, wie (10) zeigt, nicht nur von den Richtungscoëfficienten A', B', C' der conjugirten Ebene E' ab, sondern auch von deren Lagecoëfficient D'. Einer Parallelverschiebung von E' (welche blos eine Aenderung von D' involvirt) entspricht daher im Allgemeinen eine Verschiebung und gleichzeitige Richtungsänderung von E und umgekehrt. Dies ist nur dann nicht mehr der Fall, wenn A, B, C von D' unabhängig sind, also 1) wenn $a = b = c = 0$ ist, d. h. in dem singulären Fall der teleskopischen Abbildung; alsdann entsprechen parallelen Ebenen im einen Raum überall parallele Ebenen im andern. 2) Wenn in der Gleichung

[1] Auch die Schnitte der Ebene F mit dem durch das Nullwerden der Zähler von φ, χ und ψ definirten Ebenen machen keine Ausnahme von obiger Bestimmung. Die ihnen entsprechenden Linien im Bildraum sind resp. der x'-, y'-, z'-Axe parallel, und nehmen allerdings für diese Coordinate alle Werthe an, liegen aber auch im Unendlichen, indem immer bezw. y und z', x' und z', x' und $y' = \infty$ sind. Ebenso gewisse Linien im Bildraum.

der Objektebene (8) auf andere Weise der den Faktor D' enthaltende Theil des Ausdruckes von x, y, z unabhängig wird, also wenn $(ax + by + cz + 1) = const$ ist, d. h. wenn die Ebene im Objektraum der Discontinuitätsebene F derselben parallel ist. Dieser Schaar von parallelen Ebenen — und im Allgemeinen nur dieser einen — im Objektraum entsprechen auch parallele im Bildraum.

Aus der Eindeutigkeit dieser und der Gleichwerthigkeit aller Beziehungen zwischen den beiden Räumen folgt dann, dass jene Ebenen im Bildraum parallel der Discontinuitätsebene F' desselben sind. Dies folgt aber auch direkt, wenn man die unter sich parallelen Ebenen des Bildraumes sucht, denen eine Schaar unter sich parallelen Ebenen im Objektraum entspricht. Für letztere muss $A:B:C$ unabhängig von D' sein. Da nun $A = M + D'a$; $B = N + D'b$; $C = P + D'c$, so musste $M:N:P = a:b:c$ sein. Wir können daher setzen $A = a(K + D')$; $B = b(K + D')$; $C = c(K + D')$. Die Grössen A, B, C dürfen jeden mit a, b, c proportionalen Werth annehmen, ohne mit der gestellten Bedingung in Widerspruch zu treten. Es kann also auch $K = -D'$ werden, daher $A = B = C = 0$. Die durch diese Bedingung bestimmten Ebene des Bildraumes ist nun, wie wir oben gesehen haben, in der That dessen Discontinuitätsebene.

Ebenen, die der Discontinuitätsebene des einen Raumes parallel sind, entsprechen also im anderen Raum Ebenen die der Discontinuitätsebene dieses parallel sind, und dies sind im Allgemeinen die einzigen conjugirten Schaaren von Parallelebenen.

Wir nehmen nun Ebenen, die den Unstetigkeitsebenen in den beiden Räumen parallel sind, zu Coordinatenebenen und zwar zur yz- resp. $y'z'$-Ebene; die x- und x'-Axen senkrecht dazu. Dann kann x' nur noch Funktion von x sein, also reducirt sich die Gleichung für x' in (7) auf

$$x' = \frac{a_1 x_1 + d_1}{ax + 1}$$

und da alle drei Coordinaten nothwendig gleichen Nenner haben, so vereinfachen sich auch diese in

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{ax + 1}$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{ax + 1}.$$

Wahl der Hauptaxen. Die Abscissenaxen x' und x selbst sind bisher noch nicht zu einander conjugirt (wenn $y = z = 0$ ist noch nicht $y' = z' = 0$). Um dies zu erreichen, suchen wir diejenigen zur x-Axe parallelen, d. h. zur Discontinuitätsebene F senkrechten Geraden, deren Bilder im anderen Raum zur x'-Axe parallel, zur F'-Ebene senkrecht sind. Seien die Coordinaten einer solchen Geraden im jetzigen System $y = y_0$ und $z = z_0$, so müssen die Coordinaten ihres Bildes, also

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{ax + 1},$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{ax + 1}$$

von x unabhängig sein. Dies ist der Fall wenn

$$\frac{b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{a_2} = \frac{1}{a}$$

und auch

$$\frac{b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{a_3} = \frac{1}{a}.$$

Diese beiden linearen Gleichungen für y_0 und z_0 haben im Allgemeinen nur eine Lösung. Es giebt also im Allgemeinen auch nur je eine Gerade von der verlangten Eigenschaft. Wir nehmen diese charakteristischen Hauptaxen der Abbildung zur x- resp. x'-Achse. Dann muss für $y=0$ und $z=0$ auch $y'=0$ und $z'=0$ sein, also im Zählen der Ausdrücke für y' und z' kein x enthaltendes und kein constantes Glied mehr vorkommen. Demnach werden die Abbildungsgleichungen — unbeschadet ihrer Allgemeinheit — reducirt auf die Form

$$y' = \frac{b_2 y + c_2 z}{ax+1} \qquad z' = \frac{b_3 y + c_3 z}{ax+1}.$$

Wahl der Nebenaxen. Zur weiteren Vereinfachung dieser benützen wir den Satz:

Es giebt in jedem Raum ein — und im Allgemeinen nur ein — Paar von auf einander senkrechten durch die Hauptaxe gehenden (Meridian-) Ebenen, denen ebensolche im anderen Raum conjugirt sind.

In der That: Eine im Objektraum durch die x-Axe gelegte Ebene I bilde mit der x-y-Ebene den Winkel u, dessen trigonometrische Tangente $tg\, u = \frac{z}{y} = m$ ist. Eine andere Meridianebene II bilde mit der xy-Ebene (resp. mit der y-Axe) den Winkel v. Wenn nun I und II senkrecht auf einander stehen, so ist $tg\, v = \frac{1}{m}$. Das Bild von I bildet aber mit der y'-Axe den Winkel u', dessen Tangente nach den Abbildungsgleichungen sich darstellt als

$$tg\, u' = \frac{z'}{y'} = \frac{b_3 y + c_3 m y}{b_2 y + c_2 m y} = \frac{b_3 + c_3 m}{b_2 + c_2 m}.$$

Das Bild von II bildet mit y' den Winkel v', so dass analog

$$tg\, v' = \frac{b_3 - \frac{1}{m} c_3}{b_2 - \frac{1}{m} c_2}$$

ist. Soll $u' - v' = \frac{\pi}{2}$ sein, so muss $tg\, v' = -\frac{1}{tg\, u'}$ sein, also

$$\left(m - \frac{1}{m}\right)(c_2 b_2 - b_3 c_3) = b_3^2 + c_3^2 - (b_2^2 + c_2^2).$$

Diese Gleichung wird entweder durch die Coëfficienten der Abbildung selbst erfüllt, indem der Faktor von $m - \frac{1}{m}$ und die rechte Seite der Gleichung einzeln gleich Null sind, was auf $b_2 = c_2 = b_3 = c_3$ führt, und dann besteht sie eo ipso für jeden Werth von m und damit von u. Oder die Gleichung hat praktisch nur eine Lösung; denn wenn $m = r$ eine Lösung ist, so ist zwar $m = -\frac{1}{r}$ ebenfalls eine solche; dies führt aber bei uns auf die zugehörige Ebene II. Es giebt also im Allgemeinen nur ein Paar Ebenen von der verlangten Eigenschaft im einen wie anderen Raum.

Diese Ebenen benützen wir abermals zur Orientirung unseres Coordinatensystems, indem wir die y- und z- resp. y'- und z'-Axen in die durch sie in der yz resp. $y'z'$-Ebene fixirten Richtungen hineinverlegen und zwar natürlich derart, dass die $x'y'$-Ebene das Bild der xy-Ebene wird und die $x'z'$-Ebene das Bild der xz-Ebene. Es darf dann y' und z' ausser von x nur von y bezw. z abhängen; es erhalten also die Abbildungsgleichungen schliesslich die Form

$$x' = \frac{a_1 x + d_1}{ax+1}; \quad y' = \frac{b_2 y}{ax+1}; \quad z' = \frac{c_3 z}{ax+1}.$$

Hauptformen der Abbildungsgleichungen. Aus den allgemeinen Bedingungen der Transformation von Coordinatensystemen ist zu schliessen, dass diese Gleichungen, welche noch 6 Constanten enthalten, weiter reducibel sein müssen. In der That haben wir noch über den bisher willkürlichen Anfangspunkt der x- und x'-Coordinatenzählung zu verfügen. Hierfür bieten sich zwei Festsetzungen als besonders einfach, charakteristisch und für die Anwendung wichtig dar.

1) Zu Anfangsebenen werden die Unstetigkeitsebenen F und F' gewählt, Dann werden die Abbildungsgleichungen, wie man sich leicht überzeugt, von der Form

$$x' = \frac{\mathfrak{a}}{x}; \quad y' = \frac{\mathfrak{b}y}{x}; \quad z' = \frac{\mathfrak{c}z}{x}, \tag{12}$$

worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gewisse mit den früheren einfach zusammenhängende Constanten sind.

2) Zu Nullebenen werden conjugirte Ebenen gewählt.

Die Form der Gleichungen in diesem Falle wird

$$x' = \frac{a_1 x}{a x + 1}; \quad y' = \frac{b_2 y}{a x + 1}; \quad z' = \frac{c_3 z}{a x + 1}; \tag{13}$$

hierbei bleibt eine Constante noch verfügbar für die specielle Wahl der conjugirten Ebenen.

Diese Gleichungen werden im Fall der teleskopischen Abbildung, d. i. $a = 0$ (b und c sind bereits $= 0$), noch einfacher, nämlich

$$x' = px; \quad y' = qy; \quad z' = rz, \tag{14}$$

wenn die Constanten schlechthin mit p, q, r bezeichnet werden.

Der allgemeine hier behandelte Fall der Abbildung ist also charakterisirt durch mindestens 3 Constanten. Die Abbildung ist um die x-Axe nicht symmetrisch, wie es die meisten realen Abbildungen sind. Die x-Axe unseres Coordinatensystems stellt sich als eine Hauptaxe der Abbildung dar, die wie vorangehend bestimmten y- und z-Axen als Nebenaxen derselben. Im singulären Fall der teleskopischen Abbildung sind die 3 Axen gleichwerthig. Auch in diesem Falle, in welchem parallelen Ebenen im einen Raume stets parallele im anderen entsprechen, giebt es im Allgemeinen nur eine rechtwinklige Ecke, welche als ebensolche abgebildet wird, was also zu einer bestimmten Wahl des Coordinatensystems führt.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, nochmals darauf hinzuweisen, dass die Lagenbeziehung der beiden Abbildungsräume zu einander hier eine ganz willkürliche ist. Diese wird erst durch die speciellen Umstände der Abbildung gegeben.

Um diese rein geometrische Abbildung bequemer zur physischen in Beziehung setzen zu können, wollen wir nur dies noch annehmen, dass die Richtung der positiven x zusammenfalle, d. h. übereinstimmend gewählt werde in beiden Räumen mit der der Lichtbewegung — was natürlich keine Einschränkung bedeutet.

Der geometrische Charakter der durch die Gleichungen (12) bezw. (13) und (14) bestimmten Abbildung ist ein in der Mathematik wohlbekannter; ihre näheren Eigenschaften sind eingehend studirt. Eine Discussion jener Gleichungen ergiebt dieselben in einfachster Weise. Wir beschränken uns hier auf einige Hinweise.

Bei der durch (14) definirten teleskopischen Abbildung sind die beiden Räume nach der Bezeichnung der modernen Geometrie [illegible]

Gebilde des einen Raumes erscheint im anderen als eins gleicher Gattung, nur in den 3 Dimensionen im Allgemeinen verschieden vergrössert. In dem durch (12) resp. (13) definirten Fall der allgemeineren Abbildung herrscht nur noch in jedem einzelnen zur x-Axe senkrechten Paar conjugirter Ebenen Affinität, aber für die verschiedenen Ebenenpaare sind die Affinitätsconstanten verschieden, nämlich von x abhängig.

Das Verhältniss conjugirter Strecken in den beiden Räumen heisst die »Vergrösserung«. Im speciellen heisst das Verhältniss von auf der Hauptaxe gelegenen conjugirten Strecken Longitudinal-, Axial- oder Tiefenvergrösserung.

Halten wir uns an die auf die Unstetigkeitsebenen bezogenen Abbildungsgleichungen (12), so ist das Verhältniss unendlich kleiner conjugirter Strecken

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = -\frac{\mathfrak{a}}{x^2} = -\frac{x'^2}{\mathfrak{a}}. \tag{12a}$$

Dasselbe variirt, wie man sieht, mit x, resp. x' selber.

Für endliche axiale Strecken ist

$$\frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = -\frac{\mathfrak{a}}{x_1 x_2} = -\frac{x_1' \cdot x_2'}{\mathfrak{a}}.$$

Das Verhältniss von Strecken senkrecht zur x-Axe heisst Lateralvergrösserung, oder auch Vergrösserung schlechthin. Dasselbe variirt in dem allgemeinen Fall der 3-axigen Abbildung von Azimut zu Azimut. In der praktischen Anwendung haben wir es fast ausschliesslich mit dem Sonderfall einer um die x-Axe symmetrischen Abbildung zu thun. Wir wollen uns daher weiterhin mit diesem allein beschäftigen.

Wir haben dann $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ zu setzen, also zwischen y und z nicht weiter zu unterscheiden. Jedes Paar zu einander senkrechter Meridianebenen wird dann in ebensolche abgebildet. Die Lateralvergrösserung, die wir mit β bezeichnen wollen, ist jetzt für jede zur x-Axe senkrechte Ebene constant

$$\beta = \frac{dy'}{dy} = \frac{y'}{y} = \frac{\mathfrak{b}}{x} = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) x' \tag{12b}$$

unabhängig von y und y' selber.

Zur x-Axe senkrechte ebene Figuren werden also in ähnliche abgebildet.

Die Vergleichung von (12a) und (12b) zeigt, dass

$$\alpha = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \beta^2.$$

Die Tiefenvergrösserung ist an jeder Stelle proportional dem Quadrat der Lateralvergrösserung[1]), und es ist das Verhältniss

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = -\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}},$$

also bei einer gegebenen Abbildung selbst für jede Stelle des Raumes constant.

Die Tiefenvergrösserung ist proportional dem Quadrat des reciproken Objektabstandes von der F-Ebene oder dem direkten Quadrat des Bildabstandes von der F'-Ebene.

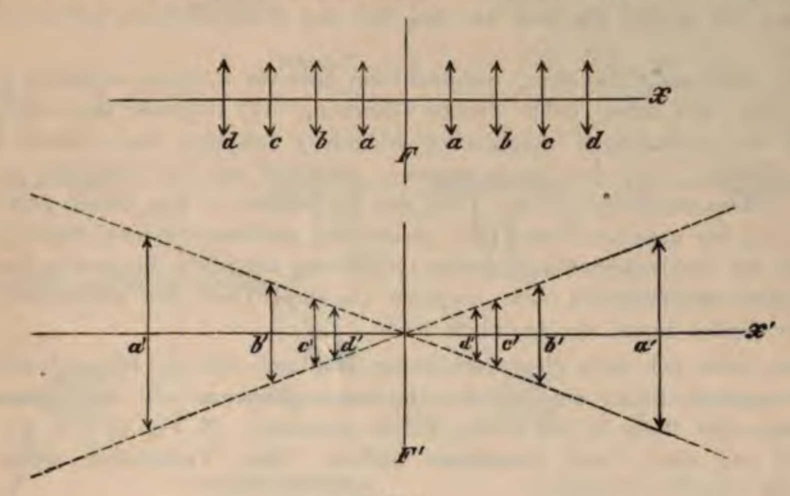
Die Lateralvergrösserung ist einfach proportional dem reciproken Objektabstande von der F-Ebene oder dem direkten Bildabstande von der F'-Ebene. Beide können stets alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Den Zusammenhang der Lateralvergrösserung und Axialvergrösserung unter einander und mit

---

[1]) Für die dioptrische Abbildung schon von Töpler bemerkt. Pogg. Ann. 142, pag. 232. 1871.

den Werthen von x resp. x' veranschaulicht man sich am besten durch folgende graphische Construction (Fig. 9).

Man zeichne eine Anzahl äquidistanter, gleich grosser Ordinaten y, deren Endpunkte also auf einer zur x-Axe parallelen Geraden liegen. Die zugehörigen



(Fig. 9.)

Werthe von y' liegen auf einer durch den Punkt $x' = 0$ gehenden, d. h. die x'-Axe in F' schneidenden Geraden und liegen desto näher aneinander je näher sie an F' kommen.

Umgekehrt entsprechen einer Schaar von äquidistanten y', deren Spitzen auf einer unter einem gewissen Winkel gegen x' geneigten durch F' gehenden Geraden liegen, im Objektraum gleich grosse y, die desto näher an einander stehen, je näher sie der Ebene F sind u. s. w. (Einem Kreise um den Brennpunkt im einen Raum entspricht eine Hyperbel im anderen. Einer Schaar concentrischer Kreise vom Radius r eine Schaar von Hyperbeln von constanter Nebenaxe b, und verschiedener Hauptaxe $\left.\frac{a}{r}\right)$.

Das Hervorstechendste und Wichtigste bei solchen Constructionen ist der anschauliche Hinweis auf die Bedeutung der Brennebenen. Dieselben theilen die betreffenden Räume in zwei symmetrische Hälften, welche auf eine ganz gleichartige Weise abgebildet werden, d. h. einander paarweise entsprechen.

Charakteristik der verschiedenen Gattungen von Abbildung resp. von abbildenden Systemen.

Da unsere Abbildung nur noch durch 2 Constanten bestimmt ist, so kann eine irgend wesentliche Unterschiedlichkeit derselben nur noch in dem verschiedenen Vorzeichen dieser Constanten begründet sein. Nehmen wir als Charakteristika der Abbildung die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so kann jede derselben $> $ oder < 0 sein, woraus vier verschiedene Gattungen von Abbildung resultiren.

1) Je nachdem $a < 0$ oder > 0 ist die Abbildung rechtläufig oder rückläufig. Einer Bewegung des Objeks z. B. im Sinne der Lichtbewegung entlang der x-Axe enspricht eine Bewegung des Bildes, im einen Falle ebenfalls im Sinne der Lichtbewegung, im anderen Falle entgegengesetzt zu ihr. Es mag hier vorausgenommen werden, dass der erstere Fall vorliegt, wenn die Abbildung verwirklicht wird durch lauter Brechungen oder durch eine gerade Zahl von

Reflexionen oder durch Combination von Brechungen mit einer geraden Zahl von Spiegelungen. Wir wollen diese Abbildung schlechthin die »dioptrische« nennen. Der andere Fall liegt vor, wenn die Abbildung durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen zu Stande kommt oder durch Combination von Brechungen mit solchen. Wir wollen ihn kurz als den Fall der »katoptrischen« Abbildung bezeichnen.

Wie man aus (12a) sieht, entspricht ein positives $\mathfrak{a}$ einem negativen a und umgekehrt. Wir haben daher gemäss Gleichung (12) folgende Bestimmungen:

Bei der rechtläufigen (dioptrischen) Abbildung entspricht der in Bezug auf x positive (rechte) Theil des Objektraumes — gerechnet von der Unstetigkeitsebene F an — dem negativen (linken) Theil des Bildraumes — also diesen gerechnet von F' an, der negative (linke) Theil dieses, der positiven (rechten) Hälfte jenes.

Bei der rückläufigen (katoptrischen) Abbildung entspricht die positive (rechte) Hälfte des Objektraumes dem positiven (rechten) Theil des Bildraumes, die negative (linke) dieses, der negativen jenes.

Man kann sich auch diese Verhältnisse graphisch sehr gut veranschaulichen, indem man die Bilder eines in der Objektaxe gelegenen und die Brennebene durchsetzenden Pfeils in den beiden Fällen construirt. (S. Fig. 10 a. f. S.)

Es mag dem Leser überlassen bleiben, diese Verhältnisse weiter zu discutiren.

2) Was nun zweitens das Vorzeichen von $\mathfrak{b}$ anbetrifft, so ist sein Einfluss auf die Art der Abbildung der, dass, wie aus (12b) folgt, bei

positivem $\mathfrak{b}$ positiven Werthen von x aufrechte / negativen „ „ „ umgekehrte Bilder,

entsprechen, d. h. es wird die rechte Hälfte des Objektivraumes aufrecht, die linke verkehrt abgebildet; bei

negativem $\mathfrak{b}$ negativen Werthen von x aufrechte / positiven „ „ „ verkehrte Bilder,

d. h. es wird die linke Hälfte des Objektraums aufrecht, die rechte verkehrt abgebildet.

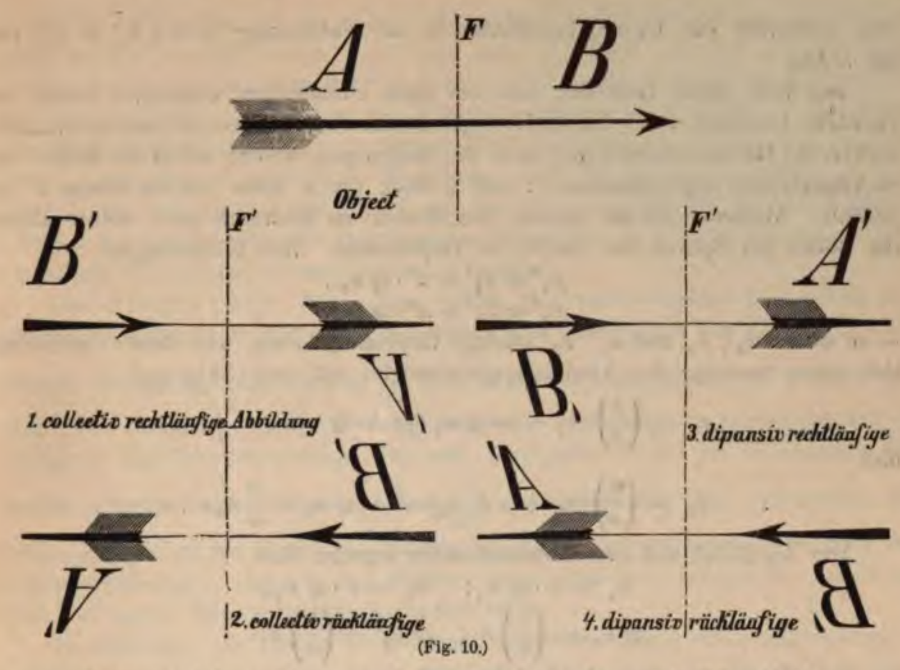
Der erste Fall ist verwirklicht in den sogen. collektiven Systemen, der zweite in den dispansiven, wie wir später sehen werden. Jede Art der Abbildung ergiebt an sich sowohl aufrechte als verkehrte Bilder und nur obiger Unterschied der Beziehung zu den beiden Raumhälften findet statt. Von ganz untergeordneter Bedeutung ist unter dem hier festgehaltenen allgemeinen Gesichtspunkt die Frage nach der Reellität oder Virtuellität der Bilder und danach, wann die einen oder anderen aufrecht bezw. verkehrt sind.

Durch Combination der beiden ad 1) betrachteten Fälle mit den ad 2) unterschiedenen ergeben sich die vier Hauptgattungen optischer Abbildung und demzufolge die Charakteristik der vier Hauptgattungen optischer Systeme

dioptrische		katoptrische	
collektive,	dispansive	collektive,	dispansive.

Alle anderen Unterscheidungen betreffen entweder nur die Grössenwerthe der Constanten, also die Maassverhältnisse der Abbildung oder die zufällige gegenseitige Lage der beiden Abbildungsräume, sind also unwesentlich.

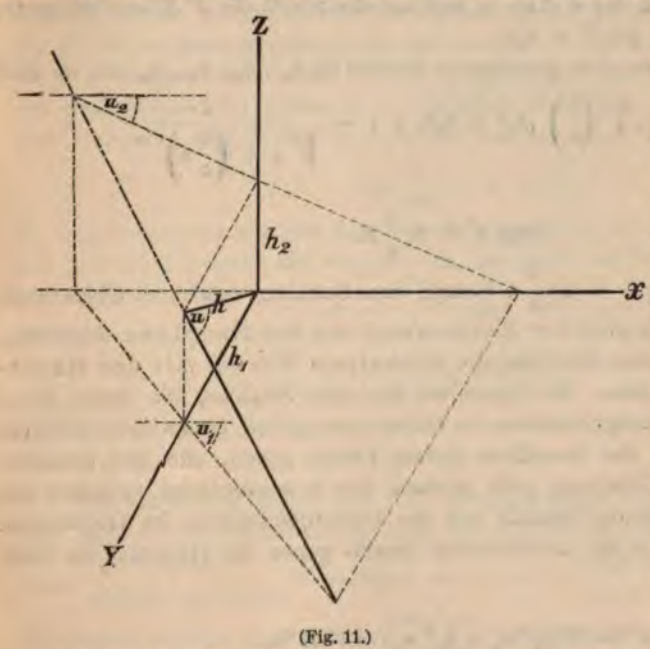
Das Eigenthümliche dieser vier Fälle kann man sich ebenfalls graphisch gut veranschaulichen, etwa indem man die jeweilig resultirenden Bilder schräg liegender Lettern A, B, von denen die eine in der einen, die andere in der anderen Hälfte des Objektraumes liegt, zeichnet (Fig. 10).



(Fig. 10.)

Gegenseitiges Entsprechen von Geraden und Büscheln.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Verhältniss von conjugirten Geraden in den beiden Räumen, da jede Gerade ja auch als Strahl aufgefasst werden kann, die Abbildung von Geraden in einander daher den eigentlichen Process, das Zustandekommen der punktweisen Abbildung näher erläutert.



(Fig. 11.)

Sei ein beliebiger gegen die x-Axe windschiefer Strahl durch seine Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Meridianebenen gegeben. Die Gleichung der einen Projection sei

$$y_1 = h_1 + x \cdot tg\, u_1,$$

die der andern

$$y_2 = h_2 + x \cdot tg\, u_2,$$

u_1 und u_2 sind darin die Winkel der Spuren gegen die x-Axe; h_1 und h_2 die Höhen, in welchen diese Spuren die Unstetigkeitsebene F schneiden (Fig. 11).

Der Strahl selbst bildet dann mit der x-Axe einen Winkel u, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$cos\, u = \frac{1}{\sqrt{tg\, u_1^2 + tg\, u_2^2 + 1}},$$

und schneidet die Unstetigkeitsebene in der Entfernung $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ v der x-Axe.

Das Bild dieser Geraden, also der dem einfallenden conjugirte Strahl, ebenfalls bestimmt durch die Gleichungen seiner Projectionen auf zwei zu einan senkrechte Meridianebenen und zwar auf diejenigen, welche selbst die Bilder im Objektraum angenommenen 1 und 2 sind; die x' seien von der Ebene F' gezählt. Alsdann sind die Spuren des Strahls im Bildraum auch selbst wie die Bilder der Spuren des Strahls im Objektraum. Ihre Gleichungen

$$y_1' = h_1' + x' \cdot tg\, u_1',$$
$$y_2' = h_2' + x' \cdot tg\, u_2',$$

— in denen h_1', h_2' und u_1', u_2' analoge Bedeutung haben, wie oben — reduci sich daher vermöge der Abbildungsgleichungen (12) und (12b) auf

$$y_1' = \left(\frac{b}{x}\right)(h_1 + x \cdot tg\, u_1) = b \cdot tg\, u_1 + b\frac{h_1}{a} \cdot x'$$

und

$$y_2' = \left(\frac{b}{x}\right)(h_2 + x\, tg\, u_2) = b \cdot tg\, u_2 + \frac{b}{a} h_2 x'.$$

Der Vergleich mit den voranstehenden ergiebt, dass

$$h_1' = \mathfrak{b} \cdot tg\, u_1; \quad h_2' = \mathfrak{b} \cdot tg\, u_2;$$
$$tg\, u_1' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_1; \quad tg\, u_2' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_2$$

ist. Der Neigungswinkel u', den das Bild des ursprünglichen Strahles mit x'-Axe einschliesst, ist nun bestimmt durch die Gleichung

$$cos\, u' = \frac{1}{\sqrt{tg^2(u_1') + tg^2(u_2') + 1}}.$$

Die Entfernung von der x'-Axe, in welcher der Strahl die F'-Ebene schnei ist gegeben durch $h' = \sqrt{h_1'^2 + h_2'^2}$.

Tragen wir hierin die oben gefundenen Werthe für h_1', h_2', u_1', u_2' ein, so w

$$cos\, u' = 1 : \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2 (h_1^2 + h_2^2) + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h\right)^2}},$$

woraus folgt

$$tang\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h.$$

Diese Gleichung $tg\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h$ besagt, dass Strahlen, welche im Objektra die Unstetigkeitsebene in gleicher Entfernung von der Hauptaxe schneid im Bildraum conjugirt sind Strahlen, die denselben Winkel mit der Hau axe derselben einschliessen. Im Speciellen sind nun Strahlen, die durch de selben Punkt der Unstetigkeitsebene im Objektraum gehen, ja conjugirt Strahl die durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene gehen, die also einan parallel sind; obige Gleichung giebt alsdann den Zusammenhang zwischen Schnitthöhe des einfallenden Strahls mit der Unstetigkeitsebene im Objektra und dem Neigungswinkel des austretenden Strahls gegen die Hauptaxe im Bi raum an.

Wir haben ferner

$$h'^2 = \mathfrak{b}^2 (tg^2 u_1 + tg^2 u_2) = \mathfrak{b}^2 tg^2 u,$$

also

$$h' = \pm \mathfrak{b} \cdot tg\, u.$$

Dies besagt, dass den Strahlen, die im einen Raum gleiche Winkel u der x-Axe bilden, im anderen Raum Strahlen entsprechen, welche die Unste

keitsebene derselben in gleicher Entfernung h' von der x-Axe schneiden. Strahlen die im Objektraum nicht nur gleiche Winkel mit der x-Axe bilden, sondern auch untereinander parallel sind, gehen durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene. Dieser ist die Unstetigkeitsebene des Bildraums conjugirt. Die Bilder dieser Strahlen gehen daher sämmtlich durch einen und denselben Punkt dieser Ebene und obige Gleichung giebt die Beziehung zwischen dem Winkel, den ein einfallender Strahl mit der Hauptaxe des Objektraumes bildet und der Entfernung von der Hauptaxe des Bildraums, in welcher der austretende Strahl die Brennebene dieses Raumes schneidet.

Die Brennweiten. Diese Sätze geben eine neue wichtige Eigenschaft der Unstetigkeitsebene an und ebenso erhalten die Constanten der Abbildung eine weitere Bedeutung. Es ist $\mathfrak{b} = \frac{h'}{tg\, u}$ das Verhältniss der Höhe, in welcher ein Strahl im Bildraum dessen Unstetigkeitsebene schneidet zur trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels, den sein conjugirter Strahl im Objektraum mit dessen Hauptaxe einschliesst. $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) = \frac{h}{tg\, u'}$ ist umgekehrt das Verhältniss der Höhe, in welcher ein Strahl im Objektraum die Unstetigkeitsebene schneidet zur trigonometrischen Tangente des Winkels unter dem sein conjugirter Strahl im Bildraum gegen dessen Hauptaxe geneigt ist.

Es sind also, wie hieraus — und auch schon aus den Abbildungsgleichungen selbst — geschlossen werden muss, die Constanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht gleichwerthig, $\mathfrak{b}$ eine Länge, $\mathfrak{a}$ das Quadrat einer solchen. Es ist daher schon aus diesem Grunde vortheilhaft, diese Constanten durch die oben sich darbietenden gleichartigen $\mathfrak{b}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ zu ersetzen. Wir wollen $\mathfrak{b} = f$; $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = f'$ setzen. Die Grössen f und f', welche in der Theorie der optischen Instrumente als Charakteristika für die Abbildungsweise angenommen sind, heissen die Brennweiten — aus Gründen, die sich aus dem historischen Entwicklungsgang der geometrischen Optik ergaben, mit dem Wesen der Sache aber eigentlich nicht sehr nahe zusammenhängen. Ihre Definition ergiebt sich sachgemäss nur aus den Gleichungen

$$f = \frac{h'}{tg\, u}; \quad f' = \frac{h}{tg\, u'}; \tag{15}$$

ihr Zusammenhang mit den Eigenschaften der durch sie charakterisirten Abbildung aus den Gleichungen, die nunmehr an die Stelle der früheren treten, nämlich

$$x' = \frac{f \cdot f'}{x} \quad \text{oder} \quad x x' = f \cdot f',$$

$$y' = \left(\frac{f}{x}\right) y = \left(\frac{x'}{f'}\right) y$$

oder

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}.$$

Für die Charakteristik der vier Hauptgattungen optischer Abbildung ergiebt sich gemäss diesen Gleichungen und den früheren Betrachtungen die Bestimmung, dass $\begin{matrix}\text{gleiches}\\ \text{entgegengesetztes}\end{matrix}$ Vorzeichen von f und f' $\begin{matrix}\text{rückläufige (katoptrische)}\\ \text{rechtläufige (dioptrische)}\end{matrix}$ Abbildungen bedeutet und dabei $\begin{matrix}\text{positives}\\ \text{negatives}\end{matrix}$ f die früher näher angegebenen Eigenschaften der Abbildung durch $\begin{matrix}\text{collektive}\\ \text{dispansive}\end{matrix}$ Systeme bestimmt.

Der Anschauung am nächsten kommt und praktisch am besten anwendbar

ist die, sich aus den obigen Bestimmungsgleichungen ohne weiteres ergebende Definition der Brennweiten von GAUSS.

Die erste Brennweite (die des Objektraums) ist das Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des Bildraums gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Grösse seines unendlich entfernten Objekts und analog: die zweite Brennweite gleich dem Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des Objektraums gelegenen Objekts zur scheinbaren Grösse seines (unendlich entfernten) Bildes.

Die Vorzeichen von f und f' geben hierbei zugleich an, ob die betreffenden Bilder aufrecht oder umgekehrt sind, indem in jeder Meridianebene auch $f = \frac{h'}{tg\,u}$ und $f' = \frac{h}{tg\,u'}$ ist, also bei $\frac{\text{positivem}}{\text{negativem}}$ f sich Werthe $\frac{\text{gleichen}}{\text{entgegengesetzten}}$ Vorzeichens von h' und u entsprechen; ebenso bei $\frac{\text{positivem}}{\text{negativem}}$ f' Werthe $\frac{\text{gleichen}}{\text{entgegengesetzten}}$ Vorzeichens von h und u'.

Das Convergenzverhältniss. Kehren wir zu der Betrachtung der Abbildung einer Geraden in eine andere zurück und beschränken wir uns auf den Fall, dass die Gerade in einer Meridianebene liegt, also die Axe schneidet, dann liegt ihr Bild in einer Meridianebene des Bildraums und nennen wir nun wieder u und u' die Winkel, unter welchen die Axe im Objekt und Bildraum geschnitten wird, h resp. h' die Schnitthöhen in den Unstetigkeitsebenen, dann ist, wie ersichtlich (vergl. Fig. 11)

$$h = -x\,tg\,u \qquad h' = -x'\cdot tg\,u.$$

Es war aber

$$h = f'\cdot tg\,u' \qquad h' = f\cdot tg\,u.$$

Es folgt hieraus das Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahl-Axen-Winkel in jeder Meridianebene

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'},$$

also unabhängig von u resp. u', daher constant für das Paar conjugirter Axenschnittpunkte, deren Abscissen x und x' sind.

Wir bezeichnen dieses für die Theorie der optischen Systeme ebenfalls sehr wichtige Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahlaxenwinkel als das **Convergenzverhältniss** oder die **Angularvergrösserung**.

Anmerkung. Gegenüber manchen Darstellungen, die von der Betrachtung der speciellen dioptrischen Abbildung ausgehen und diese dann verallgemeinern, mag hervorgehoben werden: 1) Dass, wie oben von selbst ersichtlich, es das Verhältniss der Tangenten und nicht der Sinus ist, welches für conjugirte Axenpunkte constant ist. Für unendlich kleine Winkel fallen natürlich beide zusammen. 2) Dass in Folge dessen das Verhältniss der Tangenten und ebenso anderer trigonometrischer Function der Winkel, welche zwei Strahlen mit einander bilden, nicht mehr in gleich einfacher Weise bestimmbar ist, wie das der Strahlen gegen die Axe weder für Strahlen, die ihren Divergenzpunkt auf der Axe noch für solche, die ihn ausserhalb derselben haben, sondern dass dieses Verhältniss von den Winkeln der einzelnen Strahlen gegen die Axe abhängt. Man kann daher nicht von einem Convergenzverhältniss in conjugirten Ebenen schlechthin sprechen, wie von einem Vergrösserungsverhältniss in solchen. Die vorangegangenen Entwicklungen beweisen vielmehr indirekt, dass die Constanz des Convergenzverhältnisses in conjugirten Ebenen im Widerspruch steht mit der Möglichkeit der Abbildung endlicher Räume durch homocentrische Strahlenvereinigung. Nur für sehr kleine Winkel u und u' kann man, unter Vernachlässigung von Grössen, die dem Quadrat dieser Winkel proportional sind,

das Convergenzverhältniss der Winkel conjugirter Strahlen als constant hinstellen für Divergenzpunkte innerhalb eines Paares conjugirter Ebenen.

Beziehungen zwischen den drei Vergrösserungen. Die Vergleichung der Formeln, welche wir für β und γ hergeleitet haben, zeigt sofort den einfachen Zusammenhang, welcher zwischen diesen beiden Grössen besteht, nämlich

$$\beta \cdot \gamma = -\frac{f}{f'}.$$

Das Produkt des Vergrösserungsverhältnisses in zwei conjugirten Ebenen und des Convergenzverhältnisses der Strahlen in den Axenpunkten dieser Ebenen ist constant für eine gegebene Abbildung (gegebenes optisches System).

Je nachdem f und f' $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleiches}}{\text{entgegengesetztes}}$ Vorzeichen haben, d. h. die Abbildung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{katoptrisch}}{\text{dioptrisch}}$ ist, entspricht eine positive Vergrösserung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativem}}{\text{positivem}}$ Convergenzverhältniss und eine negative Vergrösserung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positivem}}{\text{negativem}}$ Convergenzverhältniss, mit anderen Worten: bei der katoptrischen (rückläufigen) Abbildung werden aufrechte Bilder zu Stande gebracht durch Strahlen, die in Objekt und Bild entgegengesetzt gegen die Axe geneigt sind, umgekehrte Bilder durch gleichseitig geneigte; bei der dioptrischen (rechtläufigen) Abbildung findet das umgekehrte Verhältniss statt.

Die bisher abgeleiteten, auf die Unstetigkeitsebenen in beiden Räumen bezogenen Formeln sind, in Kürze zusammengestellt:

Für Brennpunktsabstände conjugirter Axenpunkte

$$x \cdot x' = f \cdot f',$$

für die Tiefenvergrösserung

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{f \cdot f'}{x^2} = -\frac{x'}{x},$$

für die Lateralvergrösserung (I)

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'},$$

für das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'}.$$

Durch Combination dieser mit einander erhalten wir:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = -\frac{f'}{f} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{f'}{f} \cdot \beta = \frac{1}{\gamma}$$

$$\beta \cdot \gamma = -\frac{f}{f'} \qquad \frac{\beta}{\gamma} = \alpha = -\frac{f}{f'}\,\frac{1}{\gamma^2}, \tag{I*}$$

daher auch noch

$$\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} = 1.$$

Dieses sind die Beziehungen, welche für jede durch geradlinige Strahlen vermittelte punktweise Abbildung zweier endlichen Räume in einander gelten.

Die Cardinalpunkte eines optischen Systems.

Wie diese Formeln aufs einfachste zeigen, können sowohl die Grössen α, β und γ selbst, als auch ihre Verhältnisse zu einander jeden Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen, wenn x und x' beliebig variirt werden dürfen.

Einige von diesen Werthen sind von ausgezeichneter Bedeutung, sei es für

die Vereinfachung von später abzuleitenden Formeln, sei es für die praktische Beobachtung; es sind dies im besonderen die Stellen der Axe, wo

1) die Tiefenvergrösserung den Werth $+1$ oder -1 hat. In jedem optischen System giebt es zwei Paar Punkte, wo das eine oder das andere (je nachdem das System recht- oder rückläufig ist) statt hat, d. h. einer unendlich kleinen Verschiebung des Objekts auf der Axe eine gleichgrosse und gleich- oder entgegengesetzte Verschiebung des Bildes entspricht. Diese Punkte haben, soviel Verfasser bekannt, keine besondere Benennung erhalten.

2) die Punkte der Axe, wo die Lateralvergrösserung $= +1$ und die, wo dieselbe $= -1$ ist, d. h. Objekt und Bild gleich gross und gleich oder verkehrt gelegen sind. Erstere sind von GAUSS[1]) »Hauptpunkte«, die durch sie gehenden zur Axe senkrechten Ebenen »Hauptebenen« genannt worden; letztere, von TÖPLER[2]) hinzugefügt, von ihm analog als »Hauptpunkte bezw. Hauptebenen der zweiten Art« negative Hauptpunkte bezw. Hauptebenen bezeichnet.

3) Die Stellen der Axe, wo das Convergenzverhältniss $= +1$ bezw. $= -1$ ist, d. h. Punkte von der Beschaffenheit, dass einem Strahl, der im Objektraum nach dem einen hinzieht, im Bildraum ein Strahl entspricht, der unter gleichem resp. entgegengesetztem Winkel gegen die Axe von dem conjugirten Punkte ausgeht. Diese Punkte sind, die ersteren von LISTING[3]) eingeführt und Knotenpunkte genannt, die letzteren von TÖPLER[2]) hinzugefügt und wieder als negative Knotenpunkte von den ersteren unterschieden.

In der folgenden Tabelle sind die zusammengehörigen Werthe von α, β, γ, x und x' aufgeführt. Dieselbe zeigt, dass die Knotenpunkte zugleich diejenigen Stellen der Axe sind, in welchen $\alpha = \beta$ ist, d. h. in welchen eine zur Axe senkrechte Schicht in allen drei Dimensionen ähnlich abgebildet wird; und dass in den Punkten wo $\alpha = \pm 1$ 1 ist, $\beta = \pm \gamma$ ist.

α	β	γ	x	x'
$+1$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-f\cdot f'}$	$\mp\sqrt{-f\cdot f'}$
-1	$\pm\sqrt{\frac{f}{f'}}$	$\mp\sqrt{\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{f\cdot f'}$	$\pm\sqrt{f\cdot f'}$
$-\frac{f'}{f}$	$+1$	$-\frac{f}{f'}$	$+f$	$+f'$
$-\frac{f'}{f}$	-1	$+\frac{f}{f'}$	$-f$	$-f'$
$-\frac{f}{f'}$	$-\frac{f}{f'}$	$+1$	$-f'$	$-f$
$-\frac{f}{f'}$	$+\frac{f}{f'}$	-1	$+f'$	$+f$

Ausser diesen conjugirten Punktpaaren haben manche Autoren noch andere theils ebenfalls conjugirte, theils auch nur analog gelegene Paare von Punkten

[1]) Dioptr. Unters. pag. 13. Bemerkt und hervorgehoben wurden sie schon von MÖBIUS, CRELLE's Journ. 5, pag. 113. 1830, für einen specielleren Fall (unendlich dünne Linsen).

[2]) l. c.

[3]) Beitrag zur physiol. Optik. Göttingen 1845. Art. Dioptrik des Auges in R. WAGNER's Handwörterbuch der Physiologie. Braunschweig 1853. Bd. 4, pag. 451.

eingeführt[1]). Wir finden unsererseits keinerlei Nutzen in der Anwendung derselben, wohl aber eine Verminderung der ohne sie bestehenden Uebersichtlichkeit der Verhältnisse. Wir werden auch von den meisten der oben charakterisirten Punkte nur selten Anwendung zu machen haben. Hingegen werden wir später Veranlassung haben, weitere Punktpaare einzuführen und zu benützen, welche von einem anderen Gesichtspunkte aus, als dem der allgemeinen Abbildung, ein Interesse und praktische Bedeutung haben.

Graphische Constructionen.

Jedes optische System ist, wie wir gesehen haben, durch vier Bestimmungsstücke, nämlich durch die Orte der Brennebenen und die Werthe der Brennweiten vollständig bestimmt. Es wird auch durch zwei von den oben angeführten Paaren von Cardinalpunkten oder durch eins von diesen in Verbindung mit einem der soeben genannten Elemente eindeutig bestimmt, wie wir noch näher sehen werden. Die sogen. Cardinalpunkte bieten die Möglichkeit, auf graphischem Wege in sehr einfacher Weise zu einem Punkt oder Strahl den conjugirten Punkt oder Strahl zu ermitteln.

Diese Constructionen, welche vom geometrischen Gesichtspunkte aus ganz interessant sind, haben für uns eine untergeordnete Bedeutung. Es sei desshalb auf die einschlägige Literatur verwiesen[2]) und hier nur die eine Aufgabe behandelt: »Zu einem Punkte P den conjugirten P' finden, wenn die Brennpunkte F, F' und Brennweiten f, f' gegeben sind« (Fig. 12 a. f. S.). Mit den Brennebenen und Brennweiten sind ja indirekt (gemäss der Tabelle auf voriger Seite) auch die beiden Paare von Hauptpunkten gegeben — indem man nur von F aus beiderseits die Strecke f, von F' aus f' abzutragen hat, und ebenso die beiden Paare von Knotenpunkten — indem man von F aus beiderseits f', von F' aus f auf der Axe abträgt — und damit ist die Möglichkeit gegeben, gleich deren Eigenschaften zur Construction mit zu benützen und umgekehrt. Denken wir uns auf diese Weise z. B. die (positiven) Hauptebenen H, H' gezeichnet, so lassen wir vom gegebenen Punkte P einen Strahl parallel zur x-Axe ausgehen; er schneidet die Hauptebene H in der Entfernung h. Der conjugirte Strahl schneidet dann die Hauptebene H' in derselben Höhe und geht durch den zweiten Brennpunkt F', ist also völlig bestimmt. Ein zweiter Strahl gehe von P durch F und schneide H in der Entfernung $h' (= f \cdot tg\, u)$. Der conjugirte Strahl schneidet H' in gleicher Höhe und ist der Axe x' parallel, also ebenfalls bestimmt. P' liegt im Schnittpunkte dieser beiden Strahlen.

---

[1]) Siehe Drews, Exner's Rep. d. Phys. 25, pag. 707. 1889, wo die einschlägige Literatur theilweise citirt wird.

[2]) Ausser den bereits angeführten Abhandlungen von Gauss, Listing, Lippich, Beck und Töpler die meisten Darstellungen dieser sogen. Gauss'schen Theorie; insbesondere

Cl. Maxwell, On the general laws of optical instruments. Phil. Mag. 1856 und Quart. Journ. 2, pag. 233. 1858.

Gavarret, Des images par réflexion et par réfraction. Rev. des cours scientif. Paris 1866.

C. Neumann, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystemes. Leipzig 1866.

A. Martin, Interprétation géométrique et continuation de la théorie des lentilles de Gauss. Thèses prés. à la Fac. des Sci. de Paris 1867. Ann. de Chim. et de Phys. (4) 10. 1867.

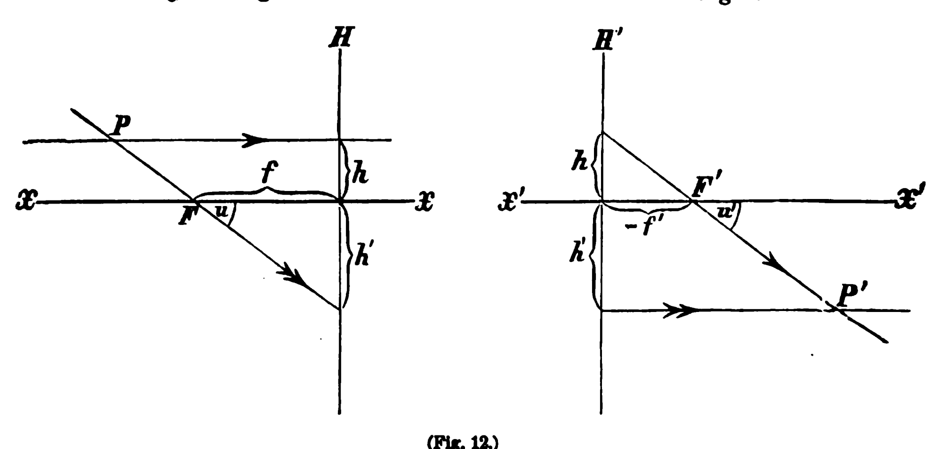
E. Reusch, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Leipzig 1870.

G. Ferraris, die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Turin 1877. Uebersetzung von Lippich. Leipzig 1879.

Kessler, Beiträge zur graphischen Dioptrik. Jahresb. Gewerbeschule Bochum 1880.

C. M. Gariel, Etudes d'optique géométrique. Paris 1889.

Die analogen Aufgaben werden meist in ähnlicher Weise gelöst.



(Fig. 12.)

Die Abbildungsgleichungen bezogen auf conjugirte Punkte.

Wir haben zuletzt stets von den Gleichungen (12) Gebrauch gemacht, in welchen die Abscissen beider Räume von den Unstetigkeitsebenen derselben an gemessen sind. Schon um den singulären Fall der teleskopischen Abbildung behandeln zu können, dann aber auch aus praktischen Gründen wollen wir die vorher gewonnenen Resultate auch auf die Form (13) der Abbildungsgleichungen anwenden, in welchen die Abscissen von einem Paar conjugirter Punkte an gemessen sind.

Um nicht alle Betrachtungen in wenig veränderter Form noch einmal bei diesen Gleichungen (13) wiederholen zu müssen, gehen wir vielmehr von den schon eingeführten Beziehungen und Gleichungen aus und verschieben nur die Coordinatensysteme entsprechend in Richtung der x-Axe. Seien die Abscissen eines Paares conjugirter Punkte — der neuen Anfangspunkte — bezogen auf die Brennebenen x_0 und x_0', die eines beliebigen anderen Paares bezogen auf die selben Ebenen x und x', dann sind die Abscissen der letzteren, bezogen auf die ersteren als Anfangspunkte, $\xi = x - x_0$ und $\xi' = x' - x_0'$, und wir haben die Beziehungen zwischen diesen Grössen und den Brennweiten

$$x_0 \cdot x_0' = f \cdot f'$$

und

$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

oder

$$(x_0 + \xi)(x_0' + \xi') = f \cdot f',$$

was unter Benützung der ersteren Gleichung übergeht in

$$x_0'\xi + x_0\xi' + \xi\xi' = 0$$

oder

$$\frac{x_0'}{\xi'} + \frac{x_0}{\xi} + 1 = 0. \qquad \text{(II)}$$

Diese Gleichung drückt die Abscissen der conjugirten Punkte bezogen auf ein Grundpaar von solchen aus durch die Entfernung der Grundpunkte von den Brennebenen (bei HELMHOLTZ[1]) und Anderen, umgekehrt durch die Abscissen der Brennebenen in Bezug auf die Grundpunkte; daher die Verschiedenheit der Vorzeichen in dem constanten Gliede hier und bei jenen.

[1]) Physiol. Optik. Hamburg u. Leipzig, 1. Aufl. 1867, 2. Aufl. 1888, § 9, u. Wissensch. Abhandlungen. Leipzig 1883, 2, pag. 94, 98.

Die Gleichung für die Vergrösserung wird ohne weiteres aus der früher abgeleiteten

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x_0' + \xi'}{f'} = \frac{f}{x_0 + \xi};$$

ebenso das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg u'}{tg u} = -\frac{x_0 + \xi}{f'} = -\frac{f}{x_0' + \xi'}.$$

Um von den Abscissen der Brennebenen in Bezug auf die neuen Coordinatenanfangspunkte ganz unabhängig zu werden, können wir statt derselben die Brennweiten f und f', und die in den Grundpunkten bestehende Vergrösserung $\beta_0 = \frac{x_0'}{f'} = \frac{f}{x_0}$ einführen. Es wird dann die Abscissengleichung:

$$\frac{f'}{\xi'}\beta_0 + \frac{f}{\xi}\frac{1}{\beta_0} + 1 = 0,$$

die Ordinatengleichung

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f'\beta_0 + \xi'}{f'} = \frac{f\beta_0}{f + \xi\beta_0} \qquad \text{(II*)}$$

und das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg u'}{tg u} = -\frac{(f + \xi\beta_0)}{f'\beta_0} = -\frac{f}{f'\beta_0 + \xi'}.$$

Diese Gleichungen erhalten eine besonders einfache Form, wenn man als Grundpunkte solche wählt, in denen β_0 einen geeigneten Werth hat. Die wichtigste derselben ist die auf die Hauptpunkte bezogene, in welchen $\beta_0 = +1$ ist; nämlich es wird dann

$$\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} + 1 = 0,$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f + \xi} = \frac{f' + \xi'}{f'}, \qquad \text{(II**)}$$

$$\gamma = \frac{tg u'}{tg u} = -\frac{f}{f' + \xi'} = -\frac{f + \xi}{f}.$$

Um Verwechslungen mit den von anderen Autoren, z. B. HELMHOLTZ abgeleiteten Gleichungen zu vermeiden, sei nochmals daran erinnert, dass hier die Abscissen in beiden Räumen von den betreffenden Punkten in gleichem Sinne, nämlich in der Richtung der Lichtbewegung als positiv gerechnet sind.

Bezieht man die Abscissen auf die negativen (TÖPLER'schen) Hauptebenen, in welchen $\beta_0 = -1$ ist, so erhält man entsprechend

$$\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} - 1 = 0$$

und

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f - \xi} = \frac{\xi' - f'}{f'} \text{ etc.,}$$

also gleiche Ausdrücke wie HELMHOLTZ für die positiven Hauptebenen erhält indem er ξ' entgegengesetzt misst wie ξ und die Vorzeichen der Brennweiten umgekehrt bestimmt, wie wir es thaten.

Aehnlich liesse sich statt β_0, γ_0 einführen und einfache Gleichungen herleiten, welche bezogen sind auf die Knotenpunkte, in welchen $\gamma_0 = \pm 1$ ist. Doch haben solche Gleichungen Werth nur in speciellen Fällen.

Teleskopische Abbildung.

Die im letzten Abschnitt hergeleiteten Gleichungen behalten ihre Anwendbarkeit auch in dem Falle der teleskopischen Abbildung. Das Charakteristische

desselben ausgedrückt durch die neuen Constanten f und f' ist, wie der Vergleich mit den Einführungsgleichungen für diese lehrt, dies, dass in ihm die Brennweiten beide unendlich gross werden, aber constantes endliches Verhältniss behalten.

Bringt man durch Division mit f bezw. f' die Gleichungen (II*) auf eine Form, in welcher theils $\frac{f'}{f}$ theils f oder f' allein als Faktoren bezw. Divisoren auftreten und setzt dann f und $f' = \infty$, so wird die Abscissengleichung

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\beta_0^2 \left(\frac{f'}{f}\right) = const\,(\xi', \xi),$$

ferner

$$\beta = \frac{y'}{y} = \beta_0 = const\,(\xi', \xi)$$

entsprechend den früher für diesen Fall abgeleiteten Gleichungen (14).

Im Falle der teleskopischen Abbildung hat das Convergenzverhältniss γ eine besondere praktische Bedeutung; denn bei der Abbildung eines unendlich entfernten Objektes in ein unendlich entferntes Bild kann man ja nur noch von diesem, d. i. der Angularvergrösserung, reden.

Gemäss den allgemein giltigen Gleichungen (I*) ist $\gamma = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\beta_0}$, also ebenfalls constant $= \gamma_0$.

Durch den Werth dieser Angularvergrösserung ausgedrückt wird demnach das Verhältniss conjugirter Abscissen, gemessen von einem Paare conjugirter Punkte an,

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{d\xi'}{d\xi} = \alpha_0$$

und das Verhältniss conjugirter Ordinaten (III)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0} = \beta_0.$$

Gesetze der Combination optischer Systeme.

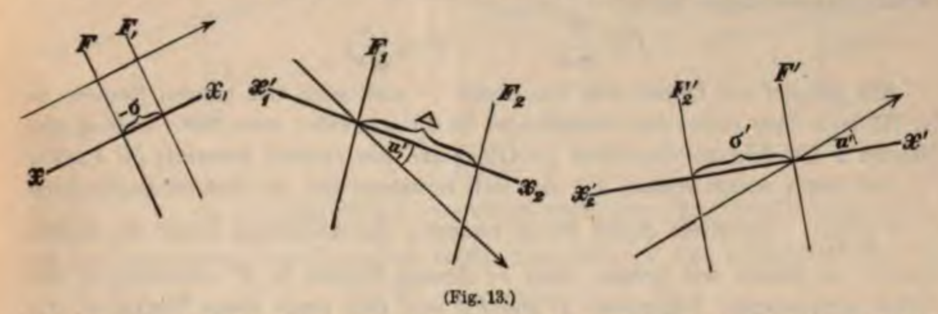
Der Bildraum einer gegebenen ersten Abbildung kann Objektraum einer zweiten sein u. s. f. Den Effekt dieser zwei (oder mehr) successiven Abbildungen kann man als eine einzige Abbildung auffassen, deren Bestimmungsstücke der Lage und Richtung bezw. Grösse nach von den Bestimmungsstücken der einzelnen Abbildungen und deren gegenseitiger Lage abhängen. Dies ist ein praktisch sehr wichtiges Moment. Denn physisch wird eine Abbildung fast stets durch eine Reihe successiver Einzelabbildungen vermittelt. Die Gesammtheit der physikalischen Agentien, durch welche die von den Punkten eines Objektraumes divergirenden Lichtstrahlen in Punkten des Bildraums vereinigt werden und so das zu Stande bringen, was wir eine »optische Abbildung« genannt haben, heisst das »optische« oder »abbildende System«. Das optische System ist der reale Träger der Abbildung, und die Bestimmungsstücke, welche wir bisher vom rein geometrischen Standpunkte aus einer »Abbildung« zusprachen, können wir in concreterer Ausdrucksweise dem optischen System zuertheilen, welches die betr. Abbildung zu Stande bringt. Ein optisches System ist fast stets zusammengesetzt aus Partialsystemen, die jedes für sich ebenfalls eine Abbildung herbeiführen. Wenn wir studirt haben, wie die Abbildung des Gesammtsystems sich berechnet aus den Abbildungsconstanten und der gegenseitigen Lage der Partialsysteme, so wird es weiterhin genügen, die speciellen Abbildungsweisen der letzten Elementarsysteme zu studiren, in die man ein gegebenes zer-

legen kann, um mit Hilfe jener vorher erhaltenen Combinationsgesetze die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems vollständig berechnen zu können.

Zusammensetzung zweier Abbildungen (zweier optischer Systeme).

a) Zusammensetzung zweier endlicher Abbildungen zu einer endlichen.

Machen wir die beschränkende — in Praxi aber stets sehr annähernd erfüllte — Annahme, dass die Axe des Bildraums des ersten Systems zusammenfalle mit der Axe des Objektraums des zweiten Systems[1]). (Gewöhnlich wird die unnöthige Annahme gemacht, dass alle 4 Axen zusammenfallen.) Seien dann F_1, F_1' die Brennebenen, f_1, f_1' die Brennweiten des ersten



(Fig. 13.)

Systems; F_2, F_2', f_2, f_2' ebenso die Brennebenen und Brennweiten des zweiten Systems, wobei Ebene $F_2 \parallel F_1'$, und sei endlich die Lage der beiden Systeme gegen einander gegeben durch den (im Sinne der Lichtbewegung gemessenen) Abstand der Objekt-Brennebene des zweiten Systems (F_2) von der Bild-Brennebene des ersten (F_1') also $F_1' F_2 = \Delta$.

Dann ist die Abbildung des ganzen aus den Systemen I und II zusammengesetzten Systems bestimmt, wenn die Lage seiner Brennebenen F, F' und die Grösse seiner Brennweiten f, f' ermittelt ist.

Zunächst 1) geht aus den gemachten Annahmen hervor, dass die Brennebene F parallel ist F_1 und F' parallel F_2'; denn den zur Ebene F_1 parallelen Ebenen entsprechen im Bildraum von I Ebenen, die zu F_1' parallel sind, also laut Annahme auch zu F_2; letzteren aber entsprechen Ebenen, die zu F_2' parallel sind, also schliesslich den zu $F_1 \parallel$ Ebenen solche, die zu $F_2 \parallel$ sind. Wir sahen aber pag. 31, dass es im Allgemeinen bei jeder optischen Abbildung nur eine Schaar von parallelen Ebenen im einen Raume giebt, welcher eine ebensolche im anderen entspricht, und dass diesen die Unstetigkeitsebenen der betreffenden Räume parallel sind. Ferner

2) Die Objektaxe des ersten Systems ist Objektaxe, die Bildaxe des zweiten Systems Bildaxe des Gesammt-Systems. Denn diese Axen sind, wie leicht ersichtlich, Bilder von einander und gemäss unseren allgemeinen Betrachtungen giebt es nur ein Paar zu den Brennebenen senkrechter Geraden, die zu einander conjugirt sind, welche Geraden wir zu Hauptaxen der Abbildung wählten.

3) Die Orte der Brennebenen F und F' ergeben sich aus der Ueberlegung, dass F', als die der unendlich fernen Ebene des Objektraums in Bezug auf das ganze System conjugirte Ebene, conjugirt sein muss der Ebene F_1' in Bezug auf

[1]) Wenn die Objektaxe des zweiten Systems nicht coincidirt mit der Bildaxe des ersten, so sind auch die Objekt- und Bildaxen des ganzen Systems im Allgemeinen der Lage und Richtung nach verschieden von denen des ersten bezw. zweiten Systems. Doch müssen wir auf ein näheres Eingehen auf diesen Fall hier verzichten.

das System II. Bezeichnen wir den — wieder im Sinne der Lichtbewegung gemessenen Abstand der F' von F_2' mit σ', so ist σ' der in Bezug auf II conjugirte Brennpunktsabstand zu der Strecke $F_2 F_1' = -\Delta$, also

$$\sigma' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}.$$

Ganz analog erhält man $\sigma = +\frac{f_1 f_1'}{\Delta}$, den Abstand der Ebene F von F_1, im gleichen Sinne gemessen, wenn F als die in Bezug auf System I zu F_2 conjugirte Ebene betrachtet wird.

4) Um die Grössen der Brennweiten zu finden, gehen wir auf deren Definitionsgleichungen zurück

$$f = \frac{h'}{tg\,u} \qquad f' = \frac{h}{tg\,u'}.$$

Ein parallel zur Objekt-Axe des ersten — also auch des ganzen Systems in der Höhe h über dieser Axe einfallender Strahl schneidet nach Durchsetzung des Systems I die Bildaxe desselben (= Objektaxe des zweiten Systems) im Punkte F_1' und unter einem Winkel u_1', der sich bestimmt aus der Definitionsgleichung $f_1' = \frac{h}{tg\,u_1'}$. Unterliegt dieser Strahl nunmehr der Abbildung durch das zweite System, so wissen wir bereits, dass er dessen Bildaxe in F' schneidet, in der vorhin angegebenen Entfernung σ' von F_2' und dies unter einem Winkel u', der sich bestimmt aus der Gleichung für das Convergenzverhältniss in conjugirten Axenpunkten, nämlich hier

$$\frac{tg\,u'}{tg\,u_1'} = -\frac{x_2}{f_2'} = +\frac{\Delta}{f_2'}.$$

Diese Gleichung combinirt mit der für u_1' ergiebt

$$f' = \frac{h}{tg\,u'} = +\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}.$$

Ganz ebenso erhält man durch Verfolgung eines zur Bildaxe des zweiten (und ganzen) Systems parallel austretenden Strahls nach rückwärts

$$f = \frac{h'}{tg\,u} = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}.$$

Durch diese 4 Grössen σ, σ', f, f', und die gemachten Lagenbestimmungen ist die Abbildung des ganzen Systems vollständig definirt.

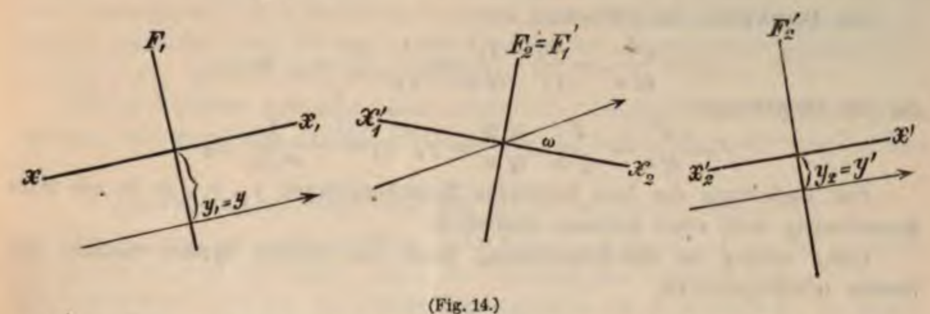
Die angegebenen Formeln gestatten, in sehr einfacher Weise zu übersehen, wie die Lagen der resultirenden Brennebenen und die Grössen und Vorzeichen der resultirenden Brennweiten abhängen von den Brennweiten der Partialsysteme und der Grösse Δ, dem »optischen Abstand« derselben. Indem wir diese Discussion für später aufsparen, wo wir sie an concrete Fälle anknüpfen können, weisen wir hier nur im Allgemeinen auf die durch die Variabilität von Δ gegebene grosse Variabilität der Endgrössen bei gegebenen f_1, f_2, f_1', f_2' hin.

b) Zusammensetzung zweier endlicher Systeme zu einem teleskopischen.

Im Besonderen kann der Fall eintreten, dass $\Delta = 0$ ist, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems zusammenfällt mit dem hinteren Brennpunkt des ersten. Alsdann wird $f = \infty$ und auch $f' = \infty$, also die Abbildung eine teleskopische. Das Verhältniss von f zu f' jedoch bleibt ein endliches, wie schon daraus hervorgeht, dass gemäss den obigen Formeln

$$\frac{f'}{f} = m = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_2} = -\left(\frac{f_1'}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right) \text{ ist.}$$

Um in diesem Falle die Constanten der Abbildung, aus denen der Partialsysteme zu berechnen, genügt die einfache Betrachtung, dass ein parallel zur Axe eintretender Strahl durch den gemeinsamen Brennpunkt beider Partialsysteme gehen und parallel der Axe aus dem zweiten wieder austreten muss. Das Vergrösserungsverhältniss $\frac{y'}{y} = \beta$, welches für alle Punkte der Axe constant ist, ist nun



(Fig. 14.)

$= \frac{y'}{tg\,w} : \frac{y}{tg\,w'}$, wenn w den Winkel bezeichnet, unter dem ein in der Höhe y parallel zur Axe einfallender Strahl zwischen beiden Systemen die Axe schneidet. Also ist

$$\frac{y'}{y} = \beta_0 = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Hiernach die Angularvergrösserung

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = \gamma_0 = -\frac{1}{m\beta_0} = +\frac{f_1}{f_2'}$$

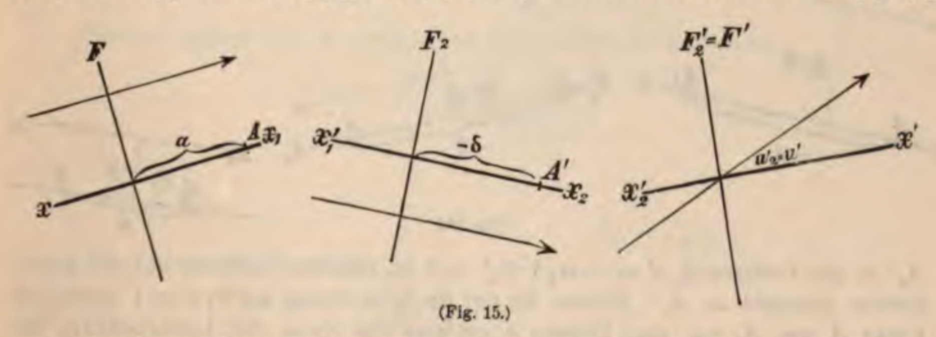
und das Verhältniss conjugirter Abscissen in unserer früheren Bezeichnung

$$\frac{\xi'}{\xi} = -m\beta_0^2 = +\frac{f_2 \cdot f_2'}{f_1 f_1'}.$$

Die Lage eines Paars conjugirter Punkte muss besonders bestimmt werden. Ein solches Paar sind aber offenbar hier (wie immer) der vordere Brennpunkt des ersten Systems und der hintere des zweiten.

c) Combination zweier Systeme, von denen das eine ein teleskopisches ist.

Sei das erste ein teleskopisches und durch den Werth von β_1 oder γ_1, sowie durch die Lage zweier conjugirter Punkte A, A' und das Verhältniss von $f_1' : f_1$



(Fig. 15.)

$= m_1$ bestimmt. Das zweite sei durch F_2, F_2', f_2, f_2' bestimmt, und die gegenseitige Lage der beiden Systeme durch den Abstand von F_2 gegen den Punkt A', $A'F_2 = \delta$. Die Bildaxe des vorderen Systems coincidire wieder mit der Objektaxe des hinteren. Dann ist der hintere Brennpunkt des zweiten Systems auch der des ganzen Systems, da parallel zur Axe einfallende Strahlen zwischen beiden

Systemen parallel zur Axe verlaufen, also auch ebenso auf das zweite System auffallen. Der vordere Brennpunkt des ganzen Systems ist leicht zu berechnen, als der in Bezug auf das vordere (teleskopische System) zum vorderen Brennpunkt des zweiten Systems conjugirte. Sein Abstand a von A berechnet sich gemäss (III) zu

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2} \quad \text{oder} \quad a = -m_1 \delta \cdot \gamma_1^2.$$

Die Brennweite des Bildraums ist

$$f' = \frac{h}{tg\,u'} = \frac{y_1}{y_1'} \cdot \frac{y_1'}{tg\,u'} = \frac{1}{\beta_1} \cdot f_2' = -m_1 \gamma_1,$$

die des Objektraums

$$f = \frac{h'}{tg\,u} = \frac{h'}{tg\,w} \cdot \frac{tg\,w}{tg\,u} = f_2 \cdot \gamma_1 = -\frac{1}{m_1 \beta_1} \cdot f_2.$$

Die Bedeutung der hier benützten Zwischengrössen y_1, y_1', w ist aus ihrer Bezeichnung wohl ohne weiteres ersichtlich.

Ganz analog ist die Betrachtung, wenn das vordere System endlich, das hintere teleskopisch ist.

d) Combination zweier teleskopischer Abbildungen.

Jede sei durch die Werthe von β oder γ, und die Lage eines Paars conjugirter Punkte A_1, A_1'; A_2, A_2', sowie die Verhältnisse $m_1 = \left(\frac{f_1'}{f_1}\right)$; $m_2 = \left(\frac{f_2'}{f_2}\right)$ gegeben; die gegenseitige Lage durch den Abstand $A_1' A_2 = \delta$.

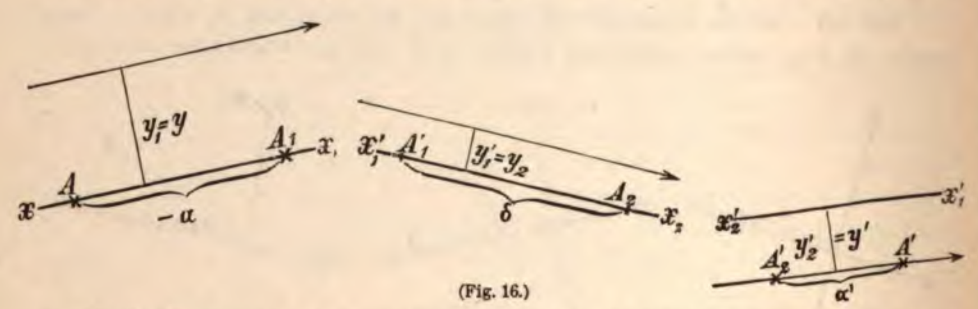
Die resultirende Abbildung ist, wie leicht einzusehen, ebenfalls teleskopisch. Ihr Vergrösserungsverhältniss $\beta = \frac{y'}{y}$, sowie ihr Convergenzverhältniss γ je gleich dem Produkt der betreffenden Verhältnisse der Einzelsysteme. Denn

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{y'}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y} = \beta_2 \cdot \beta_1$$

ebenso

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = \frac{tg\,u'}{tg\,w} \cdot \frac{tg\,w}{tg\,u} = \gamma_2 \cdot \gamma_1.$$

Die Lage eines, und sogar zweier Paare conjugirter Punkte ist ebenfalls leicht ermittelt, denn der zu A_1' in Bezug auf System 2 conjugirte Punkt A' liegt von



(Fig. 16.)

A_2' in der Entfernung $a' = -m_2 \delta \cdot \beta_2^2$ und ist offenbar in Bezug auf das ganze System conjugirt zu A_1. Ebenso ist der zu A_2 in Bezug auf System 1 conjugirte Punkt A von A_1 um eine Strecke a entfernt (im Sinne des Lichteinfalls!), die gegeben ist durch

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2}.$$

Wir haben also im Ganzen das Resultat: Durch Combination zweier endlicher Systeme entsteht im Allgemeinen eine endliche,

nur in einem Falle eine teleskopische Abbildung. Durch Zusammensetzung zweier teleskopischer Abbildungen entsteht immer eine teleskopische; durch Zusammentritt einer endlichen und einer teleskopischen Abbildung immer eine endliche.

Umgekehrt lässt sich nach denselben Betrachtungen und Formeln eine gegebene endliche Abbildung immer in zwei endliche oder in eine endliche und eine teleskopische Theil-Abbildung zerlegen; eine gegebene teleskopische Abbildung entweder auch in zwei endliche (mit den zugewandten Brennpunkten coincidirende) oder in zwei teleskopische. —

Unsere Formeln gestatten ohne weiteres die Ausdehnung auf beliebig viele Systeme, wobei wir uns auf den Fall lauter endlicher Systeme beschränken wollen.

Zusammensetzung beliebig vieler endlicher Systeme.

Der Abstand der vorderen Brennebene des Gesammtsystems von der vorderen des ersten Systems sei wieder mit σ, der Abstand der hinteren Brennebene des Gesammtsystems von der des letzten Einzelsystems mit σ' bezeichnet; die Brennweiten der Einzelsysteme mit $f_1, f_1'; f_2, f_2' \ldots f_k \cdot f_k'$, die des ganzen mit f und f'.

In Bezug auf die Richtung der Brennebenen und die Lage der Hauptaxen des ganzen Systems gelten dieselben Betrachtungen wie vorher: dieselben fallen bezw. zusammen mit der Objektbrennebene und Objektaxe des ersten, sowie der Bildbrennebene und der Bildaxe des letzten Einzelsystems.

Um die Lage der Brennebenen und die Grösse der Brennweiten des Gesammtsystems zu berechnen aus denen der einzelnen Systeme, seien die Abstände der einander zugewandten Brennpunkte je zweier aufeinander folgender Systeme

$$F_1'F_2 = \Delta_1, \quad F_2'F_3 = \Delta_2, \quad F'_{k-1}F_k = \Delta_k.$$

Die hintere Brennebene des Gesammtsystems ist das Bild der hinteren Brennebene des ersten Systems, welches successive von den darauffolgenden Systemen entworfen wird. Bezeichnet man den Abstand der hinteren Brennebene des aus den p ersten Systemen gebildeten Systems von der des $p$ten mit σ_p', so hat man, wie leicht ersichtlich, zur Bestimmung von $\sigma' = \sigma_k'$ folgendes System von Gleichungen:

$$\sigma_2' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta_1}; \quad \sigma_3' = -\frac{f_3 \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'} \text{ etc.;}$$

$$\text{allgemein } \sigma_p' = -\frac{f_p \cdot f_p'}{\Delta_{p-1} - \sigma'_{p-1}}.$$

Hieraus ergiebt sich σ' zunächst in Form eines Kettenbruchs

$$\sigma' = -\cfrac{f_k \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{\Delta_{k-2} + \cfrac{\vdots}{\Delta_2 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_1}}}}.$$

Ganz ebenso erhält man

$$\sigma = +\cfrac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta_1 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_2 + \cfrac{\vdots}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} f'_{k-1}}{\Delta_{k\ 1}}}}}$$

4*

Um die **Brennweiten des Gesammtsystems** zu finden, haben wir ganz ebenso wie bei der Zusammensetzung zweier Systeme successive das Convergenzverhältniss in den Punkten zu suchen, in welche F_1', der Reihe nach abgebildet wird und alle diese Verhältnisse mit einander und mit f' zu multipliciren. Das Resultat ist

$$\frac{h}{tg\, u_1'} \cdot \frac{tg\, u_1'}{tg\, u'_2} \cdot \frac{tg\, u_2'}{tg\, u_3'} \cdots \frac{tg\, u_{k-1}'}{tg\, u_k'} = \frac{h}{tg\, u'} = f'.$$

Wir erhalten auf diese Weise, wenn wir die Brennweite des aus den ersten p Systemen gebildeten mit $f'_{1,p}$ bezeichnen, successive

$$f'_{1,2} = \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta_1}; \quad f'_{1,3} = \frac{f'_{1,2} \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'}; \quad \ldots \quad f'_{1,k} = f' = \frac{f'_{1,k-1} \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1}}.$$

Also

$$f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot f_3' \cdots f_k'}{\Delta_1 (\Delta_2 - \sigma_2') \cdot (\Delta_3 - \sigma_3') \cdots (\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1})}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist nach den oben für σ_p' aufgestellten Formeln ohne weiteres zu berechnen. Bezeichnen wir ihn mit N_k, so ist aus obiger Herleitung ersichtlich, dass N_k mit den vorangehenden Werthen N_{k-1}, N_{k-2} etc. in der Weise zusammenhängt, dass

$$N_k = \frac{\Delta_{k-1} N_{k-1} + f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{N_{k-1}}$$

ist u. s. f. Mit Hilfe dieser Beziehung ist N_k noch leichter zu berechnen. Man kann das Resultat dieser Rechnung auch unmittelbar in Kettenbruchform angeben oder andere Schemata zu Hilfe nehmen. Doch wollen wir diese rein formelle Seite der Frage hier nicht weiter erörtern, sondern verweisen auf die einschlägige Literatur, in welcher die »dioptrischen Kettenbrüche« wiederholt behandelt worden sind[1]).

Man erhält analog für f

$$f = (-1)^{k-1} \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_k}{N_k},$$

wo N_k dieselbe Grösse ist, wie in dem Ausdruck für f_1.

Wenn statt der Brennpunkte und Brennweiten, sowie der Brennpunktsabstände (Δ) andere Grössen zur Bestimmung der Abbildungsweise und gegenseitigen Lage der Einzelsysteme gegeben sind, so erhält man durch analoge Verfahren wie wir sie oben angewendet haben, die entsprechenden für das zusammengesetzte System. Wir unterlassen die Ausführung dieser Rechnung hier unter Verweis auf die unten citirte Literatur, in welcher sie zu finden ist und werden auch hierauf nur gelegentlich in speciellen Fällen Veranlassung haben, zurückzukommen.

---

[1]) A. F. MOEBIUS, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften von Linsengläsern. CRELLE's Journ. 5, pag. 113. 1830, und Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts, ibid. 6, pag. 215. 1830.

F. W. BESSEL, Ueber die Grundformeln der Dioptrik, Astr. Nachr. 18, pag. 37. 1840.

L. MATTHIESSEN, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, Leipzig 1877, § 21 ff. Einführung der Determinanten in dies Problem von

F. CASORATI, Le propietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati, Milano 1872, pag. 101. Weitere Ausarbeitungen auf diesem Wege von

G. FERRARIS, Atti R. Acc. di Torino 16, pag. 7. 1880.

F. MONOYER, Séanc. Soc. Franc. de Phys. 1883, pag. 148, übers. in EXNER's Repert. 21, pag. 58. 1885.

L. MATTHIESSEN, SCHLÖM. Zeitschr. 29, pag. 343. 1884, ibid. 32, pag. 170. 1887.

Alle diese Arbeiten behandeln das Problem unter Voraussetzung der speciellen Verhältnisse mit denen sich der nachfolgende Artikel beschäftigt.

Für uns ist es im Augenblick genügend, überhaupt festgestellt zu haben, dass und in welcher Weise etwa sich die wesentlichen Bestimmungsstücke einer zusammengesetzten Abbildung berechnen lassen aus denen der sie formirenden Einzelabbildungen.

Literatur.

Die Theorie der optischen Bilder ist, wie mehrfach hervorgehoben, fast stets unter specielleren Voraussetzungen hergeleitet, als wir oben benützt haben. Die wichtigsten Arbeiten für die Entwickelung dieser Lehre sind, ausser den im Text bereits angeführten von MOEBIUS, GAUSS, BESSEL, LISTING, MAXWELL, HELMHOLTZ, CASORATI, FERRARIS, MATTHIESSEN u. A. noch aus der Zeit vor GAUSS:

KEPLER, Dioptrice, Augsb. 1611, (ohne Kenntniss des richtigen Brechungsgesetzes, auf der erfahrungsmässigen Thatsache homocentrischer Strahlenvereinigung beruhend!).

COTES in R. SMITH, System of Opticks, Cambr. 1738, 2, pag. 76.

L. EULER, Dioptrice, Petersb. 1769—71.

LAGRANGE, Nouv. mém. acad. Berlin pour 1778, pag. 162. 1780.

PIOLA, Effemer. astron. di Milano 1821.

BIOT, Traité d'Astron. phys. 3 ed. Paris 1841, Bd. 1 u. 2.

Von neueren Darstellungen sind noch zu erwähnen:

K. L. BAUER, Zur Theorie dioptr. Instrum., München 1866.

V. v. LANG, Wien. Sitzber. 63, pag. 686. 1871, POGG. Ann. 149, pag. 353. 1873.

F. NEESEN, Abbildg. v. leucht. Obj. in einem nicht centr. Linsensyst., Diss. Bonn 1871.

F. PAROW, Durchg. d. Lichts d. belieb. brech. Flächen, Diss., Bonn 1876.

CH. PENDLEBURY, Lenses and systems of lenses treated after the manner of GAUSS, Cambr. 1884.

P. ZECH, Math. natw. Mitth., Tübingen 1887.

III. Realisirung der optischen Abbildung
A. durch dünne Büschel nahe der Axe centrirter Kugelflächen.

(Fundamentaleigenschaften der Linsen und Linsensysteme.)

Wir haben bisher immer nur angenommen, dass eine »optische Abbildung« zu Stande komme, ohne uns darum zu kümmern oder Voraussetzungen darüber zu machen, in welcher Weise des näheren dies geschehe. Wir nahmen es als durch die tägliche Erfahrung feststehend an, dass optische Abbildungen thatsächlich vorkommen und untersuchten darauf hin zunächst die allgemeinen Gesetze, denen eine jede solche Abbildung, kraft ihrer Entstehung durch punktweise Vereinigung gradliniger Strahlen nothwendig unterliegen muss, auf welche Weise sie auch immer zu Stande gekommen sein mag.

In dem Folgenden sollen einige besonders wichtige Verwirklichungs-Arten von Abbildung näher untersucht werden. Es soll gezeigt werden — und dies ist, wie wir früher bereits ausführten, nunmehr das einzige was zu zeigen noch übrig bleibt — unter welchen physischen Bedingungen in gegebenen Fällen eine Abbildung zu Stande kommt, welchen Beschränkungen dieselbe gegenüber der vorher von uns angenommenen unendlicher Räume durch beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel in praxi immer unterliegt, wie Objekt- und Bildraum zu einander liegen und wie sich die Hauptbestimmungsstücke der Abbildung, d. h. die Brennweiten und die Oerter der Brennpunkte aus den Daten des Falles selbst berechnen lassen.

Da wir nach dem letzten Abschnitt eine wie auch immer zusammengesetzte Abbildung stets zerlegen können in die combinirte Wirkung successiver Theilabbildungen, so können wir uns hier darauf beschränken, die einfachsten möglichen Fälle von Abbildung zu untersuchen, d. h. die Abbildung durch Spiegelung oder Brechung von Lichtstrahlen an einer einzelnen, zwei verschiedene Medien trennenden Fläche. Wir beschränken uns dabei von vornherein auf die Untersuchung sphärischer Flächen, welche, wie wir ebenfalls schon einmal hervorhoben, für die Theorie der optischen Instrumente allein von Bedeutung sind. Ein Büschel homocentrischer Lichtstrahlen falle auf eine solche Fläche und werde an ihr gebrochen.

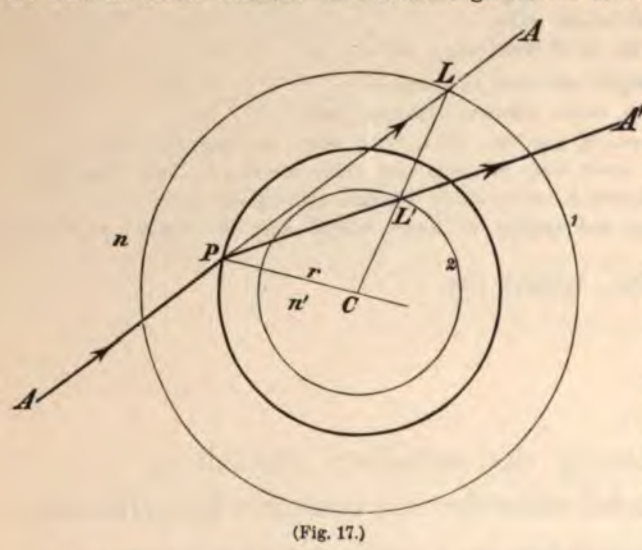
Eine brechende Fläche.

Weg eines Strahls. Sei zunächst nur ein Strahl des Büschels betrachtet. Er falle in einem Medium vom Brechungsindex n auf eine Kugel vom Index n', mit dem Radius r und dem Mittelpunkt C. Die durch den einfallenden Strahl AP und C gelegte Ebene — die der Zeichnung — ist dann Einfallsebene, da der Radiusvector CP Einfallsloth ist; sie enthält daher auch den gebrochenen Strahl PA'. Die Richtung dieses ist bestimmt durch das Brechungsgesetz, d. h. durch die Gleichung

$$n \sin CPA = n' \cdot \sin CPA'$$

oder

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'.$$



(Fig. 17.)

Graphisch lässt sich der gebrochene Strahl wohl am einfachsten durch folgende, wie es scheint zuerst von WEIERSTRASS[1]) angegebene Construktion ermitteln (Fig. 17). Man schlage um C Kreise resp. Kugeln mit den Radien $r_1 = \frac{n'}{n} r$ und $r_2 = \frac{n}{n'} \cdot r$. Den Punkt L, wo der erstere Kreis vom auffallenden Strahl zum zweiten Mal getroffen wird verbinde man mit C, den Schnittpunkt von LC und Kreis 2, L' mit P. Dann ist PL' der gebrochene Strahl. Denn da nach Construktion $CL' : CP = CP : CL$, so ist $\Delta CPL' \infty CLP$; daher $\angle PLC = L'PC$. In ΔCPL ist aber $\sin CPL : \sin PLC = CL : CP = n' : n$. Folglich ist $\angle CPL'$ der zu CPL gehörige Brechungswinkel i'.

Eine andere Construktion giebt REUSCH an (Construktionen zur Lehre etc., Leipzig 1870, pag. 1).

Beiläufig ergiebt sich aus dieser Construktion, dass alle von dem Punkte L der Hilfskugel 1 auf die brechende Kugel fallenden Strahlen, in jeder Neigung und jedem Azimut, nach dem Punkte L' hin gebrochen werden, in welchem

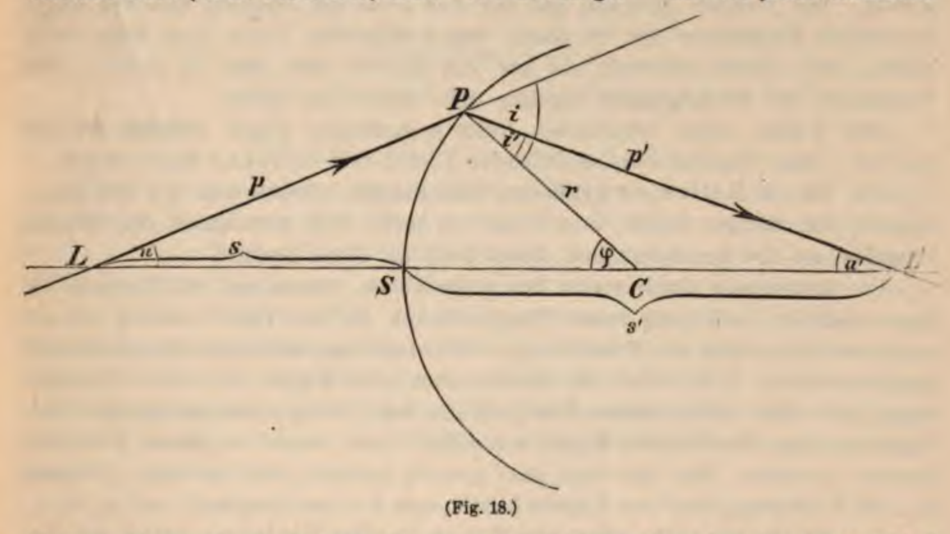
[1]) Nach SCHELLBACH, Z. f. phys. u. chem. Unt. 2, pag. 135. 1889, von W. schon im Tageblatt der Naturf. Vers. zu Wien 1858 mitgetheilt. Später unabhängig von LIPPICH, Denkschr. d. Kais. Ak. d. Wiss. z. Wien 38, pag. 8, 1877, gefunden.

die Grade LC die Hilfskugel 2 schneidet und umgekehrt die von L' ausgehenden nach L hin.

Wegen dieser wichtigen Eigenschaft heissen Punktepaare, die in den Abständen $(n'/n)\,r$ und $(n/n')\,r$ auf je einer Centralen der in einem Medium vom Index n befindlichen Kugel vom Index n' und Radius r liegen »aplanatische Punktepaare«. Dieselben haben eine grosse praktische Wichtigkeit in der Construktion der starken Mikroskopobjektive, welche seit Amici wesentlich mit auf deren Anwendung beruht.

Ausser diesen giebt es nur noch zwei Schaaren von Punkten gleicher Eigenschaft: jeder Punkt der Kugelfläche und ihr Mittelpunkt sind sich selbst offenbar in gleicher Uneingeschränkheit conjugirt. Die auf diese Weise vermittelten Abbildungen fallen jedoch — da sie sich nur auf Punkte beziehen, die in einem Paar von Flächen liegen — ausserhalb der gesetzmässigen Beziehungen, die wir auf Grund unserer allgemeinen Betrachtungen ableiteten.

Ausser in diesen Fällen findet eine Abbildung durch endliche Büschel im Allgemeinen nur noch in so weit statt, als die sie vermittelnden Büschel flächenhaft (nicht räumliche) sind. Bei der Kugel — wie bei jeder Rotations-



(Fig. 18.)

fläche — fallen alle Strahlen welche den Mantel eines Kegels mit der Centralen (bezw. Rotationsaxe) als Axe bilden unter gleichem Winkel ein, werden daher auch unter gleichem Winkel gebrochen und bilden folglich nach der Brechung einen Kegelmantel mit derselben Axe wie die einfallenden Strahlen.

Analytisch ist der Weg eines Strahls und die Abbildung von Punkten durch solche auf axialen Kegelmanteln gelegene Strahlengruppen in folgender Weise zu bestimmen (Fig. 18).

Ist die Entfernung eines Punktes L des Strahls vom Einfallspunkte P, $PL = p$, vom Scheitel S der brechenden Kugel $SL = s$ und von deren Mittelpunkt C, $CL = c = s - r$, die Neigung des Strahls gegen die Centrale $PLC = u$, wird der Einfallswinkel CPL wieder mit i bezeichnet und die entsprechenden Grössen für das gebrochene Strahlenbüschel mit denselben aber gestrichenen Buchstaben, so haben wir in ΔCLP

$$CL : CP = \sin CPL : \sin CLP \quad \text{oder} \quad c = r \cdot \frac{\sin i}{\sin u},$$

welche Gleichung gestattet, aus c, r und u i zu berechnen. Für den gebrochenen

Strahl haben wir analog $c' = r \cdot \frac{\sin i'}{\sin u'}$. Hierin ist i' durch die Grundgleichung $n' \cdot \sin i' = n \cdot \sin i$ bestimmt und u' alsdann durch die Beziehung $\varphi = u - i = u' - i'$ oder $u' - u = i' - i$. Also giebt uns obige Gleichung den Werth von c'. Die Scheitelabstände s und s' sind dann einfach $s = c + r$; $s' = c' + r$. Die Strahllängen p und p' sind analog zu bestimmen, wie die Mittelpunktsabstände durch die sich ebenso ergebende Gleichung

$$\frac{p'}{p} = \frac{\sin u}{\sin u'},$$

wo zur Berechnung von u' dieselben Zwischenbeziehungen zu benutzen sind wie oben. Es sind also in einfachster Weise alle Bestimmungsstücke eines gebrochenen Strahls berechenbar aus denen des einfallenden. Nebenbei ergiebt sich aus obigen Beziehungen, dass

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{c'}{c} \quad \text{oder} \quad n' \frac{s' - r}{p'} = n \frac{s - r}{p}. \tag{1}$$

Die Vorzeichen sind hier wie in allen folgenden und den vorhergehenden Entwickelungen nach dem in der analytischen Geometrie üblichen Schema bestimmt. Wir rechnen Strecken auf der Axe oder auf Strahlen von den angenommenen Fixpunkten aus im Sinne des einfallenden Lichts (von links nach rechts), und solche senkrecht zur Axe von ihr aus nach oben als positiv. Die Vorzeichen der Winkelgrössen ergeben sich hieraus von selbst.

Den Radius einer brechenden (oder spiegelnden) Kugel rechnen wir als positiv, wenn dieselbe dem einfallenden Lichte ihre convexe Seite zukehrt.

Die für die Reflexion geltenden Gleichungen ergeben sich aus den abgeleiteten, wie immer, indem man $n' = -n$ setzt. Wir unterlassen ein näheres Eingehen auf die Besonderheiten dieses Falls an dieser Stelle.

Die angegebene Construction des gebrochenen Strahls und die Formeln für die analytische Verfolgung seines Weges reichen für den Fall beliebig vieler aufeinanderfolgender Brechungen nur dann aus, wenn alle Einfallsebenen zusammenfallen, d. h. wenn die Mittelpunkte aller Kugeln auf einer Geraden liegen, die selbst in der ersten Einfallsebene liegt, die also bei genügender Verlängerung den einfallenden Strahl schneidet. Man nennt in diesem Falle die Kugeln centrirt. Man hat dann stets $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ und $u_k = u'_{k-1}$, wenn d_{k-1} die Entfernung des $k$ten Kugelscheitels vom $k-1$ten bedeutet, und s_k, s'_{k-1}, u_k, u'_{k-1} für die $(k-1)$te resp. $k$te Fläche dieselbe Bedeutung haben wie die gleichen Buchstaben ohne Zeiger für die oben allein betrachtete.

Sind die Flächen aber nicht centrirt, oder ist ihre gemeinsame Centrale, die Axe des Systems, windschief gegen den einfallenden Strahl, so genügen die angegebenen Formeln nicht mehr und auch die graphische Construktion ist nur noch in Gedanken, nicht mehr auf dem Papiere in gleicher Weise ausführbar. Es sind dann statt ebener Dreiecke, wie vorher, die entsprechenden sphärischen aufzulösen. Rechnungsvorschriften für diesen Fall sind wohl zuerst von L. Seidel[1]) veröffentlicht.

Normal einfallendes endliches Büschel. Aberration.

Gegen die brechende Kugelfläche SP mit dem Mittelpunkt C falle ein Büschel ein, dessen »Hauptstrahl« (in dem früher angegebenen Sinne) durch C

[1]) Trigonometr. Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichts an centrirten sphärischen Flächen. Sitzber. Münch. Akad. 1866, pag. 263, abgedruckt in Steinheil und Voit, Angewandte Optik. Leipzig 1891, pag. 259; auch Hansen, Abh. d. Sächs. Akad. 10, pag. 95 bis 202. 1871.

geht, dessen Divergenzpunkt L ist. Es genügt dann, um den Verlauf aller Strahlen des Büschels zu erhalten, die in einem Hauptschnitt, etwa der Zeichenebene, gelegenen Strahlen zu betrachten. Die gebrochenen Strahlen liegen ja in diesem Falle in derselben Ebene, und alle Strahlenkegel werden erhalten durch Rotation der in einer Ebene gelegenen um die Axe LC. Die Gesammtheit aller einfallenden Strahlen lässt sich gruppiren in Strahlenkegel mit der gemeinsamen Spitze L; die Gesammtheit aller gebrochenen Strahlen daher gemäss der Bemerkung pag. 55 in Kegel mit der gleichen Axe LC, aber mit im allgemeinen verschiedenen Spitzen L'.

LP sei einer der einfallenden Strahlen des Büschels, PL' der entsprechende gebrochene. Wir haben bereits gesehen, wie sich die Elemente des letzteren (Scheitelabstand, Neigungswinkel gegen die Axe, Strahllänge) berechnen lassen aus denen des einfallenden. Schon aus den zu dieser Berechnung dienenden Formeln liesse sich schliessen, dass zu gleichem s und r, aber verschiedenem Neigungswinkel u im Allgemeinen auch verschiedene Entfernung s' der Spitze des gebrochenen Strahlenkegels gehört.

Noch deutlicher tritt diese Thatsache und die Beziehung zwischen den fraglichen Grössen hervor, wenn wir beachten, dass in

$$n'\frac{(s'-r)}{p'} = \frac{n(s-r)}{p}, \tag{1}$$

$$p^2 = (s-r)^2 + r^2 + 2r(s-r)\cos\varphi$$

ist und ebenso

$$p'^2 = (s'-r)^2 + r^2 + 2r(s'-r)\cos\varphi.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass zu gleichen Werthen von s, r, n und n' verschiedene Werthe von s' gehören je nach der Grösse von φ, dem Oeffnungswinkel der Kugelfläche. Diese Verschiedenheit der Lage der gebrochenen Kegelspitzen bezeichnet man als »sphärische Aberration« oder »Kugelabweichung«. (s. das nächste Capitel). Wie wir früher gesehen haben (pag. 17) kann man Flächen anderer Gestalt angeben, welche die Eigenschaft haben ein homocentrisches Büschel von gegebener Lage und beliebiger Oeffnung durch Brechung wieder in ein homocentrisches überzuführen (»aplanatische Flächen«). Die Kugel gehört zu denselben insofern sie, wie oben gezeigt, Büschel von bestimmter Lage ebenfalls homocentrisch vereinigt. —

Normal einfallendes Elementarbüschel. Axenpunkte.

Entwickelt man $\cos\varphi$ nach Potenzen von φ, so sieht man weiterhin, dass für solche Werthe von φ, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können gegen die erste, d. h. gegen φ selber $p = s$ und $p' = s'$ ist, also

$$\frac{n(s-r)}{s} = \frac{n'(s'-r)}{s'}. \tag{2}$$

Innerhalb eines Strahlenkegels von dem angegebenen Oeffnungswinkel findet also eine eindeutige Beziehung zwischen s und s' statt, d. h. homocentrische Vereinigung der gebrochenen Strahlen und damit zunächst wenigstens für die auf der Axe gelegenen Punkte eine »Abbildung« in dem von uns früher gebrauchten Sinne.

Die Strahlenvereinigung bei der Brechung eines normal einfallenden Büschels an einer Kugelfläche ist von »zweiter Ordnung«, wie man zu sagen pflegt um auszudrücken, dass es die zweite Potenz von φ (oder u) ist, welche man vernachlässigen musste um die Eindeutigkeit der Beziehungen zu erhalten. Da übrigens unter Vernachlässigung der Grössen von dieser Ordnung die Kugel zusammen-

fällt mit jeder sie im Scheitel berührenden Rotationsfläche anderer Gestalt, so gilt das gefundene Resultat mit gleicher Annäherung auch für solche und es bezeichnet dann in der Formel (2) r den Krümmungshalbmesser der betreffenden Fläche im Scheitel.

Anmerkung. Nebenbei mag darauf hingewiesen werden, dass Gleichung (1) welche ja für jedes Paar von Punkten auf der Axe gilt, für zwei solche Paare $L_1 L_1'$ und $L_2 L_2'$ geschrieben werden kann in den Formen

$$\frac{c_1'}{c_1} : \frac{p_1'}{p_1} = \frac{n}{n'},$$
$$\frac{c_2'}{c_2} : \frac{p_2'}{p_2} = \frac{n}{n'},$$

welche besagen, dass die Punkte $L_1 S C L_1'$ projectivisch sind zu $L_2 S C L_2'$; ebenso sind sie es zu $L_3 S C L_3'$ etc. Auf Grund dieser Beziehung lassen sich die Gesetze der Abbildung durch Brechung enger Büschel an centrirten Kugelflächen in sehr eleganter Form entwickeln, wenn man sich auf die ersten Elemente der projectivischen Geometrie stützt. Dies ist der von Möbius, Lippich, Beck und Hankel eingeschlagene Weg. S. die oben (pag. 25) citirten Abhandlungen derselben.

Die Gleichung (2), welche die Beziehung zwischen conjugirten Punkten auf der Axe darstellt ist, wie man sich leicht überzeugt, nichts anderes als der Werth, den die Ausdrücke $n \cdot sin\, i$ resp. $n' \cdot sin\, i$, d. h. die »optische Invariante« für unendlich kleine Winkel φ annehmen, beide dividirt durch $sin\, \varphi$. Dividirt man noch mit r, so erhält man die »Invariante der Brechung« für axiale Elementarbüschel in den für die Rechnung bequemen Formen

$$Q_0 = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right), \tag{2a}$$

oder

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}, \tag{2b}$$

Bezeichnen wir die Differenz der Werthe eines Ausdrucks vor und nach der Brechung an einer Fläche durch ein vorgesetztes Δ, so können wir kürzer schreiben

$$\Delta\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{1}{r}\,\Delta\,(n). \tag{2c}$$

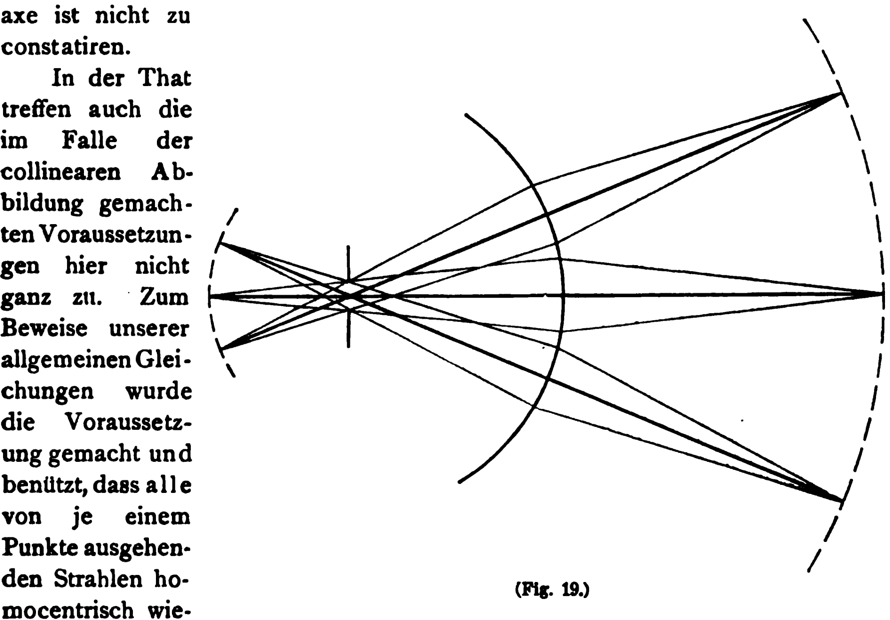
Abbildung von ausseraxialen Punkten und von Flächen durch genau normal einfallende Elementarbüschel.

Die Abbildung, welche wir bisher statuirt haben, betrifft nur die Punkte je einer Kugelcentralen. Die betreffenden Beziehungen gelten nun für jede solche Centrale mit gleichem Rechte und in gleicher Weise. Führt man also — sei es in Gedanken, sei es thatsächlich (was ganz gut ausführbar wäre) — eine solche Beschränkung der wirksamen Strahlenkegel ein, dass deren Axen sämmtlich durch C gehen und ihre Oeffnungen unendlich klein sind, so würde durch Brechung an einer einzigen Kugelfläche mit der angegebenen Näherung eine Abbildung des ganzen unendlichen Raumes vom Index n vor der Kugel in den, theils hinter der brechenden Fläche vorhandenen theils vor ihr liegenden ideellen Raum vom Index n' gegeben sein (Fig. 19).

Aber auch diese Abbildung würde nicht in die Rubrik der unter dem allgemeineren Gesichtspunkt betrachteten Arten fallen. Dies kennzeichnet sich schon äusserlich dadurch, dass, wie leicht einzusehen, bei derselben um C concentrische Kugelflächen des Objektraums in eben solche des Bildraums abgebildet werden unter Wahrung der Aehnlichkeit und bei perspektivischer Lage Figuren auf den Kugelflächen. (Die Radien der conjugirten Kugeln c sind dabei einfach durch die Gleichungen 2a bis 2c in Verbindung mit c $c' = s' - r$ bestimmt). Bei der von uns früher betrachteten collinea

kommt aber ein solcher Fall unter keinen Umständen vor. Im vorliegenden Falle werden andererseits Ebenen niemals in Ebenen abgebildet und eine Hauptaxe ist nicht zu constatiren.

In der That treffen auch die im Falle der collinearen Abbildung gemachten Voraussetzungen hier nicht ganz zu. Zum Beweise unserer allgemeinen Gleichungen wurde die Voraussetzung gemacht und benützt, dass alle von je einem Punkte ausgehenden Strahlen homocentrisch wieder vereinigt würden; der Beweis der Collinearität der Abbildung beruhte auf der Annahme, dass die durch irgend welche 3 Punkte gehende Gerade betrachtet werden dürfe als abbildender Strahl jedes der von diesen 3 Punkten ausgehenden Büschel. Diese Bedingung ist aber im vorliegenden Falle nicht erfüllt; derselbe unterliegt daher besonderen Gesetzen, wie den zum Theil oben angegebenen.

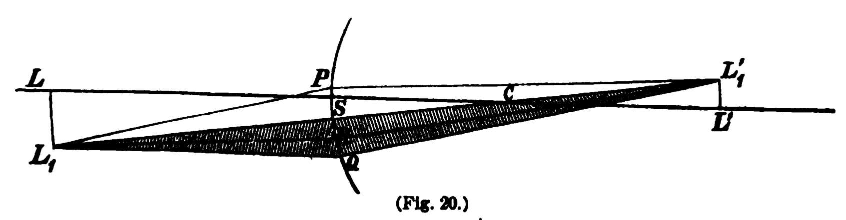


(Fig. 19.)

Die vorliegende Abbildung — welche sich übrigens auch nicht auf mehr als eine brechende Fläche ausdehnen liesse — zerfällt vielmehr, wie wir nunmehr zeigen wollen, in ein Aggregat von unendlich vielen einzelnen Abbildungen (mit den Centralen als Hauptaxen), von welchen jede die Bedingungen der Collinearität in einem der Axe unendlich nahe benachbarten Raume erfüllt.

Beschränkung auf den Fall paraxialer Punkte.
Collineare Abbildung.

Betrachten wir eine dieser rein axialen Abbildungen und daneben die eines der Axe unendlich nahe gelegenen Punktes L_1 (Fig. 20). Das diesen Punkt abbildende Büschel mag nun ein streng centrales sein, wie L_1PQ oder auch nur



(Fig. 20.)

annähernd ein solches wie L_1SQ, d. h. seine Axe L_1R mag nur überhaupt unendlich wenig gegen die anfänglich angenommene LCL' geneigt (sein im letzteren Falle kann man das Büschel als Theil eines streng centralen mit L_1C als Axe ...ird doch dieser Punkt L_1 mit derselben Genauigkeit der Strahlen-...t, wie L selber. Dies gilt für jeden der ursprünglichen Axe

unendlich nahen Punkt und für jedes von einem solchen ausgehende Strahlenbüschel, dessen Axe seinerseits gegen die ursprüngliche unendlich wenig geneigt ist und welches eine unendlich kleine Oeffnung hat.

In einem solchen »fadenförmigen« Raum und für Strahlenbüschel, die ganz in ihm verlaufen, findet dann die Beziehung der Collinearität statt. Denn wenn auch nicht alle von je einem Punkte ausgehenden Strahlen homocentrisch vereinigt werden, so ist doch die Lage jedes Punktes schon als Schnittpunkt je zweier völlig bestimmt und wenn demgemäss für Punkte, die auf einer beliebigen der Axe nahen, einer »paraxialen« Geraden liegen, bewiesen ist, dass ihre Bilder ebenfalls auf einer Geraden liegen, so gilt dies in dem betreffenden Raum eben allgemein. Erstere Voraussetzung trifft aber, wie ohne weiteres zuzugestehen ist, im vorliegenden Falle zu; denn paraxiale Gerade können durchweg als abbildende Strahlen angesehen werden.

Durch Brechung paraxialer unendlich dünner Strahlenbüschel an einer Kugel wird also eine collineare Abbildung des um die betreffende Centrale gelegenen fadenförmigen Raums bewirkt. Auf diese können wir daher ohne weiteres unsere allgemeinen Resultate anwenden.

Wir haben absichtlich oben diesem Falle einer collinearen Abbildung solche von nicht collinearer, wenn auch sonst zum Theil weniger eingeschränkter Abbildung vorangeschickt, um an diesen Beispielen zu zeigen, wann die im vorigen Capitel abgeleiteten allgemeinen Gesetze Anwendung finden und wie ihr Geltungsbereich zu bestimmen ist.

Grundfaktoren der Abbildung durch eine brechende Fläche.

Die Axe des Objektraums wie Bildraums fällt hier zusammen mit der Kugelcentralen, also fallen auch der Richtung und dem Orte nach hier beide Axen mit einander zusammen. Denn erstens erfüllt diese Centrale die Bedingung, sich selbst conjugirt zu sein (ein senkrecht im Scheitel einfallender Strahl geht ungebrochen weiter). Zweitens werden Ebenen (elemente) senkrecht zu dieser Linie abgebildet in ebensolche. In der That haben wir ja gesehen, dass bei der nicht collinearen Abbildung durch beliebige »centrale« Büschel, pag. 59, um den Kugelmittelpunkt concentrische Kugelflächen abgebildet werden in ebensolche. Für den einer Axe unendlich nahen Raum sind nun beide Abbildungsweisen, die oben und die zuletzt betrachtete, dem Abbildungs-Vorgange und daher auch dem Resultate nach identisch. In diesem beschränkten Gebiete aber kann die zur Axe normale Kugelfläche identificirt werden mit dem zu ihr senkrechten Ebenenelement. Jeder Punkt des Abbildungsraums (des Raums nahe der Axe) kann angesehen werden als Punkt des Objekt- wie des Bildraums — ein Verhältniss, welches wohl im ideellen Falle aber durchaus nicht bei jeder Verwirklichungsweise optischer Abbildung besteht. Je nach seiner Lage zur brechenden Fläche ist jeder Punkt aber »reeller« oder »virtueller« Brennpunkt eines Büschels, und zwar enthält der Raum vor der brechenden Fläche die reellen Objektpunkte der Raum hinter ihr die reellen Bildpunkte und vice versa.

Auf Grund dieser Ueberlegung und der schon abgeleiteten Beziehung für conjugirte Abscissen lassen sich nunmehr auf inductivem Wege für die betrachtete Art von Abbildung an einer Fläche sowohl als an beliebig vielen die allgemeinen Abbildungsgesetze ableiten, welche wir im vorigen Abschnitt deductiv hergeleitet haben. Dies ist der von Gauss und Helmholtz und seitdem von der überwiegenden Mehrzahl der Autoren eingeschlagene Weg. Wir unsererseits sind bereits im Besitz der allgemeinen Resultate und wenden dieselben nur durch Specifikation auf den vorliegenden Fall an.

Die Brennebenen sind nach unserer Definition die Bilder der unendlich entfernten Ebenen. Ihre Lage zum Scheitel der brechenden Fläche erhalten wir,

indem wir in einem der Ausdrücke 2a bis c das eine Mal s', das andere Mal $s = \infty$ setzen. Nämlich

$$\left.\begin{aligned} SF &= -\frac{n\,r}{n'-n} \\ SF' &= +\frac{n'\,r}{n'-n} \end{aligned}\right\} \text{ als Scheitelabstände der Brennpunkte.}$$

Die Brennweiten sind nach einer unserer Definitionen gleich dem Verhältniss der Höhe eines zur Axe parallelen Strahls zur Tangente seines Neigungswinkels nach der Brechung. Im vorliegenden Fall sind die Tangenten und Sinus von Strahl-Axenwinkeln einander und dem Bogen selbst gleich zu setzen, und, wie ohne weiteres ersichtlich, ist dann die Brennweite des Objekt- bezw. Bildraums direkt gleich dem negativ genommenen Abstand des betreffenden Brennpunkts vom Scheitel. (Dieser Umstand erklärt die Einführung des Worts »Brennweite« für eine Grösse, die sich uns nur als das Verhältniss zweier Grössen darbot.)

Es ist also

$$f = +\frac{nr}{n'-n}; \quad f' = -\frac{n'r}{n'-n} \quad \text{und } f:f' = -n:n'.$$

Hieraus ergiebt sich, dass bei der betrachteten (dioptrischen) Abbildung 1) die Brennweiten stets entgegengesetztes Vorzeichen besitzen und 2) dass ihr Verhältniss, — von dem wir bereits wissen, dass es constant ist, — gleich dem der Medien ist, auf welche sie sich beziehen. Die erstere Folgerung reiht die hier betrachtete, dioptrische Abbildung in die früher unterschiedene Hauptgattung der rechtläufigen. In der That kann man aus der Natur der Brechung (auch wenn dieselbe ein anderes als das SNELLIUS'sche Gesetz befolgte) unmittelbar schliessen, dass die durch sie vermittelten Abbildungen stets rechtläufig sein müssen, nämlich wofern und weil der gebrochene Strahl auf derselben Seite des Einfallsloths liegt (mit ihm einen Winkel von gleichem Vorzeichen bildet) als der einfallende und der Brechungswinkel mit dem Einfallswinkel stetig wächst.

Weiterhin kann man aus den für f und f' abgeleiteten Ausdrücken schliessen, dass bei der Reflexion an einer Fläche, für welche wir $n' = -n$ zu setzen haben $f = f' = -\frac{r}{2}$ ist, also $f:f' = +1$; f und f' haben also stets gleiches Vorzeichen, woraus folgt, dass diese Abbildung rückläufig ist. Auch dies lässt sich unmittelbar aus der Entstehungsweise der Bilder bei der Reflexion entnehmen, nämlich insofern und weil diese durch Strahlen erfolgt, die beim Einfall und Rücktritt auf entgegengesetzten Seiten der Einfallsnormalen liegen und deren Einfalls- und Reflexionswinkel gleichzeitig ab- und zunehmen.

Ferner ergiebt sich aus den Ausdrücken für f, in welchen Fällen die Abbildung durch eine Fläche eine »collective«, in welchen sie eine »dispansive« in dem früher gebrauchten Sinne ist. Nämlich die Abbildung durch einfache Brechung ist, wenn

$$\left.\begin{aligned} n' > n \quad &\text{und} \quad r > 0 \\ n' < n \quad &\text{und} \quad r < 0 \end{aligned}\right\} \text{ eine collective,}$$

umgekehrt wenn

$$\left.\begin{aligned} n' > n \quad &\text{und} \quad r < 0 \\ n' < n \quad &\text{und} \quad r > 0 \end{aligned}\right\} \text{ eine dispansive.}$$

Die Abbildung durch einfache Reflexion ist eine collective, wenn $r < 0$, eine dispansive wenn $r > 0$.

Die Ausdrücke »collectiv«, »dispansiv« finden ihre anschaulichste Begründung in der Modifikation, die jedes einzelne Strahlenbüschel in dem einen oder anderen

Falle erleidet. Denn wie man sich leicht überzeugt, wird ein Strahlenbüschel durch Brechung oder Reflexion an einer collectiven Fläche stets convergenter, durch die einer dispansiven stets divergenter.

Bedenkt man, dass $i = u - \varphi$; $i' = u' - \varphi$ und für unendlich kleine Einfallswinkel $ni = n'i'$ ist, so hat man $n'u - nu = (n' - n)\varphi$ unabhängig von der Entfernung der conjugirten Punkte als ein Maass der Divergenzänderung, wenn nicht die Aenderung des Oeffnungswinkels selber, sondern die seines dioptrischen Werthes in Anschlag gebracht wird. φ ist positiv für negatives r, negativ für positives. Die »optische Divergenzänderung« wie HELMHOLTZ sie nennt[1]), ist also für unendlich kleine Winkel proportional der Oeffnung der brechenden Kugel, welche von den Strahlen benützt ist. Die Divergenz wird vermehrt, wenn das stärker brechende Medium an der convexen Seite der Kugel liegt und umgekehrt.

Für die Reflexion hat man noch einfacher

$$u' - u = -2\varphi$$

in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten, d. h. Convexspiegel zerstreuen, Concavspiegel sammeln die Strahlen homocentrischer Büschel, welche auf sie fallen[2]).

Alle anderen Maassbestimmungen der Abbildung durch eine einfache Brechung oder Spiegelung liessen sich zwar aus den gemachten Annahmen speciell für den vorliegenden Fall ableiten; sie folgen für uns aber, wie gesagt, unmittelbar aus den allgemeinen Abbildungsgleichungen, die hier ohne weiteres anwendbar sind. Man hat nur für f und f' die oben gefundenen Werthe einzutragen und die Lage von F und F' zu berücksichtigen.

Man sieht dann u. A., dass im Scheitel der brechenden Fläche beide Hauptpunkte zusammenfallen, im Mittelpunkt derselben beide Knotenpunkte.

Die Discussion der Abbildung durch einfache Brechung hat insofern ein besonderes Interesse, als für GAUSS, wie wir bereits an anderer Stelle erwähnten, bei Aufstellung seiner Theorie ersichtlich und ausgesprochener Maassen das Bestreben leitend war, die Abbildung durch ein beliebiges System von brechenden und spiegelnden Flächen möglichst vergleichbar zu machen und durch ähnliche Ausdrücke darzustellen, wie die durch eine einzige solche Fläche.

Den Fall der einfachen Spiegelung an einer sphärischen Fläche haben wir bereits erwähnt. Es ist dann $f = f' = -\frac{r}{2}$. Beide Brennpunkte fallen im Halbirungspunkte des nach dem Scheitel gerichteten Radiusvector zusammen; es fallen daher auch Objekt- und Bildraum genau aufeinander, jedoch unter Wahrung der Art gegenseitigen Entsprechens, welche nach den allgemeinen Gleichungen für diesen Fall der »rückläufigen« Abbildung stattfindet.

Wenn $r = \infty$, d. h. die brechende bezw. spiegelnde Fläche eben ist, so werden auch die Brennweiten $= \infty$, wir haben es dann also mit einer »teleskopischen« Abbildung zu thun. Im Falle der Brechung an einer Ebene folgt aus (2b) als Beziehung zwischen conjugirten Scheitelabständen

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} \cdot s,$$

also einfache Proportionalität des Objekt- und Bildabstandes von der brechenden Ebene für alle Werthe und bei stets gleichseitiger Lage in Bezug auf die Ebene.

[1]) Physiol. Optik. 2. Aufl., pag. 64.

[2]) Manche englischen Darstellungen räumen nach dem Vorgange von CODDINGTON und namentlich wohl von LLOYD den Divergenzveränderungen der Büschel durch optische Systeme den ersten Rang bei deren Studium ein.

Das Convergenzverhältniss γ ist für eine einfache Brechung stets $\gamma = \frac{s}{s'}$, also hier $\gamma = \frac{n}{n'}$; die Lateralvergrösserung $\beta = \frac{n s'}{n' s} = +1$.

Im Falle der Spiegelung an einer ebenen Fläche ist $s' = -s$; $\gamma = -1$; $\beta = +1$, also Objekt und Bild liegen stets symmetrisch zur spiegelnden Fläche und sind einander congruent.

In diesem letzteren Falle ist, wie eine ganz einfache Betrachtung lehrt, die Abbildung weder in Bezug auf das Gebiet noch in Bezug auf die wirksamen Strahlen auf den fadenförmigen Raum beschränkt, der um je eine zur Fläche senkrechte Gerade herum gelegen ist, sondern sie findet in jeder beliebigen Ausdehnung in gleicher Weise statt und wird durch beliebig weite Strahlenbüschel in aller Strenge verwirklicht. Es ist dies der einzige Fall, in welchem eine Abbildung von solcher Ausdehnung stattfindet. Da er aber für die Abstufung der Lage- und Maassbeziehungen der beiden Abbildungsräume gar keinen Spielraum offen lässt, so ist er natürlich nur von beschränktem Nutzen für den Zweck, welchem die »optischen Instrumente« überhaupt dienen. Die Spiegelung an einer (oder mehreren) Ebenen ist ein Mittel, um ein Object oder ein von anderen optischen Systemen entworfenes Bild in unveränderter Gestalt an eine andere Stelle des Raums zu versetzen. Das von einer ungeraden Anzahl ebener Spiegel gelieferte Bild ist dabei symmetrisch gleich, das von einer geraden Anzahl gelieferte congruent dem Objekt, wie sich aus dem obigen von selbst ergiebt[1]).

Viele brechende Flächen (centrirtes optisches System).

Die Abbildung durch Brechung oder Spiegelung centraler Elementarbüschel an einer beliebigen Zahl von sphärischen Flächen, welche die Grenzen von Medien verschiedener Brechungsexponenten sind, folgt aus der durch je eine solche Fläche bewirkten und unseren allgemeinen Gesetzen der collinearen Abbildung und Combination von solchen Abbildungen. Wenn auf die betrachtete erste Fläche eine zweite folgt, deren Mittelpunkt innerhalb des fadenförmigen Raums liegt, in welchem allein jene eine collineare Abbildung zu Stande bringt, so kann der Bildraum der ersten Fläche angesehen werden als Objektraum der zweiten; denn die Axen und Strahlen aller einfallenden Büschel bilden dann sehr kleine Winkel auch mit der Centralen dieser Fläche; u. s. f. für beliebig viele aufeinander folgende Flächen. Wenn die Mittelpunkte dieser Flächen nicht nur innerhalb des für die erste Fläche in Betracht kommenden fadenförmigen Raums liegen, sondern sämmtlich auf derselben Geraden, so nennt man die Flächen centrirt. Die betreffende Gerade ist dann, wie aus den früheren Betrachtungen ohne weiteres folgt, selbst die Hauptaxe der Abbildung, auch »Axe des Systems« genannt.

Die Lage der Brennpunkte eines solchen Systems lässt sich unschwer berechnen, sei es durch successive Anwendung einer der Formel (2a) bis (2b), sei es, indem man diese in Form eines Kettenbruchs bringt, sei es endlich, indem man auch hier von den Determinanten Gebrauch macht. Gleiches gilt für die Berechnung der Brennweiten des zusammengesetzten Systems. Wir wollen uns

---

[1]) Näheres über die durch mehrfache Spiegelung (sogen. Winkelspiegel) entworfenen Bilder siehe in den früher aufgeführten Lehrbüchern der geometrischen Optik von LLOYD, PARKINSON, MEISEL, HEATH u. A. Die specielle Literatur citirt H. MAURER, GRUNERT's Archiv (2) 9, pag. 1. 1890, gelegentlich der Discussion einiger besonders interessanter Fragen, die sich an dieses Instrument knüpfen.

aber hierbei nicht aufhalten, da wir diese Aufgabe im Princip schon im vorigen Abschnitt pag. 51 ff. gelöst haben und verweisen hier nochmals auf die daselbst citirte Litteratur, welche das betreffende Problem mehr unter dem speciellen Gesichtspunkte behandelt, unter welchem es sich uns hier darbietet, als unter dem allgemeineren, von dem aus wir es damals betrachteten.

Von Interesse ist uns hier im wesentlichen nur eine Folgerung, betreffend das Verhältniss der beiden Brennweiten nach beliebig vielen Brechungen oder Spiegelungen. Von diesem hat LAGRANGE[1]) für einen speciellen Fall, GAUSS und HELMHOLTZ[2]) allgemein bewiesen, dass es stets gleich dem Verhältniss der Medien des Objekt- bezw. Bildraums sei — wie wir im Falle einer einzigen Brechung durch direkte Ausrechnung fanden.

HELMHOLTZ zeigt, dass die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{u'}{u} = \frac{s}{s'}, \quad \text{also} \quad \beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'},$$

welche bei jeder einzelnen Brechung gelten, durch Multiplication zu dem gleichen Ausdruck $\beta\gamma = (n/n')$ für beliebig viele Brechungen führen. Nach unseren allgemeinen Gleichungen ist aber $\beta\gamma = -\frac{f}{f'}$, folglich bei jeder dioptrischen Abbildung auch $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$.

Wir unsrerseits können den Beweis ohne weiteres darauf stützen, dass wie bereits pag. 52 die Brennweiten eines aus conaxialen beliebig zusammengesetzten Systems gefunden haben, ausgedrückt durch die der einzelnen Systeme wie folgt

$$f = \frac{(-1)^{k-1} f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k}{N_k}; \quad f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k'}{N_k},$$

worin N_k ein gewisser von den Constanten und Lagebeziehungen der einzelnen Systeme abhängiger Ausdruck war. Also ist

$$\frac{(-1)^{k-1} f'}{f} = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k'}{f_1 f_2 \cdot \ldots \cdot f_k} = \left(\frac{f_1'}{f_2}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right) \cdots \left(\frac{f_k'}{f_k}\right).$$

Die Verhältnisse der Einzelbrennweiten aber sind, wie wir gesehen haben, gleich dem negativen Verhältniss der Brechungsindices des Objekt- und Bildraums und offenbar ist der Index des Bildraums des $p$ten Systems gleich dem des Objektraums des $(p+1)$ten, folglich ist

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{(2k-1)} \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} \cdots \frac{n_{k+1}}{n_k} = -\frac{n'}{n}.$$

Im Falle der rein katoptrischen Abbildung (durch lauter Spiegelungen) ist jedes einzelne

$$\frac{f_k'}{f_k} = +1,$$

also

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{k-1},$$

d. h. $+1$ oder -1 je nachdem die Zahl der Spiegelungen eine ungerade oder gerade ist.

Ist die Abbildung durch Spiegelungen und Brechungen bewirkt, »katadioptrisch«, so wird $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ oder $= +\frac{n'}{n}$, je nachdem die hierbei eingetretenen Spiegelungen gerade oder ungerade an Zahl sind.

---

[1]) Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin. Classe math. 1803, pag. 1.

[2]) Handbuch der physiologischen Optik 1867, pag. 50.

Dies sind also die Bedingungen, unter welchen eine solche Abbildung »rechtläufig« oder »rückläufig« ist, wie wir sie pag. 35/36 bereits antecipirt hatten.

Unter Benützung der hier festgestellten Beziehungen zwischen f und f' lassen sich nun alle früher abgeleiteten Gleichungen entsprechend modificiren. Eine besonders einfache Form nehmen dieselben in dem sehr häufigen Falle an, dass erstes und letztes Medium gleich, also $f' = \pm f$ ist. Doch überlassen wir die Discussion der besonderen Verhältnisse, welche dieser speciellen Annahme entsprechen, späteren Gelegenheiten.

Die einfache geometrische Bedeutung, welche die »Brennweiten« im Falle der Brechung an einer einzelnen Fläche — und auch im Falle der an beliebig vielen, wenn diese nach verschwindenden Zwischenräumen auf einander folgen — hatte, nämlich gleich dem negativen Abstand des Brennpunkts von dem betreffenden brechenden Fläche zu sein, geht bei einem System von Flächen mit endlichen Zwischenräumen natürlich ganz verloren. Die Brennpunkte und alle anderen früher betrachteten Cardinalpunkte können dann gegen die brechenden Flächen und gegen einander selbst jede Lage einnehmen, unter Wahrung nur der früher hergeleiteten allgemeinen Gesetzmässigkeiten, z. B. müssen immer, wenn $n' = n$ ist, also $f' = \pm f$ die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammenfallen etc.[1])

Linsen.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist der Fall eines aus zwei brechenden Flächen bestehenden Systems, welches beiderseits an ein Medium von gleichem Index (den wir = 1 setzen können) grenzt; denn die künstlich hergestellten optischen Instrumente bestehen fast durchgängig aus solchen binären Systemen und auch alle anderen lassen sich jedenfalls in Gedanken immer in solche zerlegen. Man nennt dieselben bekanntlich Linsen.

Je nach der Krümmung der die Linse begrenzenden Flächen nach aussen unterscheidet man dieselben als biconvexe, biconcave, planconvexe, planconcave und concav-convexe. Oft wird bei der Bezeichnung auch die Stellung der Linse zu den einfallenden Strahlen mit angedeutet, indem der Krümmungssinn der ersten Fläche in dem Namen vorangestellt, also zwischen planconvexen, und convex-planen, concav-convexen und convex-concaven Linsen unterschieden wird.

Bezeichnen wir die erste und zweite Fläche mit den Indices 1 und 2, so ist, wenn wir den relativen Brechungsexponenten der Linsensubstanz gegen das äussere Medium mit n bezeichnen, den Scheitelabstand der beiden Linsenflächen mit d (»Dicke« der Linse)

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} \qquad f_1' = -\frac{n r_1}{n-1}$$

$$f_2 = -\frac{n r_2}{n-1} \qquad f_2' = \frac{r_2}{n-1}.$$

Die Abstände der Brennpunkte der einzelnen Flächen von denselben sind gleich den negativ genommenen bezüglichen Brennweiten. Die Grösse $\Delta = F_1' F_2$ in den Formeln für die Zusammensetzung zweier conaxialen Abbildungen (der Abstand des vorderen Brennpunkts des zweiten Systems vom hinteren der ersteren) wird daher im vorliegenden Falle

$$\Delta = f_1' - f_2 + d.$$

[1]) Man sehe u. A. die Discussionen von MATTHIESSEN, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 32, pag. 170. 1887, und BROCKMANN, Inaug.-Diss., Rostock 1887, über die in katadioptrischen Systemen auftretenden Sonderverhältnisse.

Trägt man hierin obige Werthe ein, so findet man die Brennweiten der Linse

$$f = -\frac{f_1' f_2}{\Delta} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)R}$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = -f$$

und nach den Formeln

$$\sigma = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}, \quad \sigma' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$

ebenso die Abstände der Linsenbrennpunkte von den zugewandten Flächenbrennpunkten; hieraus dann weiter die Lage der Linsenbrennpunkte und anderen Cardinalpunkte zu den Scheiteln der brechenden Fläche. Nämlich der Abstand des vorderen Brennpunkts vom Scheitel der ersten Fläche ist

$$s_F = \sigma - f_1 = -\frac{r_1(n r_1 + R)}{(n-1)R};$$

der Abstand des hinteren Brennpunkts vom Scheitel der zweiten Fläche

$$s_F' = \sigma' - f_2' = +\frac{r_2(n r_2 - R)}{(n-1)R},$$

worin überall $R = n(r_2 - r_1) + (n-1)d$.

Die Abstände der Hauptpunkte von den zugewandten Linsenscheiteln sind

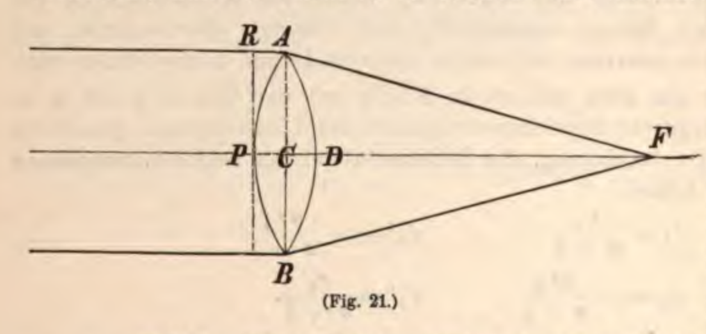
$$s_H = s_F + f = -\frac{(n-1) r_1 d}{(n-1)R}$$

$$s_H' = s_F' + f' = -\frac{n-1) r_2 d}{(n-1)R}.$$

Oft hat man es mit dem Reciproken der Brennweite zu thun, wie wir später sehen werden, der sogen. »Stärke« der Linse $\frac{1}{f} = \varphi$; diese drückt sich durch die Reciproken der Radien, die Krümmungen $\frac{1}{r_1} = \rho_1$ und $\frac{1}{r_2} = \rho_2$ nach obigem, wie folgt aus:

$$\varphi = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{(n-1)^2}{n} d \rho_1 \rho_2.$$

RAYLEIGH[1]) leitet eine Formel für die Brennweite einer Convex-Linse, als Funktion ihrer freien Oeffnung, Dicke und des Brechungsexponenten direkt aus dem Princip der gleichen optischen Längen her. Wenn die ebene Welle RPQ mit gleicher Phase nach F übergeführt werden soll, so muss (Fig. 21) der Lichtweg $[PDF]$ $= [RAF]$ sein. Nun ist



(Fig. 21.)

$$[PDF] = DF + n \cdot PD = DF + n \cdot d = PC + CF + (n-1)d,$$

CF aber ist bei einer dünnen Linse stets sehr nahe $= f$, also

$$[PDF] = PC + f + (n-1)d.$$

Andrerseits ist $[RAF]$, wenn dies der Weg des den scharfen Rand der Linse passirenden Strahls ist

$$[RAF] = RA + AF = PC + \sqrt{f^2 + y^2} = FC + f\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{f^2} + \ldots\right),$$

also, wenn höhere Potenzen von $\frac{y}{f}$ als die zweite vernachlässigt werden,

[1]) Phil. Mag. (5) 8, pag. 480. 1879. S. auch ibid. 20, pag. 354. 1885.

$$[RAF] = PC + f + \frac{1}{2}\frac{y^2}{f}.$$

Damit also $[RAF] = [PDF]$ sei, muss

$$(n-1)\,d = \frac{1}{2}\frac{y^2}{f} \quad \text{sein, daher} \quad f = \frac{1}{2}\frac{y^2}{(n-1)\,d}.$$

Bei Glas von Index $n = 1{\cdot}5$ ist dann die halbe Oeffnung der Linse die mittlere Proportionale zwischen Dicke und Brennweite — eine bekannte Regel der älteren Optik.

Endigt die Linse nicht in einen scharfen Rand, so ist für d die Differenz der Linsendicken am Rand und in der Mitte zu setzen.

Das Vorzeichen von f bezw. φ hängt nicht nur von denen der Radien ab, sondern auch von der Dicke der Linse. Z. B. bei einer biconvexen Linse ist $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ also f_1 und f_2 beide > 0; daher $f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$ positiv, so lange

$$d < \frac{n\,(r_1 - r_2)}{n-1};$$

wenn d diesen Grenzwerth überschreitet ist $f < 0$, das System wird dispansiv, trotzdem es aus zwei collectiven zusammengesetzt ist. Wenn $d = \frac{n\,(r_1 - r_2)}{n-1}$, also $\Delta = 0$ und $f = \infty$, so ist die Linse ein teleskopisches System.

In ähnlicher Weise kann man die Werthe und Vorzeichen studiren, welche die Brennweite einer einfachen Linse bei anderen Formen und Dicken annimmt.

Verschwindend dünne Linsen.

Als einfachster Fall hebt sich derjenige heraus, wenn die Dicke der Linse sehr klein ist gegen ihre Brennweite, so dass man den Einfluss der Dicke auf die Brennweite vernachlässigen kann. Alsdann ist

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}; \quad \varphi = (n-1)(\rho_1 - \rho_2).$$

Die Stärke der Linse ist dann also einerseits proportional dem um 1 verminderten Brechungsindex, anderseits der Differenz der beiden dem einfallenden Lichte zugewandten Krümmungen. Letztere allein bestimmen das Vorzeichen von f und φ. Je nachdem die nach aussen gerichtete Convex- oder Concavkrümmung der Linse die stärkere ist, wirkt die Linse als collectives oder dispansives System.

Die Theorie solcher Linsen von verschwindender Dicke allein wär es, welche vor den Untersuchungen von Gauss eine einigermaassen übersichtliche und genaue Darstellung gefunden hatte.

Da in manchen Fällen für eine vorläufige, ungefähre Veranschlagung der Wirkungen eines optischen Systems die Linsen derselben in erster Näherung als verschwindend dünn betrachtet werden können, so wollen wir auf die Theorie derselben auch hier kurz eingehen.

Die Brennweiten einer solchen Linse sind offenbar gleich den Abständen der Linse selbst von den Brennpunkten. Die Theorie der dünnen Linse wird hierdurch sehr ähnlich der einer einzelnen brechenden Fläche; nur dass die Brennweiten gleiche Grösse haben, also die Brennpunkte symmetrisch zur Linse liegen und sowohl die Haupt- als auch die Knotenpunkte als am Ort der Linse selbst zusammenfallend zu betrachten sind. Für die Entfernungen conjugirter Punkte von der Linse a, b ergiebt sich die einfache Formel

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f}$$

wenn wieder die Entfernungen a, b von der Linse aus im Sinne der Lichtbewegung als positiv gerechnet werden.

Die Vergrösserung $\beta = \frac{y'}{y}$ wird $= \frac{\xi}{x}$.

Das Convergenzverhältniss in conjugirten Axenpunkten,

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{x}{\xi}.$$

Befinden sich mehrere unendlich dünne Linsen in Contakt und kann man auch die Gesammtdicke dieses Systems gegen seine Brennweite vernachlässigen (was natürlich immer nur bei einer sehr geringen Anzahl von Linsen genügend annähernd der Fall ist), so ergiebt sich die »Stärke« des ganzen Systems

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \ldots \frac{1}{f_k} = \Sigma \frac{1}{f_k} = \Sigma \varphi_k,$$

d. i. gleich der Summe der Stärken der Einzellinsen oder, durch die einzelnen Radien und Brechungsindices ausgedrückt

$$\varphi^{(k)} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right) + \ldots\ldots,$$

$$\varphi^{(k)} = \Sigma (n_k - 1)(\rho_k - \rho_k'),$$

wenn erste und zweite Fläche jeder Linse durch hochgestellten, die Linsen selbst durch den unteren Index unterschieden werden.

Wenn die dünnen Linsen nicht im Contakt befindlich, sondern durch endliche Intervalle getrennt sind, so werden die Ausdrücke für die Brennweite complicirter und der Brennpunktsabstand ist dann besonders zu berechnen. Diese Aufgabe ist aber ganz analog derjenigen, die Bestimmungsstücke eines Systems zu berechnen, dessen einzelne brechende Flächen gegeben sind und sei deshalb hier nur auf die betr. Orts citirte Literatur verwiesen.

Von Interesse ist vielleicht nur noch eine kurze Discussion der möglichen Combinationen zweier getrennter dünner Linsen.

Ist ihre Entfernung $= d$, so ist ihr optisches Intervall wie bei einer einzelnen Linse von endlicher Dicke

$$\Delta = f_1' - f_2 + d, \quad \text{also hier} \quad -\Delta = f_1 + f_2 - d.$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d};$$

daher

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2.$$

1) Sind f_1 und f_2 beide > 0, also beide Linsen collectiv, so sieht man, dass die Brennweite des zusammengesetzten Systems ihren kleinsten positiven Werth hat, wenn $d = 0$ ist, die Linsen sich berühren. Mit wachsendem d nimmt f zu und es wird $f = \infty$, wenn $d = f_1 + f_2$; das System ist dann ein teleskopisches. Bei noch grösserem d erhält f einen grossen negativen Werth und dieser nimmt mit weiter wachsendem d unbegrenzt ab.

2) Sind f_1 und f_2 beide < 0, also beide Linsen dispansiv, so hat f für $d = 0$ seinen grössten und zwar negativen Werth. Bei wachsendem d nimmt f an Grösse ab, bleibt aber stets negativ.

3) Ist die eine Linse collectiv, die andre dispansiv, z. B. $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, so ist bei $d = 0$ die Brennweite des zusammengesetzten Systems positiv oder negativ, je nachdem f_1 dem absoluten Werthe nach kleiner oder grösser als f_2 ist.

a) Wenn $[f_1] > [f_2]$, also hier $f_1 + f_2 > 0$, so nimmt mit wachsendem d f wachsende negative Werthe an und wird bei $d = f_1 + f_2$ unendlich, d. h. das System wird wieder teleskopisch. Bei noch weiterer Steigerung von d durchläuft f abnehmende positive Werthe

b) Wenn $[f_1] < [f_2]$ also $f_1 + f_2 < 0$, so hat f im Falle des Contakts beider Linsen seinen grössten positiven Werth. Bei wachsendem d wird f kleiner, bleibt aber stets positiv. Im Falle wo $d = f_1 + f_2$, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems coincidirt mit dem hinteren der ersten und eine teleskopische Abbildung resultirt, sind die Maassverhältnisse der letzteren, wie wir früher fanden, (pag. 49) gegeben durch die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f_2}{f_1}; \quad \gamma = \frac{tang\, u'}{tang\, u} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

Die wichtigsten Werke der ausserordentlich umfangreichen für den Gegenstand dieses Abschnitts vorhandenen Literatur sind schon in den beiden vorangehenden Artikeln namhaft gemacht worden. Es sei daher auf diese verwiesen. Eine bis in die neuere Zeit reichende Zusammenstellung, die jedoch bei weitem nicht erschöpfend ist, hat MATTHIESSEN versucht. Grundriss etc., pag. 272, und PFLÜGER's Arch. f. Physiol. 19, pag. 553. 1879.

Realisirung der optischen Abbildung
B. durch schiefe Elementarbüschel.
(Astigmatische Brechung.)

Der vorher betrachtete Fall der Brechung von Elementarbüscheln, deren Axen der gemeinsamen Centrale von Kugelflächen unendlich nahe sind, ist nicht der einzige, in welchem eine collineare Abbildung zu Stande kommt. Von Bedeutung für die Theorie der optischen Instrumente ist noch der andere Fall, dass die abbildenden Büschel zwar auch unendlich eng, elementar, ihre Axen aber nicht der gemeinsamen Centralen, sondern einem unter endlichem Winkel gebrochenen, das System durchsetzenden Strahl unendlich nahe sind. Allerdings wird die Preisgabe der einen Beschränkung hier durch andere neu einzuführende compensirt; aber es bleibt, wie wir zeigen wollen, dennoch eine Abbildung bestehen, welche in ihrem engen Bereich den Bedingungen unserer allgemein behandelten genügt und darum auch ihren Gesetzen unterworfen ist.

Spiegelung und Brechung eines gegen eine einzelne Kugelfläche schief einfallenden Elementarbüschels.

Auf die schönen geometrischen Entwickelungen, durch welche namentlich REUSCH[1]) und LIPPICH[2]) die Theorie dieses Problems ausgebaut haben, können wir hier leider nur hinweisen; um die uns in erster Reihe interessirenden Maassbeziehungen zu erhalten, beschränken wir uns auf die mehr analytische Beweisführung.

---

[1]) Univ.-Progr., Tübingen 1857, und POGG. Ann. 130, pag. 497. 1867.
[2]) Denkschr. d. kais. Akad. d. Wiss. z. Wien 38, pag. 163. 1877.

Wir haben das vorliegende Problem schon bei früherer Gelegenheit (pag. 18—23) in seinen Grundzügen behandelt. Wie wir damals sahen, wird ein schief einfallendes ursprünglich homocentrisches Büschel durch die Spiegelung oder Brechung an einer irgend wie gestalteten Fläche (endlicher Krümmung) im allgemeinen in ein »astigmatisches« verwandelt, d. h. in ein solches, dessen sämmtliche Strahlen in erster Näherung durch zwei zu einander und zu einem mittleren Strahl senkrechte, getrennt liegende Gerade die »Brennlinien« oder »Bildlinien« gehen. Diesen Charakter — tetraëdrische Modifikation des Büschels nennt es Reusch — behält das Büschel auch nach beliebig vielen Brechungen bei.

Wir haben also nur noch die Maassbeziehungen aufzusuchen, welche zwischen den Elementen des einfallenden und gebrochenen Strahls obwalten, wenn die wirksame Fläche sphärisch ist und wollen hier diese Untersuchung nur unter der weiteren Beschränkung durchführen, dass der Hauptstrahl nie gegen die Axe des Systems windschief sei. Alsdann folgt für die Richtung der Brennlinien eine Vereinfachung, welche die ganze Betrachtung sehr erleichtert.

Denn um diese Richtung zu bestimmen, hätten wir nach den Ausführungen des angezogenen Abschnitts durch den Schnittpunkt der Büschelaxe mit einer der Wellenflächen der gebrochenen Strahlen die Ebenen der grössten und kleinsten Krümmung jener Fläche zu legen. Die Wellenfläche eines beliebig weit geöffneten, ursprünglich homocentrischen Büschels nach der Brechung an einer Kugel ist aber wegen der Symmetrie aller Verhältnisse um den vom leuchtenden Punkt nach dem Kugelmittelpunkt gerichteten Strahl, wie schon pag. 19 hervorgehoben, nothwendig eine Rotationsfläche mit diesem als Axe. Ihre Hauptkrümmungslinien sind daher die Schaaren der Meridiankurven und Parallelkreise zu dieser Axe. Strahlen, welche vom leuchtenden Punkte aus nach den Meridian- und Breitenkreisen der brechenden Kugel (bezogen auf die gleiche Axe) hinzielen, schneiden die Wellenflächen der einfallenden Strahlen in jenen Hauptkrümmungskurven und das gleiche gilt von den in jenen Kreisen an der Kugel gebrochenen Strahlen mit Bezug auf deren Wellenfläche. Die Meridiane und Breitenkreise der Kugel aber liegen Element für Element in bezw. senkrecht zur Einfallsebene, also ist dies auch mit den Brennlinien eines ursprünglich homocentrischen Büschels der Fall.

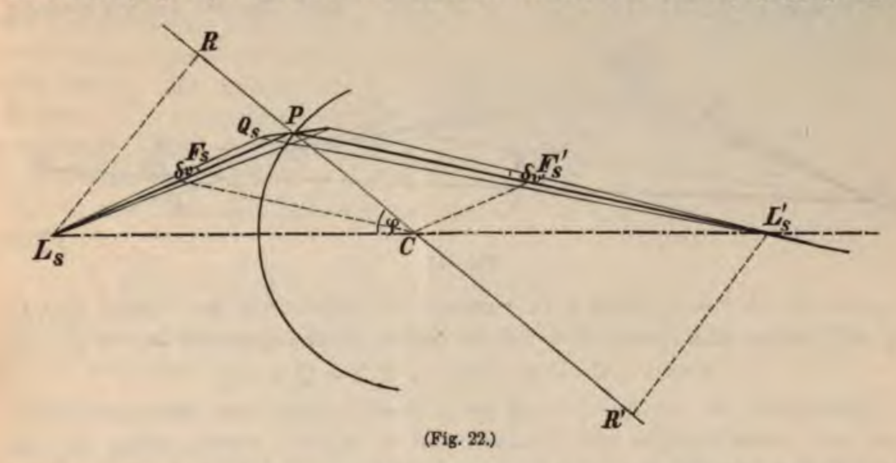
Dies gilt auch nach beliebig vielen Brechungen, wenn die Einfallsebenen aller dieser zusammenfallen, d. h. wenn die Brechungen in einem System centrirter Kugeln stattfinden und der Hauptstrahl des einfallenden Büschels mit der Axe des Systems in einer Ebene liegt.

Dass die Brennlinien des weiteren bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung beide als senkrecht zum Hauptstrahl des Büschels stehend angenommen werden dürfen, bewiesen wir früher allgemein (pag. 23). Hierdurch sind also ihre Richtungen vollständig bestimmt.

Um nun die Lagenbeziehung der conjugirten Punkte auf den Axen, zunächst für eine einzige Brechung zu ermitteln, denken wir uns durch die Axe des einfallenden und des gebrochenen Büschels die beiden Hauptschnitte gelegt, den einen mit der Einfallsebene zusammenfallend, den andern senkrecht zu ihr.

Den ersteren bezeichnen wir als Meridional-, Tangential- oder ersten Hauptschnitt, den anderen als Equatoreal-, Sagittal- oder zweiten Hauptschnitt, und unterscheiden die auf sie bezüglichen Grössen soweit nöthig durch verschiedene Buchstaben oder Indices.

Die Strahlen des einfallenden Büschels, welche in diesen Ebenen liegen, werden in den gebrochenen Büscheln den analogen Schnitten angehören und zwar die des Tangentialschnitts streng, weil ja Strahlen bei der Brechung in der Einfallsebene verbleiben; die des Sagittalschnitts wenigstens bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung. Denn diese Ebenen gehen eine Berührung von mindestens der zweiten Ordnung mit den Kreiskegeln ein, welche durch Rotation von LPL' um LCL' (Fig. 22) entstehen und welche einander nach dem pag. 55 gesagten



(Fig. 22.)

in ihrer ganzen Ausdehnung conjugirt sind. Hieraus folgt nun bereits, dass der zu L conjugirte Bildpunkt der Sagittalstrahlen der dort betrachtete Punkt L' ist, in welchem der gebrochene Strahl von der Centralen LC getroffen wird. Wir bezeichnen ihn jetzt mit L_s'. Er wird auch »zweiter« Bildpunkt des gebrochenen Büschels genannt im Gegensatz zu dem der Tangentialstrahlen als »erstem« Bildpunkt. (Dies wohl die bei weitem häufigere Bezeichnungsweise; umgekehrt bei Lippich).

Die Strahlenvereinigung in L_s' ist nach dem Vorstehendem eine solche von zweiter Ordnung. Dies ergiebt sich auch schon daraus, dass in dem Sagittalschnitt in Bezug auf die Einfallsebene Symmetrie vorhanden ist, also Strahlen, die unter gleichem Winkel gegen diese Ebene diesseits und jenseits derselben von L_s ausfahren, in L_s' mit einander streng vereinigt werden.

Equatorealschnitt. Um die Beziehungen zwischen conjugirten Stücken des einfallenden und des gebrochenen Sagittalbüschels zu erhalten, fälle ich von L_s und L_s' (Fig. 22) auf den Radiusvector CP Senkrechte, nach R und R'. Dann ist $L_s'R' : L_sR = CR' : CR$ oder $PL_s = s$, $PL_s' = s'$ gesetzt,

$$s' \cdot \sin i' : s \cdot \sin i = (s' \cos i' - r) : (s \cos i - r),$$

woraus unter Anwendung der Grundgleichung $n' \cdot \sin i' = n \cdot \sin i$, wird

$$\frac{n \cdot \cos i}{r} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i'}{r} - \frac{n'}{s'}$$

oder

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \tag{1}$$

oder in unserer früher eingeführten Bezeichnungsweise

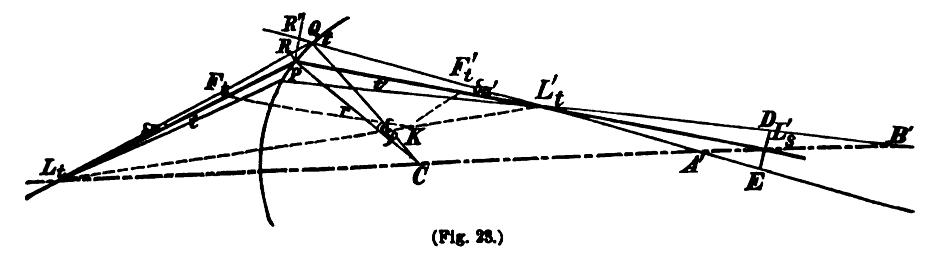
$$\Delta\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{1}{r} \Delta (n \cos i)$$

als die Beziehung zwischen conjugirten Schnittweiten.

Das Verhältniss conjugirter Neigungswinkel von Strahlen gegen die Axe des Büschels — das Convergenzverhältniss in conjugirten Punkten — ergiebt sich einfach, indem für einen Punkt Q_s der Sagittalschnittlinie (senkrecht über oder unter P), gilt

$$PQ_s = s \cdot dv = s' \cdot dv'; \quad \text{also} \quad \frac{dv'}{dv} = \frac{s}{s'}. \tag{2}$$

Meridionalschnitt. Um die Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken der Tangentialbüschel zu erhalten, habe ich die Grundgleichung



(Fig. 23.)

$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i' = Q$ nach i zu variiren; sie ergiebt für den Strahl LQ_tL' (Fig. 23), dessen Einfallswinkel $= i + di$, dessen Brechungswinkel $= i' + di'$ ist,

$$n \sin(i + di) = n' \cdot \sin(i' + di') = Q + dQ.$$

Entwickeln wir $\sin(i + di)$ und $\sin(i' + di')$ nach dem Maclaurin'schen Satze und vernachlässigen alle Potenzen von di und di', welche höher als die zweite sind, so finden wir

$$dQ = n \cdot di \cdot \cos i - \frac{1}{2} n\, di^2 \cdot \sin i = n' \cdot di' \cdot \cos i' - \frac{1}{2} n' \cdot di'^2 \cdot \sin i',$$

also

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot \cos i - \frac{1}{2} n \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot di \sin i = n' \cdot \frac{di'}{d\varphi} - \frac{1}{2} n' \cdot \frac{di'}{d\varphi} \cdot di' \cdot \sin i',$$

Nun ist $i = u - \varphi$, daher

$$\frac{di}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi} - 1,$$

und ebenso

$$\frac{di'}{d\varphi} = \frac{du'}{d\varphi} - 1.$$

Fälle ich ferner von P Senkrechte auf LQ und $L'Q$, nach R resp. R', so st wegen der Kleinheit des Bogens PQ_t, der als geradlinig betrachtet werden kann, $RP = PQ_t \cdot \cos RPQ_t = r \cdot d\varphi \cos i$ und andererseits $RP = t \cdot du$ also $t \cdot du = r \cdot d\varphi \cdot \cos i$, welche Gleichung unter Vernachlässigung nur der Grössen von der Ordnung $d\varphi^2$ gilt. Daher ist

$$\frac{di}{d\varphi} = \frac{r \cos i}{t} - 1,$$

und ganz ebenso

$$\frac{di'}{d\varphi} = \frac{r \cos i'}{t'} - 1.$$

Tragen wir diese Ausdrücke für $\frac{di}{d\varphi}$ und $\frac{di'}{d\varphi}$ in die Gleichung für $\frac{dQ}{d\varphi}$ ein, so wird diese:

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n\left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right) \cos i - \frac{1}{2} n \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)^2 d\varphi \cdot \sin i$$

$$= n'\left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right) \cos i' - \frac{1}{2} n' \left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right)^2 d\varphi \cdot \sin i'.$$

Oder

$$n' \cos i' \left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right) - n \cos i \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right) = \frac{1}{2} Q \, d\varphi \left[\left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right)^2 - \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)^2\right]$$

bis auf Grössen von der Ordnung $d\varphi^2$ genau.

Hieraus folgt, dass verschiedenen Werthen von $d\varphi$, d. h. verschiedenen Einfallspunkten innerhalb des unendlich kleinen brechenden Kugelelements Werthe von t' entsprechen, die sich um Grössen von der Ordnung der Dimensionen dieses Kugelelements ($r d\varphi$) unterscheiden; es gehören z. B. auch zu Werthen von $d\varphi$ von gleicher Grösse aber entgegengesetztem Vorzeichen verschiedene Werthe von t'. Mit anderen Worten: Strahlenpaare, die in der Einfallsebene symmetrisch zum Hauptstrahl einfallen, werden nicht streng vereinigt (wie im Sagittalschnitt). Die Strahlenvereinigung in L_t' ist nur eine solche von der ersten Ordnung.

In unserer Bezeichnungsweise können wir die letzte Gleichung auch schreiben

$$\Delta \left[n \cos i \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)\right] = \frac{1}{2} Q \cdot d\varphi \, \Delta \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)^2,$$

Unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen von der ersten Ordnung ($d\varphi$) wird dann

$$\Delta \left[n \cos i \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)\right] = 0, \tag{3}$$

die Beziehung zwischen den Entfernungen t und t' conjugirter Punkte vom Einfallspunkt im Meridianschnitt. Sie wird auch in den Formen gebraucht;

$$\Delta \left[\frac{n \cos^2 i}{t}\right] = \frac{1}{r} \Delta (n \cos i), \tag{3a}$$

oder

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \tag{3b}$$

Das Verhältniss conjugirter Neigungswinkel, das Convergenzverhältniss im Tangentialschnitt, folgt aus den oben schon benützten Gleichungen

$$t \cdot du = r d\varphi \cos i \quad \text{und} \quad t' du' = r d\varphi \cos i', \text{ zu}$$

$$\frac{du'}{du} = \frac{\cos i'}{t'} \cdot \frac{t}{\cos i}. \tag{4}$$

Die Abscissen der Hauptbrennpunkte vom Einfallspunkt P aus gemessen sind nach Gleichung (1) resp. (3) für die Sagittalstrahlen

$$s_F = S = -\frac{nr}{n' \cos i' - n \cos i}; \quad s_F' = S' = \frac{n' r}{n' \cos i' - n \cos i} \tag{5}$$

für die Meridianstrahlen

$$t_F = T = -\frac{n \cos^2 i \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}; \quad t_F' = T' = \frac{n' \cos^2 i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}\text{[1]}.$$

Unter Benützung dieser Grössen können wir die Gleichungen (1) und (3) in der Form schreiben

$$\frac{S'}{s'} + \frac{S}{s} = 1, \tag{1*}$$

$$\frac{T'}{t'} + \frac{T}{t} = 1, \tag{2*}$$

---

[1]) Dieselben sind hier nicht identisch mit dem, was wir früher als »Brennweite« definirt haben.

Nach einem leicht zu beweisenden geometrischen Satze gehen aber die Verbindungslinien zweier Punkte (L, L'), die auf je einer Geraden liegen und deren Abcissen (s, s') bezw. (t, t') einer Gleichung von dieser Form genügen, sämmtlich durch einen Punkt, dessen Coordinaten bezogen auf die Hauptstrahlen als Axen, die Grössen (S, S') bezw. (T, T') sind, und umgekehrt.

Für den Sagittalschnitt kennen wir deren Fixpunkt bereits; es ist der Kugelmittelpunkt C. Mit seiner Hilfe können wir den ersten und zweiten Hauptbrennpunkt F_s, F_s' constructiv ermitteln: als den Schnittpunkt der durch C zum gebrochenen, bezw. einfallenden Hauptstrahl gezogenen Parallelen mit jeweilig dem anderen Hauptstrahl.

Für den Tangentialschnitt können wir umgekehrt den Fixpunkt K aus seinen Coordinaten T, T' construiren, indem wir T und T' auf PL bezw. PL' abtragen nach F_t und F_t', oder sie aus S und S' gemäss den Formeln (5) in üblicher Weise construiren, und durch F_t zu PL', durch F_t' zu PL Parallele ziehen. Der Schnittpunkt dieser ist K. (Eine schönere Construction s. bei LIPPICH, l. c., pag. 171).

Mittelst der Punkte C und K ist es dann sehr einfach, zu jedem Punkt auf dem einen oder anderen Hauptstrahl den in Bezug auf Sagittal- und Tangentialstrahlen conjugirten zu finden. Man hat diesen Punkt nur mit C resp. K zu verbinden und diese Verbindungslinie bis zum Schnitt mit der anderen Axe zu verlängern. Der Schnittpunkt ist der gesuchte conjugirte Punkt.

Einem und demselben Einfallspunkt entsprechen auf diese Weise in Bezug auf Sagittal- und Tangentialschnitt zwei verschiedene conjugirte Punkte. Die Strecke zwischen diesen, die Bildstrecke, ist die centrale Projection der Strecke CK von L aus auf den anderen Hauptstrahl. Dieselbe wird offenbar gleich Null für denjenigen Einfallspunkt, in welchem die verlängerte CK die Axe des einfallenden Büschels schneidet[1]). Dies führt auf die früher betrachteten »aplanatischen Punktepaare« der Kugel (pag. 55).

Astigmatismus. In den Formeln war bisher nichts darüber vorausgesetzt, ob L_s und L_t derselbe Punkt sei, d. h. $s = t$ oder nicht. Aus diesen Formeln (1) und (3) ergiebt sich nun ebenso wie aus obiger Construction und unseren früheren Betrachtungen, dass auch im ersteren Falle im Allgemeinen $s' \neq t'$ ist. Durch die Brechung eines homocentrischen schief einfallenden Elementarbüschels entsteht also eine astigmatische Differenz der Bildpunkte und die eines schon astigmatisch einfallenden erfährt im Allgemeinen eine Aenderung. Da der letztere Fall den ersteren in sich begreift, so leiten wir einen Ausdruck für diese Aenderung aus unseren Formeln ab.

Indem wir $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ setzen, wird (3)

$$\frac{n'}{t'} - \frac{n' \sin^2 i'}{t'} - \frac{n}{t} + \frac{n \sin^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r},$$

hiervon Gleichung (1) abgezogen, ergiebt

$$n'\left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{s'}\right) - n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = \frac{n' \sin^2 i'}{t'} - \frac{n \sin^2 i}{t}$$

oder in der eingeführten Bezeichnungweise

$$\Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = Q^2 \Delta \left(\frac{1}{nt}\right). \tag{6}$$

Der Astigmatismus erfährt keine Aenderung, einem homocentrischen

[1]) REUSCH, l. c., pag. 508.

Objektpunkt enspricht also ein homocentrischer Bildpunkt, wenn $n't' = nt$. Diese Bedingungsgleichung führt wiederum auf dieselben »aplanatischen Punktepaare« bezw. Flächen, welche wir früher auf anderem Wege gefunden haben.

Bildlinien. Die Gesammtheit der Strahlen eines unendlich dünnen räumlichen »optischen« Büschels kann man nun in doppelter Weise als ebene Büschel zusammenfassen: ein Mal als Tangential-Büschel, deren Axen sämmtlich durch L_s gehen; das andere Mal als die Sagittalbüschel, deren Axen durch L_t gehen. Die Axen der ersteren werden nach der Brechung durch L_s' gehen, denn diese Axen sind ja identisch mit den Strahlen des sagittalen Hauptbüschels $L_s Q P$ (Fig. 22). Die Axen der letzteren werden nach der Brechung sämmtlich durch L_t' gehen, aus dem analogen Grunde. Die Vereinigungspunkte aller ebenen Tangentialbüschel werden die durch L_t' gehende erste Brennlinie des gebrochenen Büschels bilden; die der ebenen Sagittalbüschel die durch L_s' gehende zweite Brennlinie und es liesse sich hier durch besondere Betrachtung das Resultat gewinnen, welches wir früher auf Grund allgemeinerer Ueberlegung ableiteten: dass diese Brennlinien (bis auf unendlich kleine Abweichungen von der zweiten Ordnung gegenüber den Dimensionen des brechenden Kugelelements) senkrecht auf dem Hauptstrahl und senkrecht zur bezw. in der Einfallsebene liegen[1]).

Anmerkung. Als zweite Bildlinie, welche in der Einfallsebene liegt und durch L_s' geht, bietet sich auf Grund der speciellen Ableitung allerdings zunächst nicht eine zum Hauptstrahl $L_s'P$ senkrechte Gerade dar, sondern das Stück $A'B'$ der Centralen (Fig. 23), welches die beiden äussersten Strahlen des tangentialen Hauptbüschels aus ihr herausschneiden. Durch dieses Stück müssen alle Strahlen des Büschels gehen, denn wenn ich die Fig. 22, um die Centrale LCL' um kleine Winkel aus der Zeichenebene heraus nach vorn und hinten drehe, so bestreiche ich die Gesammtheit aller Strahlen des ganzen Büschels, während $A'B'$ der Grösse und Lage nach ungeändert, also allen gemeinsam ist. Aber die Gerade $C'D'$, welche zu PL_s' senkrecht ist, erfüllt, wie wir früher gezeigt haben, ebenfalls die Bedingung, dass alle gebrochenen Strahlen ihr bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung nahe bleiben und ist für die meisten Entwicklungen bequemer.

Dass die Strahlenvereinigung in $A'B'$ eine so vollkommene ist, hat für unsere Entwickelungen keinen Werth, da ja die Vereinigung in den ersten Brennpunkten L_t', wie gezeigt, nur von der ersten Ordnung ist.

Die Geometrie bietet natürlich die Hilfsmittel dar, um bei gegebener Grösse des brechenden Elements der Kugel genauer die Art der Strahlenvereinigung in der Nähe von L_s' und L_t' zu untersuchen. (Siehe die Bemerkungen pag. 22—23.)

Während durch Brechung an sphärischen Flächen oder im Scheitel von Rotationsflächen Astigmatismus nur bei schiefem Einfall des Büschels entsteht, bringt die Brechung an einer Fläche doppelter Krümmung im Allgemeinen bei jeder, auch normaler Incidenz des Büschels, eine astigmatische Modifikation desselben hervor. Die Nothwendigkeit hiervon folgt ohne weiteres aus der verschiedenen Krümmung einer solchen brechenden Fläche in verschiedenen, durch den Hauptstrahl gehenden Ebenen. Der so entstandene Astigmatismus, welcher auch beim menschlichen Auge oft vorkommt und auf dem Gebiet der künstlichen optischen Instrumente in dem extremen Fall der Cylinderlinsen verwirklicht ist, war viel eher bekannt und ist bei der genannten Art von Linsen auch viel auffallender als der oben behandelte. Er bildete z. B. für STURM die Anregung und den Ausgangspunkt seiner allgemeinen Untersuchungen.

Die Herleitung der für diesen Astigmatismus geltenden Gesetze bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Wir müssen wegen Mangel an Raum hier auf ein näheres Eingehen verzichten und uns damit begnügen, auf die bezügliche Literatur hinzuweisen.

---

[1]) In Folge eines Versehens heisst es pag. 21, Zeile 26 v. o. »den ersten Brennpunkt« tatt »den zweiten Brennpunkt«.

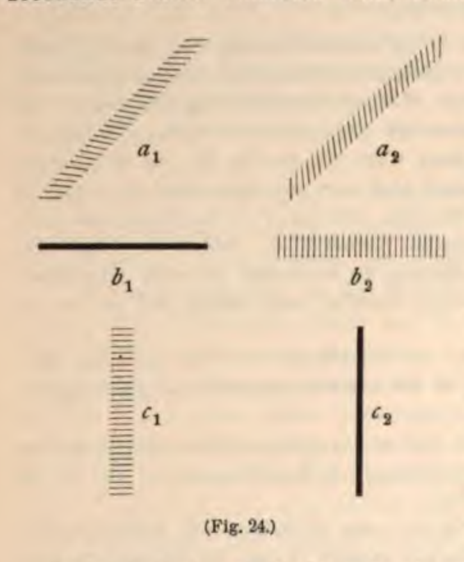
Die Brechung an einer beliebigen Fläche (doppelter Krümmung) ist, ausser in den Lehrbüchern von LLOYD und A. von C. NEUMANN und L. MATTHIESSEN (s. u.) behandelt.

Das für die Physiologie des Auges wichtige nebst der älteren Literatur findet man in HELMHOLTZ, Physiol. Optik, § 14.

Die Theorie der Cylinderlinsen ist insbesondere von E. REUSCH in einem ebenso betitelten Werkchen (Leipzig 1868) ausgearbeitet worden.

Abbildung ausgedehnter Objekte durch astigmatische Büschel.

Durch Brechung schiefer Büschel wird also im Allgemeinen keine homocentrische Strahlenvereinigung herbeigeführt; als Bild eines Punktes bieten sich zwei zu einander senkrechte Linien dar, wenigstens sind dies diejenigen Stellen des gebrochenen Büschels, in welchen die Concentration des Lichts die grösste ist. Die manchmal aufgeworfene Frage: welche von diesen beiden Linien vom Auge wohl als das eigentliche Bild aufgefasst werde, scheint mir in dieser Allgemeinheit gar nicht zu beantworten möglich. Unter gewissen Umständen werden wir jedoch in der That veranlasst, dem einen oder dem anderen Bilde den Vorzug zu geben. Denn denken wir uns als Objekt eine kleine zu einem mittleren schief einfallenden (Haupt-) Strahle senkrechte gerade Linie, von deren Punkten Strahlen ausgehn, die jenem mittleren sämmtlich sehr nahe sind (etwa alle die brechende Fläche innerhalb eines kleinen Elements treffen), so wird für diese Punkte je annähernd das gleiche gelten. Die Hauptstrahlen der zu den einzelnen Punkten gehörigen Büschel werden zwar gegen die Normale des abbildenden Kugelsegments etwas verschiedene Winkel bilden, der Astigmatismus der gebrochenen Büschel daher auch etwas verschieden stark sein, doch werden die Bildlinien erster und die zweiter Art je unter sich parallel und ihr Grössenunterschied gering sein. Jeder Punkt der leuchtenden Geraden erscheint also im Bilde (Fig. 24) in eine Linie ausgezogen, ganz gleich ob wir ihn in der ersten (a_1) oder der zweiten (a_2) Bildebene betrachten; das Bild als ganzes muss daher einen undeutlichen, verschwommenen Eindruck machen.



(Fig. 24.)

Wenn jedoch die leuchtende Gerade selbst einer der beiden Reihen von Bildlinien parallel, d. h. entweder in der Einfallsebene des mittleren Hauptstrahls oder senkrecht zu ihr gelegen ist, dann fallen in dem Bilde, dessen Linien sie parallel ist, diese sämmtlich der Länge nach aufeinander, die Breite des Bildes wird hierdurch nicht berührt und dasselbe erscheint fast wie ein normales, scharfes Bild (b_1 resp. c_2). In der anderen Ebene hingegen erscheint jeder Punkt in eine zur Richtung der Geraden senkrechte Linie ausgezogen, die durch den Astigmatismus verursachte Unschärfe erreicht also ihren höchsten Grad b_2 resp. c_1. In diesen beiden Fällen wird demnach unwillkürlich dasjenige Bild als solches schlechthin aufgefasst werden, dessen Linien der Richtung der Geraden parallel sind.

Besteht also das Objekt in einem rechtwinkligen Kreuz, oder noch besser in einem Kreuzgitter, dessen Linien bezw. parallel und senkrecht zur Einfallsebene

liegen, so werden die ersteren im zweiten Brennpunkte (dem der Sagittalstrahlen), die letzteren im ersten (dem der Meridianstrahlen) scharf erscheinen und manchmal sogar allein sichtbar sein und diese Erscheinung ist umgekehrt das charakteristische Merkmal und Erkennungszeichen von vorhandenem Astigmatismus. (S. OERTLING, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. 1843.)

Anmerkung. Wie empfindlich dasselbe ist, mag an dem Beispiel der Reflexion an einer Kugelfläche gezeigt werden. Für diese gilt im Sagittalschnitt

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2\cos i}{r}$$

und im Tangentialschnitt

$$\frac{1}{t'} + \frac{1}{t} = \frac{2}{r\cos i},$$

daher für $s = t$

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{s'} = \frac{2}{r\cos i} - \frac{2\cos i}{r},$$

$$\frac{s' - t'}{s' \cdot t'} = \frac{de}{e^2} = \frac{2}{r} \cdot \sin i \cdot tg\, i.$$

Man sieht in letzterem Ausdruck am deutlichsten, in welchem Maasse der Astigmatismus caet. par. mit dem Einfallswinkel wächst; und zwar ist dies in so hohem Maasse der Fall, dass man nach einer Bemerkung von Dr. HUGO SCHROEDER [1]) mit geeigneten Mitteln an einem Flüssigkeitsniveau, etwa einem Quecksilberspiegel, den durch die Krümmung der Erde verursachten Astigmatismus der an ihm reflektirten Büschel noch bemerken könnte. In der That, setzen wir den Erdradius

$$r = 6370000\ m \text{ und } i = 80°, \text{ so wird } \frac{de}{e^2} = 0{\cdot}00000175 \text{ rund} = 0{\cdot}000002\ m.$$

Beobachten wir die Erscheinung mit einem Fernrohr, dessen Objektiv 7·5 m Brennweite (ca. 50 cm Oeffnung) hat, also Dimensionen, die für unsere Zeit nicht mehr ungewöhnliche sind, so gilt für die Abbildung durch dieses die frühere Formel für die Tiefenvergrösserung

$$dx' = \frac{dx}{x^2} \cdot f^2.$$

Wenn der vordere Brennpunkt des Objektivs etwa im Spiegel liegt, oder das Objekt sehr weit entfernt ist, so können wir setzen $\frac{dx}{x^2} =$ unserem obigen $\frac{de}{e^2} = 0{\cdot}00000175$, also $dx' = 0{\cdot}000098\ m = 0{\cdot}1\ mm$ ca.

Eine Verschiebung des Bildortes von 0·1 nun würde man aber bei den angenommenen Dimensionen des Fernrohrs sehr wohl wahrnehmen können. Mit einem der modernen Riesenteleskope, etwa dem der Licksternwarte in Californien, würde die Differenz der Bildebenen 0·7 mm betragen, also sehr markant sein. Natürlich müsste das bewusste Quecksilberniveau entsprechend gross und völlig ruhig sein.

Bereich der collinearen Abbildung bei schiefer Brechung.

Als Kennzeichen der collinearen (optischen) Abbildungen hatten wir früher (pag. 26) hingestellt: dass jedem Punkte des einen Raumes ein — und nur ein — Punkt des anderen, jeder Linie des einen Raumes eine und nur eine solche des anderen entspreche. Bei einem räumlichen, unter endlichen Winkeln gebrochenen Elementarbüschel entspricht nun zwar gemäss dem Brechungsgesetze einem einfallenden Strahle nur ein gebrochener, einem Punkte im Objektivraum aber, gemäss den vorstehenden Betrachtungen, zwei Linienelemente im Bildraum. Es findet also auch nicht einmal für die unendlich nahe um einen einfallenden und den entsprechenden gebrochenen Strahl gelegenen fadenförmigen Raumgebiete die Beziehung der Collinearität statt.

---

[1]) Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 7. 1881.

Unsere Betrachtungen zeigen uns aber zugleich, wie wir das Abbildungsgebiet zu beschränken haben, um auch zwischen conjugirten Punkten eine eindeutige Beziehung zu erhalten. Gemäss denselben werden die im ersten Hauptschnitt (in der Einfallsebene) unendlich nahe an einem mittleren einfallenden Strahl l gelegenen Punkte A_1, B_1, C_1 . . . durch Strahlen die im selben Hauptschnitt verlaufen und unendlich kleine Winkel mit l bilden eindeutig abgebildet in Punkte A_1', B_1', C_1', welche dem zu l conjugirten Strahle l' ganz nahe und ebenfalls im ersten Hauptschnitt liegen.

Andrerseits werden die im zweiten Hauptschnitt (senkrecht zur Einfallsebene) nahe an l gelegenen Punkte A_2, B_2, C_2 . . . durch die in diesem Hauptschnitt einfallenden Strahlen eindeutig abgebildet in Punkte A_2', B_2', C_2' . . . welche in dem senkrecht zur Einfallsebene durch l' gelegten Schnitt, ganz nahe an l' liegen.

In den so definirten, unendlich schmalen Flächenstreifen findet also jeweilig die Beziehung der Collineation, d. h. eine »optische Abbildung« in unserem früheren Sinne, statt.

Der Objektraum der einen Abbildung durchdringt den der anderen im einfallenden Hauptstrahle l, der Bildraum der einen den der anderen im gebrochenen l'. Im übrigen aber sind diese beiden Abbildungen sowohl räumlich getrennt, als auch in ihren Maassverhältnissen verschieden, daher auch gesondert zu behandeln.

Genau genommen, erstreckt sich auch ihr Bereich senkrecht zu den Axen nicht gleich weit. Denn während die Strahlenvereinigung von sagittalen Büscheln, ebenso wie die von paraxialen von zweiter Ordnung ist, fanden wir die der tangentialen Büschel nur von erster Ordnung. Während wir also das Gebiet der Abbildung durch erstere soweit abgrenzen können, dass nur die Quadrate der Büschelöffnungen oder der linearen Büscheldurchmesser nahe der brechenden Kugel gegen die Schnittweiten der Büschel verschwinden, müssen wir es im anderen Falle so beschränken, dass schon jene Durchmesser selbst die gleiche relative Kleinheit besitzen, wenn wir beidemal gleich vollkommene Strahlenvereinigung verlangen[1]).

Der angenommene mittlere Strahl repräsentirt — jeweilig vor oder nach der Brechung — die Axen der Abbildung, d. h. Linienelemente senkrecht zum einfallenden Strahl l werden durch die eine wie die andere Art von ebenen Büscheln, in Linienelementen senkrecht zum gebrochenen Strahl l' abgebildet. Für Gerade im zweiten Hauptschnitt — senkrecht zur Einfallsebene — folgt die Richtigkeit der Behauptung aus Symmetriegründen; das Bild einer zu l senkrechten Geraden kann nur eine Curve sein, deren Scheitel in l liegt, welche also bis auf Abweichung von der zweiten Ordnung jedenfalls mit einer zu l' senkrechten Geraden zusammenfällt. Das Bild einer in der Einfallsebene zu l senkrechten Geraden kann — und wird im Allgemeinen — eine Gerade sein, die mit l' einen end-

---

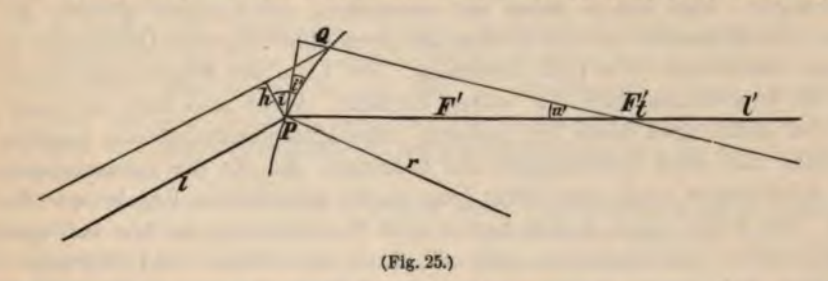
[1]) Die Abgrenzung des Geltungsbereichs der beiden Abbildungen ist oben nur näherungsweise vorgenommen. Eine genaue Discussion dieses Punktes würde uns hier zu weit führen. Es sei daher auf die eingehendere Erörterung LIPPICH's (l. c. pag. 172) hingewiesen und nur noch ein von diesem abgeleiteter Satz angeführt, welcher eine Verallgemeinerung der oben abgeleiteten Beziehungen involvirt.

Projicirt man irgend einen unendlich nahe an l verlaufenden Strahl a auf die beiden durch l gelegten Hauptebenen und sucht zu den Projectionen die bezw. in den Hauptebenen von l' gelegenen Strahlen, so sind diese die Projectionen des zu a gehörigen gebrochenen Strahls.

lichen Winkel bildet, wenn wir dieses Bild Punkt für Punkt nach den oben abgeleiteten Gesetzen construiren. Wir können uns jedoch auch hier — durch Betrachtungen, die denen analog sind, durch welche wir die Berechtigung der STURM'schen zum Hauptstrahl senkrechten Brennlinien erwiesen — überzeugen, dass eine durch einen mittleren Punkt dieser Linie gehende, in der Einfallsebene liegende, und zu l' senkrechte gerade Linie von jener anderen überall nur um Grössen zweiter Ordnung entfernt ist oder, was dasselbe, dass die Querschnitte der nach der wahren Bildlinie zielenden Büschel mit einer zur Einfallebene und zu l' senkrechten, durch den auf l' gelegenen Bildpunkt gehenden Ebene — die Zerstreuungskreise jener Büschel in dieser Ebene — unendlich kleine Dimensionen haben gegenüber ihrer Entfernung von der Axe. Folglich kann man mit genügender Annäherung ihre Mittelpunkte als die Bildpunkte ansehen.

Als weitere und vollständig ausreichende Bestimmungsstücke der beiden Abbildungen, welche so um dieselben beiden Axen orientirt sind, haben wir die Oerter der Brennpunkte und die Werthe der Brennweiten aufzusuchen. Die ersteren haben wir bereits früher gefunden (Gleichung 5).

Die Brennweiten, welche bei Brechung paraxialer Büschel an einer einzigen Fläche der Grösse nach übereinstimmen mit diesen Brennpunktsabständen sind hier, wie schon oben bemerkt, nicht ohne weiteres diesen gleich



(Fig. 25.)

zu setzen[1]). Nehmen wir als Definition der Brennweiten die, dass sie gleich seien der Höhe h eines parallel zu der Axe des einen Raums einfallenden Strahls dividirt durch die trigonometrischen Tangente des Winkels u', unter welchem dieser Strahl nach der Brechung die Axe des anderen Raums schneidet, so sieht man, dass für Büschel der ersten Art (Fig. 25)

$$h = PQ \cdot \cos i; \qquad \operatorname{tg} u' = -PQ \cdot \frac{\cos i'}{PF_t'},$$

ebenso

$$h' = PQ \cdot \cos i'; \qquad \operatorname{tg} u = -PQ \cdot \frac{\cos i}{PF_t},$$

daher

$$f_t = \frac{h'}{\operatorname{tg} u} = + \frac{n \cdot \cos i \cdot \cos i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}$$

$$f_t' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = - \frac{n' \cos i \cdot \cos i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i},$$

also beiläufig

$$\frac{f_t}{f_t'} = -\frac{n}{n'},$$

wie bei paraxialer Abbildung.

---

[1]) Dieser Umstand ist von Manchen, wie z. B. auch von REUSCH, nicht beachtet worden.

Für Büschel der zweiten Art wird, ganz wie bei paraxialen

$$f_s = -PF_s = \frac{n \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}$$

$$f_s' = -PF_s' = -\frac{n \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i},$$

also auch hier

$$\frac{f_s}{f_s'} = -\frac{n}{n'}.$$

Mit diesen speciellen Werthen der Constanten sind auf die eine wie die andere Abbildung alle Gesetze zur Anwendung zu bringen, welche wir für collineare Abbildungen als allgemeingiltig erwiesen hatten; im Besonderen finden also auch dieselben Beziehungen zwischen den Grössen α, β und γ einerseits und $f : f'$ andrerseits hier statt wie dort.

Collineare Abbildung bei schiefer Brechung an beliebig vielen centrirten brechenden Flächen.

In diesem Falle bleibt jede Abbildungsart für sich bestehn, wofern — wie wir schon früher annahmen — die betreffenden Flächen sämmtlich centrirt sind und die Axe der ersten Abbildung in einer Ebene liegt mit der gemeinsamen Centralen der Kugeln. Denn alsdann bleiben Büschel, die bei der ersten Brechung meridional oder sagittal waren, von gleichem Charakter bei allen folgenden Brechungen. Man hat es daher mit successiven Abbildungen gleicher Art zu thun. Der Bildraum und die Bildaxe der $k$ten Abbildung wird Objektraum bezw. dessen Axe für die $(k+1)$ te Abbildung. Die Lage der Brennpunkte bestimmt sich für jede Fläche nach den obigen Formeln. Wenn also noch die Lage der Flächen selbst, etwa durch ihre Scheitel- oder Mittelpunktsabstände, gegeben ist, so erhält man ohne Schwierigkeit alle Elemente, die für die Zusammensetzung von Abbildungen nach den früher (pag. 50 ff.) aufgestellten Regeln erforderlich sind. Wir haben diese Regeln bereits unter Voraussetzung des hier vorliegenden allgemeineren Falls abgeleitet: dass die Axen der Objekt- und Bildräume der einzelnen Abbildungen beliebig gegen einander orientirt sind und nur die Bildaxe der $k$ten Abbildung coincidirt mit der Objektaxe der $(k+1)$ten.

Literatur.

Das Vorhandensein zweier verschiedener Brennpunkte bei den unter endlichem Winkel gebrochenen Büscheln soll zuerst D'ALEMBERT bemerkt haben (Opusc. math. Vol. III. 1764). In Anknüpfung an die speciellen Probleme der Brechung und Spiegelung an Kugelflächen wurde die Natur des einem homocentrisch einfallenden entsprechenden Büschels später von G. B. AIRY näher untersucht (Camb. Phil. Trans. Vol. III. 1827); die von ihm erhaltenen Ergebnisse blieben dann ein fester Bestandtheil der englischen Lehrbücher, zuerst desjenigen von CODDINGTON (3. Aufl. 1829), später der von POTTER (1847), PARKINSON (1859), GRIFFIN (1872) u. A.

In Deutschland lenkte unter dem gleichen Gesichtspunkte E. REUSCH — anscheinend unbekannt mit den Arbeiten seiner Vorgänger — die Aufmerksamkeit auf die Eigenschaften der durch schiefe Brechung an Kugelflächen astigmatisch gewordenen Büschel l. supra cit. (1857).

Inzwischen hatten SCHULTÈN (Mém. des sav. étrang. T. IV, pag. 203. 1836) und namentlich STURM (s. die Citate pag. 21) mit Nachdruck darauf hingewiesen, dass die Constitution eines Büschels nach beliebigen optischen Aenderungen nur eine Folge des MALUS-DUPIN'schen Satzes sei, ein System von Orthogonalflächen zu besitzen.

Auf noch allgemeinere Voraussetzungen waren die Untersuchungen von HAMILTON, KUMMER und deren Schülern gegründet, die wir früher angegeben haben.

Auf die Arbeiten von STURM, KUMMER etc. stützen sich die von

H. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 238. 1856 (rein analytisch mit Anwendung auf Prismen).

G. QUINCKE, Monatsber. Berl. Akad., pag. 498. 1862; auch POGG. Ann. 117, pag. 563 (experimentelle Verifikation der Sätze von KUMMER an einer einfachen Linse) und

G. KRECH, De luminis fascibus infinite tenuibus disquis. Dissert. Berlin 1863 (theoretische und experimentelle Unters. über die Orte der Brennlinien einer planconvexen Linse).

L. HERMANN, Gratulationsschrift, Zürich 1874. Fortsetzg. in Arch. f. d. ges. Physiologie 20, pag. 370. 1879, untersucht die Möglichkeit, den Astigmat. durch Combination mehrerer Linsen zu vermindern mit besonderer Berücksichtigung der bei den Augen der Säugethiere und Fische vorliegenden Verhältnisse. Der gleichen Anregung entsprangen noch zahlreiche andere Arbeiten, über welche seit 1879 MATTHIESSEN in den Jahresberichten über die Fortschr. d. Opthalmologie von MICHEL (Tübingen) referirt hat.

Durch die Form der Behandlung zeichnen sich aus

CL. MAXWELL, Lond. Math. Soc. 4 (1871—3); 6 (1874—5), ebenso wie

F. LIPPICH, l. supra cit. (1877), und Wiener Sitzber. 1879, pag. 1 (Gang der Lichtstrahlen in einer homog. Kugel m. Rücksicht auf die Entstehung des Regenbogens).

RAYLEIGH, Phil. Mag. 8, pag. 481. 1879; 9, pag. 40. 1880. (Combination gegen einander geneigter Linsen).

C. NEUMANN, Sitzber. Leipz. Akad. 1880, pag. 42. (Brechg. an einer belieb. krummen Fläche), und der vorerwähnte

L. MATTHIESSEN, Sitzber. d. bayer. Akad. d. Wiss. f. 1883, pag. 35. Acta math. 4, pag. 177. 1884. SCHLÖMILCH's Ztschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888. BERLIN-EVERSBUSCH, Ztschr. f. vergl. Augenheilk. 6, pag. 103. 1889 u. a. a. O. (über die Unrichtigkeit des STURM'schen Theorems und die richtige Lagen-Bestimmung der Bildlinien). Von den speciellen Schülern dieses behandelte u. A.

L. GARTENSCHLÄGER, EXNER's Rep. 24, pag. 537. 1888, die Abbildung eines »astigmatischen« Objekts durch eine Linse für parallelen Durchgang der Strahlen durch diese).

A. GLEICHEN, WIED. Ann. 35, pag. 100. 1889, und »Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichts dargestellt nach neuen (von SCHELLBACH herrührenden) Methoden.« Leipzig 1889, unterscheidet treffend zwischen den rein geometrischen und den speciell optischen Voraussetzungen und Folgerungen.

Dass bei der schiefen Brechung die jeweilig zu den Hauptschnitten parallelen ebenen Partialbüschel eine collineare Abbildung bewirken, scheint ausser ABBE (Univ.-Vorlesgn.) nur LIPPICH bemerkt zu haben, welcher auch betont, dass alle wesentlichen Gesetze dieser Abbildung blosse Folgen des Bestehens jener Collinearität sind

---

IV. Die künstliche Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

(Theorie der sphärischen Aberrationen.)

Im Vorangehenden ist gezeigt, dass und in wie weit durch Brechung dünner Büschel an Kugelflächen eine Abbildung zu Stande kommt. Unter den gemachten Annahmen zeigte sich diese Abbildung als eine relativ sehr beschränkte: bei centraler Brechung war es nur ein fadenförmiger, die Axe des Systems umgebender Raum, in welchem allein eine »Abbildung« in unserem Sinne stattfand, und dieselbe kam nur zu Stande durch Büschel von unendlich kleiner Winkelöffnung. Die Strahlenvereinigung war dann von der zweiten Ordnung.

Bei schiefer Brechung war das Bereich der Abbildung noch mehr eingeengt; man konnte von einer solchen nur reden, wenn man jeweilig gewisse ebene (zweidimensionale) Büschel in Betracht zog. Die Strahlenvereinigung war für die eine Art von Büscheln sogar nur von der ersten Ordnung; um eine gleiche Genauigkeit der Strahlenvereinigung zu haben wie im anderen Fall, müsste die

Oeffnung dieser Büschel also entsprechend noch mehr eingeengt werden. Das räumliche Büschel gab bei schiefem Einfall eine Abbildung, d. h. ein punktweises Entsprechen zweier Raumgebiete eigentlich überhaupt nicht mehr. Diese, gewissermaassen eo ipso stattfindende Abbildung wäre nun für alle praktischen Zwecke gänzlich unzureichend. Die Bilder, welche sie ergiebt, sind ja einerseits unendlich klein bezw. es wird von einem gegebenen Objekt nur ein der Theorie nach unendlich kleiner Theil deutlich abgebildet. Andererseits können wir — unter Vorausnahme dieser später näher zu definirenden und zu erörternden Begriffe — auch schon jetzt schlechthin feststellen, dass die von »unendlich dünnen« Büscheln entworfenen Bilder unendlich lichtschwach wären und dass die »Bildpunkte« so enger Büschel, gemäss der Wellentheorie, als die Beugungswirkung entsprechend eng begrenzter Wellenflächen aufgefasst, statt Punkte vielmehr unendlich grosse Scheiben wären. Die von benachbarten Punkten des Objekts herrührenden Bildscheiben würden sich überdecken, statt eines scharfen Bildes, statt eines punktweisen Entsprechens würde also eine völlige Confusion entstehen, in welcher keinerlei Detail mehr erkennbar wäre.

Wenn wir andererseits die Oeffnung der abbildenden Strahlenbüschel ohne weiteres steigerten, so würde, wie wir früher bereits flüchtig angedeutet haben, die Strahlenvereinigung im geometrischen Sinne mehr und mehr unvollkommen und aus diesem Grunde die Abbildung aufgehoben.

Aus diesem Dilemma zwischen anscheinend einander widersprechenden Anforderungen helfen wir uns auf drei, zum Theil zusammengehenden, Wegen. Der eine beruht auf der Unempfindlichkeit, d. h. beschränkten Sehschärfe unserer Augen, der zweite darauf, dass nach den Normen der physischen Optik die Grenzen der Beschränktheit für die eo ipso statthabende Abbildung füglich um ein beträchtliches Stück hinausgeschoben werden dürfen, der dritte und wichtigste endlich in der Möglichkeit, durch geeignete Combination optischer Systeme solche zu erhalten, an denen die früher constatirten Beschränkungen der Abbildung zum Theil — und unter Umständen bis zu einem sehr erheblichen Grade — beseitigt sind.

ad 1) Alle Bilder sind in letzter Linie dazu bestimmt, dem Auge dargeboten zu werden. Dieses — selbst ein optischer Apparat, dessen nähere Einrichtung wir an späterer Stelle beschreiben werden — ist vermöge dieser seiner physikalischen und ebenso vermöge seiner anatomischen und physiologischen Natur auch seinerseits in seinen Leistungen mannigfach beschränkt. Unter anderem ist — unabhängig von aller weiteren Kenntniss seines Baues und seiner Funktionen — leicht die Thatsache festzustellen, dass das Unterscheidungsvermögen des Auges gewisse, wenn auch individuell etwas schwankende, Grenzen nicht übersteigt. Objekte — seien es selbst- oder mittelbarleuchtende, seien es ihrerseits optische Bilder, — welche dem Auge unter einem Sehwinkel dargeboten werden, der eine gewisse untere Grenze nicht erreicht, vermag es weder ihrer Form noch der Grösse nach von einander, also auch nicht von idealen »Punkten» zu unterscheiden[1]).

Die genannte Grenze mag ausser von dem Individuum noch von verschiedenen anderen Umständen (Helligkeit, Farbe des Objekts u. dergl.) abhängen — dies ist für uns hier ohne Belang — genug, es existirt eine solche. Ihr Vorhandensein aber entbindet uns von der Verpflichtung, behufs optischer Abbildung ideale Punkte herbeizuführen; wir können uns damit be-

---

[1]) S. die Lehrbücher der physiologischen Optik, z. B. das von HELMHOLTZ, 2. Aufl., § 18.

gnügen, das Bild aus Flecken bestehen zu lassen, deren Grösse nur unterhalb jener — wie gesagt von mehreren Umständen abhängigen — Grenze liegt.

Diese Erleichterung werden wir verschieden auslegen, je nachdem wir uns auf den Standpunkt der physischen oder der rein geometrischen Optik stellen. Gemäss letzterem würde hiernach eine Abbildung auch dann noch praktisch genügend sein, wenn die Strahlen nicht genau homocentrisch vereinigt werden, sondern statt eines Kegels ein Conoid bilden, dessen engste Einschnürung ein gewisses Maass nicht überschreitet. Statt des Bildpunktes würde dann der Querschnitt jener engsten Einschnürung, der »Kreis der kleinsten Verundeutlichung« functioniren. Demgemäss würde es erlaubt sein, bei jeder durch Brechung an sphärischen Flächen vermittelten Abbildung die Oeffnungen der wirksamen Büschel bis zu einer gewissen — von den Umständen des einzelnen Falls abhängigen — Grösse ohne weiteres zu vermehren.

Gemäss der Undulationstheorie würden diesem Schlusse Bedenken entgegenstehen. Denn bei ihm ist stillschweigend angenommen, dass auch in dem endlichen Querschnitt nicht homocentrischer Strahlen eine Lichtwirkung entstehe, ganz ebenso als wenn jeder Strahl schlechthin Träger von Licht sei. Diese Annahme, welche gewissen Untersuchungen in ungerechtfertigter Ausdehnung zu Grunde gelegt ist, können wir aber durchaus nicht ohne weiteres anerkennen. Es bedarf besonderer, auf dem Boden der Diffraktionstheorie angestellter Untersuchung darüber, welcher Art die Lichtwirkung nicht homocentrischer Strahlen, d. h. nicht sphärischer Wellen auf irgend eine Einstellungsebene ist. Wir verdanken solche Untersuchungen AIRY[1]) und mit besonderer Berücksichtigung der uns hier interessirenden Frage Lord RAYLEIGH[2]). Dieselben sind noch lange nicht so weit geführt, als für die Beantwortung dieser Frage nöthig wäre, indem sie sich auf die Bestimmung der Helligkeit des axialen Bildpunktes beschränken, die hier in erster Linie stehende Frage nach der Helligkeitsvertheilung ausserhalb der Axe aber noch ganz offen lassen. Sie führen uns jedoch mit einer wenig geänderten Auslegung ihrer Resultate auf dem zweiten der eingangs angeführten Wege zu einer zulässigen Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

ad 2) Statt nämlich nach der Helligkeit zu fragen, die eine Wellenfläche von gegebener Abweichung gegen die Kugelgestalt im Krümmungscentrum von deren Scheitel ergiebt, können wir umgekehrt nach der Deformation der austretenden Wellenfläche fragen, welche zulässig ist, wenn jene Helligkeit einen gewissen Bruchtheil der normalen nicht unterschreiten soll. In dieser Form hat in der That RAYLEIGH diese Frage behandelt. Er findet, dass die Deformation der Wellenfläche gegen die sphärische nicht mehr betragen darf, als $\frac{1}{4}\lambda$ Abstand am Rande bei Coincidenz der Scheitel, wenn die Helligkeit nicht geringer als ca. 0·8 der normalen sein soll.

Ist nun ein optisches System vollständig gegeben, so lässt sich, z. B. durch trigonometrische Verfolgung mehrerer vom Objektpunkt aus divergirender Strahlen durch dasselbe (gemäss den Formeln pag. 55—56), deren Wellenfläche als Normale zu diesen Strahlen construiren und obige Regel von RAYLEIGH führt dann zu einer Bestimmung über die Oeffnung, welche man dem System d. h. den es durchsetzenden Strahlenbüscheln geben darf, ohne eine merkliche Verschlechterung des Bildes gewärtigen zu müssen.

Die Frage nach der seitlichen Ausbreitung des Lichts bleibt hierbei, wie

---

[1]) Cambridge Phil. Trans., vol. VI. 1838.

[2]) Phil. Mag. 9, pag. 410. 1879.

bemerkt, ausser Acht, ebenso wie die nach dem wahren, d. h. günstigsten Einstellungsort auf der Axe offen bleibt. Immerhin giebt obige Regel doch einen ziemlich guten Anhalt für die Beurtheilung der Verhältnisse im Grossen und Ganzen. RAYLEIGH berechnet, dass $df = \frac{\lambda}{\alpha^2}$, wenn df die Längsaberration, α die vom Bildpunkt aus gemessene halbe angulare Oeffnung des Systems und λ die Wellenlänge des wirksamen Lichts ist und findet in Uebereinstimmung damit, dass eine einfache planconvexe Linse von ca. 1 *m* Brennweite gegenüber parallel auf die convexe Seite fallendem Lichte noch merklich gute Bilder giebt, wenn das Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite bei ihr nicht grösser als 1 : 18 ist; ein sphärischer Spiegel sogar, wenn dasselbe Verhältniss nicht grösser als 1 : 14.

In der That kann man ja für manche Zwecke ohne erheblichen Nachtheil optische Instrumente benützen, die ohne besondere Wahl aus »einfachen« Linsen und Spiegeln zusammengesetzt sind, ohne deren Oeffnungen übermässig einengen zu müssen. Und man hat sich ihrer Jahrhunderte lang bedient, ehe man die künstlichen Mittel zur Vervollkommnung derselben erfunden hatte.

ad 3) Diese Vervollkommnung zu erreichen ermöglicht uns nun der dritte und letzte der oben erwähnten Auswege: Wir können optische Systeme so combiniren, dass, wiewohl jedes einzelne — im geometrisch-optischen Sinne — nur die gewöhnliche ganz beschränkte Abbildung ergiebt, bei dem resultirenden System jene Grenzen dennoch nach der einen oder der anderen Richtung hin, oder auch nach mehreren zugleich erheblich erweitert sind; sodass also ein System entsteht, welches homocentrische Abbildung entweder durch mehr oder minder weit geöffnete Strahlenbüschel oder die eines grösseren Objektes durch relativ enge Büschel vermittelt.

Es mag aber gleich hier bemerkt werden, dass wir auch bei den nach dieser Richtung hinzielenden Bestrebungen auf Grenzen stossen, die unüberschreitbar sind. Je weiter wir versuchen, in der einen Richtung die Beschränkungen der Abbildung zurückzuschieben, um so enger sind sie dann stets in anderen Richtungen. Je weiter die Oeffnung der abbildenden Büschel sein soll, desto enger wird, nach der Seite und in der Tiefe, das Gebiet des gleich vollkommen abbildbaren Raumes, desto mehr ist die Abbildung beschränkt auf singuläre Stellen des Raumes und umgekehrt Die Bemühungen der Theorie und Praxis können dahin gehen, sich diesen durch die Natur der Brechung und der Kugelflächen gesetzten Grenzen möglichst zu nähern, aber es ist — das kann mit Sicherheit ausgesprochen werden — auch theoretisch unmöglich, mit den Mitteln der Dioptrik Abbildungen herzustellen, welche von jener idealen Vollkommenheit sind, die wir in unseren Berachtungen über die allgemeine collineare Abbildung voraussetzten — Abbildungen eines beliebig grossen Raumes durch beliebig weite Büschel. Es sei denn, dass wir, auf jeden eigentlichen optischen Effekt verzichtend, uns mit einer blossen Umlagerung des Bildraumes gegen den Objektraum begnügen, ohne jede weitere Veränderung desselben. Diesen letzteren Effekt liefert uns, wie wir früher sahen, die Spiegelung an Ebenen, ohne Einschränkungen irgend welcher Art.

Die Erweiterung der Abbildung kann, wie schon bemerkt, nach zwei Richtungen hin geschehen: erstens dahin, dass die Oeffnung der abbildenden Büschel eine möglichst weite wird; zweitens dahin, dass möglichst grosse Objekte abgebildet werden. Die erstere Aufgabe kommt ersichtlich darauf hinaus, die von ein- und demselben Punkte ausgehenden, innerhalb eines endlichen Raumwinkels liegenden centralen und schiefen Elementarbüschel durch

geeignet angeordnete Spiegelungen oder Brechungen so zu modificiren, dass sie sämmtlich zuletzt wieder nach demselben (Bild-) Punkte convergiren. Bei der letzteren wird es sich zunächst nur darum handeln, in den einzelnen relativ engen Büscheln, die von verschiedenen Punkten eines Objekts ausgehen, wenigstens den Astigmatismus aufzuheben, um überhaupt eine eindeutige scharfe Abbildung mittels räumlicher Büschel zu erhalten. Diesen Anforderungen werden wir jedoch alsbald noch weitere nothwendig zu erfüllende beigesellen müssen.

Wir wenden uns der näheren Betrachtung dieser beiden Aufgaben zu. Um ihre Lösbarkeit zu übersehen müssen wir, namentlich den erstgenannten Punkt noch genauer studiren, als wir es bei der früheren Gelegenheit gethan haben; nämlich die im Allgemeinen mangelnde Homocentricität der von einem axialen Punkte innerhalb eines endlichen Winkelraums ausgegangenen Strahlen nach der Spiegelung oder Brechung an centrirten Kugelflächen, den sogen. »Kugelgestaltfehler« oder die

Sphärische Aberration für Axenpunkte.

Wir haben früher gesehen, wie der Weg eines Strahls analytisch bei der Brechung an einer Kugelfläche zu bestimmen ist. Wir fanden (pag. 56) zwischen den Abständen s, s' des Objekt- und Bildpunkts vom Scheitel S der brechenden Fläche und denen vom Einfallspunkt P, p und p' die Beziehung

$$n' \frac{s' - r}{p'} = n \frac{s - r}{p}, \tag{1}$$

welche nichts anderes war als eine Transformation der optischen Invariante

$$Q = n \cdot \sin i = n' \sin i'.$$

Hierin ist

$$p^2 = (s - r)^2 + r^2 + 2r(s - r) \cos \varphi,$$

ebenso

$$p'^2 = (s' - r)^2 + r^2 + 2r(s' - r) \cos \varphi,$$

wenn φ der (halbe) Oeffnungswinkel der brechenden Fläche, d. h. ihr Centriwinkel ist. Tragen wir diese Werthe oben ein, so wird

$$\frac{n'(s' - r)}{\sqrt{(s' - r)^2 + r^2 + 2r(s' - r)\cos\varphi}} = \frac{n(s - r)}{\sqrt{(s - r)^2 + r^2 + 2r(s - r)\cos\varphi}}. \tag{2}$$

Entwickeln wir hier die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatz und den $\cos\varphi$ in die äquivalente Potenzreihe, so erhalten wir schliesslich nach geeigneten Reductionen s', die Schnittweite des gebrochenen Strahls auf der Axe ausgedrückt durch eine nach den Potenzen von φ fortschreitende Reihe; und da gleichen aber entgegengesetzten Werthen von φ offenbar gleiche Werthe von s' entsprechen, so enthält diese Reihe nur die geraden Potenzen von φ. Sie ist also von der Form

$$s' = s_0' + A\varphi^2 + B\varphi^4 + C\varphi^6 + \ldots \tag{3}$$

Hätten wir in der ursprünglichen Gleichung φ durch u ersetzt oder durch irgend eine andere den Einfallspunkt des auffallenden Strahls bestimmende Grösse, so hätten wir analoge Entwicklungen nach diesen Grössen erhalten, etwa nach u' die Reihe

$$s' = s_0' + \mathfrak{a}'u'^2 + \mathfrak{b}'u'^4 + \mathfrak{c}'u'^6 + \ldots \tag{4}$$

oder dergl.

Die Coëfficienten dieser Reihen sind nach obiger Anweisung zu entwickeln. Diese Arbeit ist eine ziemlich umständliche, aber wiederholt ausgeführt. Wir wollen hier nur die Coëfficenten der zweiten Potenzen herleiten, welche noch durch relativ sehr einfache Ausdrücke dargestellt sind und daher eine gewisse Uebersicht der von ihnen abhängigen Momente gestatten. Bei Systemen von

relativ geringer Oeffnung, wie den Fernrohren ist das deren Quadrat proportionale Glied natürlich auch das numerisch bedeutendste, daher an sich von besonderem Interesse. Bei Systemen von sehr grosser Oeffnung, wie den Mikroskopobjektiven, gewährt die Betrachtung dieses zweiten Gliedes der Reihe allerdings geradezu gar keinen Anhalt zu irgend welchen Schlüssen. In diesem Falle, in welchem z. B. u oft nahe $= 90°$ ist, gewährt aber die Reihenentwicklung überhaupt keinen Nutzen, während für die Theorie anderer Instrumente allerdings das dritte und auch das vierte Glied der Reihe fast stets noch mit herangezogen werden muss. Betreffs der Entwicklung dieser letzteren verweisen wir auf die vorhandene Literatur[1]).

Das erste Glied der sphärischen Aberration auf der Axe.

Methode. Gehen wir nochmals auf den veränderten Ausdruck für die optische Invariante Q bei einer Brechung unter beliebigem endlichem Winkel zurück, den wir noch beiderseits durch r dividiren, also

$$Q = \frac{n(s-r)}{p \cdot r} = \frac{n'(s'-r)}{p'r}. \tag{1}$$

Diese Invariante muss sich auch ihrerseits als eine Potenzreihe darstellen lassen, mit irgend einer, die Einfallshöhe des Strahls bestimmenden Grösse, z. B. dem Oeffnungswinkel φ der brechenden Kugel, als Variablen. Das constante Glied dieser Reihe muss in jedem Falle $= Q_0$ sein, d. i. gleich der Invariante für paraxiale Strahlen. Die Coëfficienten der Potenzreihe selbst werden das eine Mal die Elemente des einfallenden, das andere Mal die des gebrochenen Strahls enthalten und zwar in genau gleichartiger Weise.

Wir können also ein Mal

$$Q = Q_0 + q\,\varphi^2 + \ldots,$$

das andere Mal

$$Q = Q_0 + q' \cdot \varphi^2 + \ldots$$

setzen.

Da wir uns hier auf die quadratischen Glieder beschränken wollen, so brechen wir die Entwicklung bei diesen ab. Alsdann folgt aber aus der Identität der linken Seiten beider Gleichungen, dass auch $q = q'$ sein muss.

Auf diesem Wege, welcher auch für die Berechnung aller anderen »Aberrationen« sehr vortheilhaft ist, gelangen wir in relativ einfacher Weise zu Invarianten für die höheren Glieder der Reihenentwicklung.

Entwicklung. Wir schreiben (1) in der Form

$$Q = n\,\frac{s}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\,\frac{s'}{p'}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right), \tag{1a}$$

und entwickeln p gemäss dem oben angegebenen Ausdruck nach φ. Vernachlässigen wir hierbei alle Grössen, welche mit höheren Potenzen von φ als der zweiten multiplicirt auftreten, so erhalten wir

$$p = s\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{n\,s_0}\,Q_0\,\varphi^2\right),$$

worin s_0 der Grenzwerth von s für paraxiale Strahlen ist, welcher der für diese geltenden Gleichung

$$Q_0 = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right), \tag{1*}$$

genügt.

[1]) Folgt am Schlusse dieses Abschnitts.

Hiernach ist die gesuchte Grösse

$$\frac{s}{p} = 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{n s_0} Q_0 \cdot \varphi^2.$$

Ganz analog muss

$$\frac{s'}{p'} = 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{n' s_0'} Q_0 \cdot \varphi^2$$

sein.

Es sind nun noch s und s' selber in eine Reihe nach φ zu entwickeln. Denken wir uns zu dem Zwecke diese Grössen erst nach u bezw. u' entwickelt, also

$$s = s_0 + \mathfrak{a} \cdot u^2 + \ldots .$$
$$s' = s_0' + \mathfrak{a}' u'^2 + \ldots ,$$

worin u selbst mit r, p und φ durch die Gleichung

$$\sin u = \left(\frac{r}{p}\right) \cdot \sin \varphi$$

zusammenhängt, so ergiebt letztere, unter Vernachlässigung von dritten Potenzen der Variablen

$$u = \left(\frac{r}{p}\right) \varphi$$

und, unter Vernachlässigung von Gliedern, die mit der vierten und höheren Potenzen von φ multiplicirt sind, folgt hieraus

$$u^2 = \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \cdot \varphi^2,$$

also

$$s = s_0 + \mathfrak{a} \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \varphi^2 = s_0 \left(1 + \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^3} \cdot \varphi^2\right),$$

endlich

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^4} \varphi^2;$$

und ganz ebenso

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s_0'} - \mathfrak{a}' \frac{r^2}{s_0'^4} \cdot \varphi^2.$$

Demnach erhalten wir Q nach einigen Reductionen in den beiden Formen,

$$Q = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{n} \cdot \frac{r^2}{s_0} + n \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^4}\right] \varphi^2$$

und

$$Q = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{n'} \frac{r^2}{s_0'} + n' \mathfrak{a}' \frac{r^2}{s_0'^4}\right] \varphi^2,$$

woraus wir gemäss der eingangs angestellten Ueberlegung folgern

$$\frac{2 n \mathfrak{a}}{s_0^4} + \frac{Q_0^2}{n s_0} = \frac{2 n' \mathfrak{a}'}{(s_0')^4} + \frac{Q_0^2}{n' s_0'},$$

oder in unserer früher benützten Schreibweise

$$\Delta\left(\frac{2 n \mathfrak{a}}{s_0^4}\right) = - Q_0^2 \Delta\left(\frac{1}{n s_0}\right). \tag{5}$$

Bei dieser Entwicklung ist ausdrücklich angenommen, dass auch das einfallende Büschel bereits mit sphärischer Aberration behaftet sei; andernfalls wäre $\mathfrak{a} = 0$ und obige Gleichung ergäbe ohne Weiteres den Werth von $\mathfrak{a}'$. In ihrer jetzigen Form könnte sie nur auf indirektem Wege dazu dienen, aus den gegebenen Elementen des einfallenden Strahls — zu welchen auch $\mathfrak{a}$ gehört — die des austretenden, also $\mathfrak{a}'$, zu berechnen.

Die Werthe und Vorzeichen von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{a}'$ sind, wie aus ihren Einführungsgleichungen hervorgeht, ganz besonders charakteristisch für Art und Grösse der

sphärischen Aberration. Es ist $\mathfrak{a} = \frac{s - s_0}{u^2}$ und ebenso $\mathfrak{a}' = \frac{s' - s_0'}{u'^2}$. Bei gleichem Oeffnungswinkel u des Büschels ist also $\mathfrak{a}$ ein unmittelbarer Ausdruck für die Differenz der Schnittweiten vom Rand- und Axenstrahl des Büschels, die sogen. Längs- oder Longitudinalaberration.

Bei einer einzelnen collektiv wirkenden Fläche und ebenso bei relativ dünnen Collektivlinsen ist, für parallel einfallendes Licht wenigstens stets, $s' < s_0'$. Man spricht dann von sphärischer »Untercorrektion«. Umgekehrt bei einer dispansiven Fläche oder dünnen Dispansivlinse.

Das einfallende Büschel mag homocentrisch sein oder in irgend welchem Grade selbst unter- bezw. übercorrigirt, durch eine einmalige collektive Brechung wird es — bei parallelem Einfall wenigstens stets — nach der Richtung der Untercorrection, durch eine einmalige dispansive Brechung nach der Richtung der Uebercorrection verändert.

Das Vorzeichen von $\mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{a}'$ lässt nun unmittelbar erkennen, ob das betreffende Büschel unter- oder übercorrigirt ist. Denn mag der Vereinigungpunkt des Büschels reell oder virtuell sein, ein negativer Werth von $\mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{a}'$ bedeutet Unter-, ein positiver Werth Uebercorrection.

Denkt man sich die Gesammtheit der Strahlen des betr. Büschels gezeichnet, etwa wie in Fig. 6, pag. 19, so erhält man als Einhüllende sämmtlicher Strahlen ein Stück von deren Brennfläche. Diese Brennfläche bildet nun, wie man sich leicht überzeugt, bei negativem Werthe von $\mathfrak{a}$ (sphärischer Untercorrection) einen nach dem einfallenden Lichte hin offenen Kelch $>$, bei positivem $\mathfrak{a}$ (Uebercorrection) einen umgekehrt gelegenen $<$.

Seitliche Aberration. Zerstreuungskreis. Bei einem nicht homocentrischen Büschel ist es innerhalb ziemlich weiter Grenzen a priori ganz ungewiss, an welche Stelle der Axe das eigentliche Bild zu verlegen sei, d. h. welche Stelle der Axe bei der Beobachtung faktisch als Bildort aufgefasst werde. Hierüber sind wohl mehrfache Hypothesen aufgestellt und mit mehr oder minder ansprechenden Wahrscheinlichkeitsgründen gestützt worden[1]), aber weder ist eine genügend exakte experimentelle Prüfung derselben erfolgt, noch sonst eine Einigkeit in diesem Punkte herbeigeführt worden.

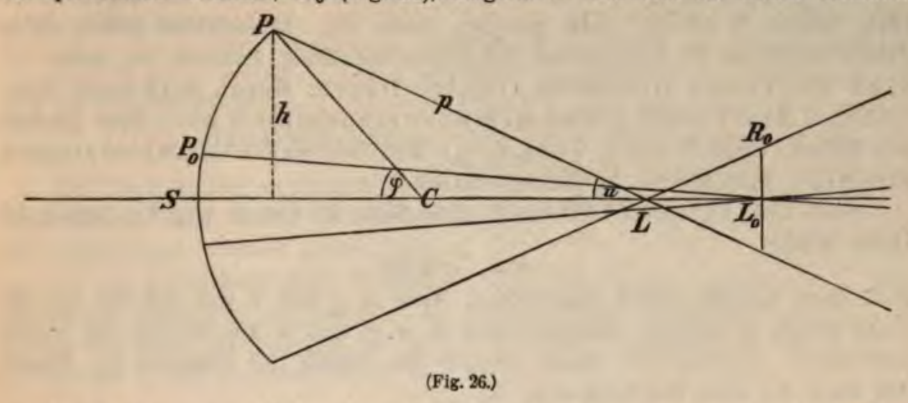
Wie ich schon früher hervorhob ist nach meiner Meinung die theoretische Lösung auch dieser Frage überhaupt nicht auf dem Boden der geometrischen, sondern dem der physischen Optik anzustreben, was bisher meines Wissens nirgends geschehen ist. Mir scheint gerade als sicher, dass nicht schlechthin die engste Einschnürung des austretenden Lichtbüschels als Bild aufgefasst wird, sondern dass es — wie wohl zuerst GAUSS hervorgehoben hat (s. weiter unten »Aberration höherer Ordnung«) — auf die Vertheilung der Intensität innerhalb des Lichtsflecks ankommt, welcher hier an Stelle eines Bildpunktes auf tritt. Man nennt diesen Lichtfleck bekanntlich »Zerstreuungskreis«. Ohne weiteres zuzugeben ist nur, dass *caeteris paribus* die Grösse desselben das in letzter Linie entscheidende Maass für die in einem Büschel vorhandene sphärische Aberration bildet. Denn je grösser diese Lichtflecke sind, desto grösser ist, wenn ich so sagen darf, das Mosaik, als welches jedes Bild annähernd aufgefasst werden kann, d. h. desto weniger Detail ist im Bilde wiedergegeben. Auf

---

[1]) S. die in der Literaturübersicht angeführten Werke. Die meisten Autoren verlegen die Bildebene in die engste Einschnürung des Strahlenconoids. Vergl. auch CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 203. 1888.

die Wiedergabe des im Objekte vorhandenen Detail sind aber ganz vornehmlich die optischen Construktionen gerichtet.

Indem wir nun darauf verzichten, die wahre Grösse des Zerstreuungskreises bei gegebenem Gange der sphärischen Aberration eines Büschels zu bestimmen, begnügen wir uns vielmehr damit, ein Maass für dessen relative Grösse zu statuiren, indem wir die Fiction machen, das Bild werde im Vereinigungspunkte der paraxialen Strahlen, L_0 (Fig. 26), aufgefasst. Der sich bei dieser Annahme



(Fig. 26.)

ergebende Zerstreuungskreis, der Schnitt der in L_0 zur Axe senkrechten Ebene mit den äussersten Randstrahlen (dessen Halbmesser in der Figur $= R_0 L_0$ ist) übertrifft sicher den faktisch wahrnehmbaren, vielleicht um das doppelte oder vierfache[1]). Immerhin bietet er — oder auch ein gewisser festgesetzter Bruchtheil desselben — ein durchweg vergleichbares Maass für die Grösse der Aberration und gerade zu seiner Berechnung ist unsere Formel besonders geeignet.

Wir haben nämlich für den Durchmesser z des Zerstreuungskreises in einem Büschel von der Winkelöffnung $2u$

$$\tfrac{1}{2}z = (s_0 - s)\,u = -\,\alpha u^3,$$

also

$$\frac{2n\alpha}{s^4} = -\,\frac{nz}{u^3 s^4} = -\,\frac{nu\cdot z}{u^4 s^4} = -\,\frac{(nu)\cdot z}{h^4};$$

demnach wird unsere Aberrationsgleichung

$$\Delta\,(nu\cdot z) = h^4\,Q_0^2\,\Delta\left(\frac{1}{n s_0}\right). \qquad (6)$$

(Den Index 0, welcher darauf hinweisen sollte, dass sich die betreffenden Grössen für paraxiale Strahlen verstünden, können wir fortan wohl wieder weglassen ohne ein Missverständniss befürchten zu müssen.)

Das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des halben Oeffnungswinkels eines Büschels (welcher letztere für kleine Winkel mit dem Winkel selbst identisch ist) hat Abbe die numerische Apertur des Büschels genannt. Dasselbe ist eine der wichtigsten Grössen in der Theorie der optischen Instrumente. Bezeichnen wir es mit a, so haben wir in obiger Gleichung ein Mittel zur Berechnung der Veränderung, welche das Produkt aus Apertur und Zerstreuungskreis der sphärischen Aberration bei irgend einer, durch die Werthe von n, r, s und h gegebenen Brechung eines Büschels erfährt.

Objektives Maass der Bildverschlechterung durch Aberration. Das Hauptinteresse bei der Untersuchung der sphärischen Aberration eines

---

[1]) Manche Autoren haben das eine, manche das andere angenommen, was bei einer Vergleichung der unten folgenden Zahlen mit den von Anderen erhaltenen zu beachten ist.

Systems ist nun aber nicht so sehr auf die Grösse des Zerstreuungskreises im Bilde gerichtet, noch weniger auf dessen Grösse in irgend einem Zwischenstadium der Bilderzeugung, wie es hier ermittelt ist. Sondern was namentlich zu wissen interessirt ist: der Einfluss den die mit irgend einer Brechung verbundene Aenderung der Aberration auf das Erkennen der Details des Objektes ausübt.

Der Zerstreuungskreis, in dem von k brechenden Flächen hervorgebrachten Bilde nimmt in diesem einen gewissen Raum ein. In welchem Grade dieser Zerstreuungskreis die Deutlichkeit des Bildes beeinflusst, erfahren wir, indem wir nach derjenigen Grösse im Objekte fragen, deren Bild nach denselben k Brechungen gleich dem Zerstreuungskreis wäre (also faktisch von diesem verdeckt wird), wenn diese Brechungen ohne Aberrationen erfolgten, aplanatische Abbildung ergäben.

Nach dem Lagrange-Helmholtz'schen Satze ist nun (s. pag. 64) immer für kleine Winkel

$$n'u'y' = nuy,$$

auch nach beliebig vielen Brechungen, wenn n, y und u sich auf das auf die erste Fläche einfallende Büschel beziehen, n', y' und u' auf das aus der letzten austretende. Demgemäss haben wir für die Grösse des Objektes z_0, dessen Bild nach der $k$ten Brechung $= z_k'$ ist

$$n_k' u_k' z_k' = n_1 u_1 z_0 = a_1 z_0,$$

wenn n_1 und u_1 Brechungsexponent des ersten Mediums und halbe Winkelöffnung des einfallenden Büschels sind.

Die früher betrachtete Brechung sei die $k$te in irgend einem System; alsdann wird durch die angegebene Substitution

$$\Delta(z_0) = \frac{1}{a_1} h_k^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \tag{7}$$

der Ausdruck für die durch die $k$te Brechung herbeigeführte Verundeutlichung des Bildes, gemessen am Objekt selber.

Derselbe wird bequem berechenbar, wenn wir ihn durch Erweiterung mit h_1^4 auf die Form bringen

$$\Delta(z_0) = a_1 \left(\frac{s_1}{n}\right)^4 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \tag{8}$$

indem nämlich, wie leicht zu sehn, mit genügender Annäherung für die Verhältnisse der Höhen, in welchen der äusserste Randstrahl eines ziemlich engen Büschels die einzelnen Flächen schneidet, dieselben für einen paraxialen Strahl geltenden Verhältnisse gesetzt werden können, also

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = \frac{s_k}{s'_{k-1}},$$

demnach

$$\frac{h_k}{h_1} = \frac{s_k}{s'_{k-1}} \cdot \frac{s_{k-1}}{s'_{k-2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{s_2}{s_1'}.$$

Um die Verundeutlichung des Objektes zu finden, welche durch alle k Flächen zusammen hervorgebracht, also nach der $k$ten Brechung thatsächlich vorhanden ist, hat man nur einfach die einzelnen Bilddeteriorationen zu summiren, also

$$z_0^{(k)} = \sum \Delta(z_0) = a_1 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^4 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k. \tag{8a}$$

Dieser Ausdruck ist im Anschluss an die Durchrechnung eines paraxialen Strahls ausserordentlich bequem zu berechnen. Derselbe gilt ohne jede Einschränkung auf gegenseitigen Abstand oder Zahl der brechenden Flächen.

Hervorzuheben ist, dass der Einfluss der sphärischen Aberration auf die Deutlichkeit der Abbildung mit der dritten Potenz der numerischen Apertur des einfallenden Büschels wächst.

Unendlich ferne Objekte. Bei solchen kann die Bildverschlechterung füglich nicht mehr in linearem, sondern muss in ihrem angularen Betrage angegeben werden. Für diesen, $\zeta_0 = \frac{z_0}{s_1}$, ergiebt sich leicht aus Gleichung (8) für jede Brechung

$$\Delta(\zeta_0) = h_1^3 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \tag{9}$$

also nach k Brechungen

$$\zeta_0^{(k)} = \sum \Delta(\zeta_0) = h_1^3 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k. \tag{9a}$$

Der Einfluss der sphärischen Aberration zweiter Potenz ist also bei teleskopischem Sehen, dem Cubus der linearen Oeffnung des Systems bezw. des einfallenden Büschels proportional.

Der zu summirende Theil der rechten Seite in (9a) ist, wie man sich leicht überzeugt, umgekehrt proportional der dritten Potenz der Brennweite des Gesammtsystems[1]). Bezeichnen wir also den Werth, den diese Summe für die Brennweite 1 des Gesammtsystems hat mit K, so ist

$$\zeta = \left(\frac{h_1}{f}\right)^3 \cdot K.$$

Die vom ersten Gliede der axialen sphärischen Aberration abhängige Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objeks ist also proportional der dritten Potenz der relativen Oeffnung des Systems. Der Faktor K hängt von der specifischen Zusammensetzung des Systems ab, d. h. von den besonderen Werthen der Krümmungen, Brechungsverhältnisse, Abstände der einzelnen Flächen.

Der Winkelwerth des durch die sphärische Aberration verursachten Zerstreuungskreises ist, wie aus (9a) weiterhin zu schliessen ist, unabhängig von der absoluten Grösse der Brennweite des Systems bei gegebenem Constructionstypus.

Wenn daher die Optiker für Fernrohrobjektive des gleichen Typus die relative Oeffnung, d. h. das Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite ($2h:f$) bei kleinen Dimensionen bis zu $\frac{1}{5}$ steigern, während sie es auf $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{20}$ einschränken bei den grossen Teleskopen, so sind die Gründe hierfür anderwärts zu suchen.

Man kann aus den Formeln (8a) und (9a), wenn dies ein Interesse bietet, auch leicht die im Bilde vorhandene Längsaberration berechnen, d. h. die Differenz der Schnittweiten, welche zwischen dem nach k Brechungen austretenden äussersten Rand- und dem Axenstrahl vorhanden wäre, wenn die Aberration nur der zweiten Potenz der Oeffnung proportional wäre. Man hat hierzu nur die Einführungsgleichung für den Zerstreuungskreis $\frac{1}{2}z = (s_0 - s)u$ zu berücksichtigen und den auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreis, gemäss der LAGRANGE-HELMHOLTZ'schen Gleichung $u'u'y' = nuy$ wieder in das Bild zu proiciren.

Es wird bei Objekten in endlicher Entfernung

$$(s' - s_0')_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_1 u_1}{n_k' u_k'}\right)^2 \left(\frac{n_k'}{n_1 u_1}\right) z_0^{(k)} = -\frac{1}{2}\beta^2 \left(\frac{n_k'}{n_1 u_1}\right) z_0^{(k)}; \tag{8b}$$

bei unendlich entfernten Objekten, wenn $n_1 = n_k' = 1$ ist,

$$(s' - s_0')_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{f}{h}\right) f \zeta_0^{(k)}. \tag{9b}$$

[1]) Wenn wir voraussetzen, dass das System nicht selbst ein »teleskopisches« sei, gemäss unserer früheren Definition, sondern etwa nur ein Theil eines solchen, z. B. das Objektivsystem eines Fernrohrs.

Die Formel (8a) wie (9a) haben eine praktische Bedeutung nur dann, wenn die Apertur der wirksamen Büschel eine so geringe ist, dass das erste Glied der sphärischen Aberration die den höheren Potenzen der Apertur proportionalen an Grösse erheblich übertrifft. Dies ist bei den Teleskopobjektiven gewöhnlich der Fall, weshalb auf diese Anwendung findende Formeln schon vor langer Zeit — wenn auch anfänglich unter einschränkenden Voraussetzungen — entwickelt und zur Berechnung solcher Objektive benützt worden sind.

In der Gestalt, welche wir oben diesen Formeln gegeben haben, gestatten dieselben, wie bereits bemerkt, besonders bequem, wenn man rechnerisch ein paraxiales Büschel durch ein System hindurch verfolgt, daneben den Einfluss jeder einzelnen Brechung auf die Grösse der Aberration zu verfolgen und auf diese Weise die Faktoren kennen zu lernen, von denen dieselbe in den verschiedenen möglichen Fällen vorzüglich abhängt. Dieser Vorzug geht verloren, wenn man die unter dem Summenzeichen angedeuteten Operationen ausführt und hierdurch eine Reihe bildet, deren Glieder aus den Radien, Brechungsverhältnissen und Scheitel-Abständen der brechenden Flächen zusammengesetzt sind. Doch gewährt eine solche Reihenentwicklung bei Systemen einfacherer Art wiederum den Vortheil, dass man die Wirkung des ganzen Systems mathematisch besser discutiren kann.

Aberration in einfachen Sonderfällen.

Die durch eine einzige Brechung hervorgerufene Aberration ist nach (8) dargestellt durch

$$\Delta(s_0) = (nu)^3 \left(\frac{s}{n}\right)^4 n^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right). \tag{10}$$

Dieselbe ist also gleich Null 1) wenn $s = 0$ ist, woraus auch $s' = 0$ folgt, also Objekt und Bild im Scheitel zusammenfallen, 2) wenn $s = r$ ist, demnach auch $s' = r$ also Objekt und Bild im Mittelpunkt der brechenden Fläche zusammenfallen, und 3) wenn $n's' = ns$, woraus folgt $s = r + \frac{n'}{n} r$; $s' = r + \frac{n}{n'} r$, d. i. in den aplanatischen Punkten der Kugelfläche. In diesem Falle, ebenso wie in den beiden vorangehenden sind auch die Aberrationen höherer Ordnung gleich Null, wie wir früher (pag. 55) bereits gefunden haben.

Im übrigen hängt das Vorzeichen der Aberration von dem des Faktors $\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right)$ ab, welchen wir auf die Form bringen können

$$\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} = \frac{n'-n}{n'^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{n'+n}{n}\frac{1}{s}\right).$$

Eine nähere Discussion zeigt, dass sowohl bei einer collektiven als bei einer dispansiven Brechung die Aberration je nach der Lage des leuchtenden Punktes positiv oder negativ, d. h. unter- oder übercorrigirt ist. Nur für ein unendlich entferntes Objekt ist $\Delta(s_0)$ bei einer collektiven Brechung stets positiv, bei einer dispansiven Brechung stets negativ.

Hat man es mit zwei durch einen endlichen Abstand getrennten Flächen zu thun, so werden die Verhältnisse schon etwas schwerer zu übersehen. Wir verzichten hier auf ein näheres Eingehen; wir wollen nur beiläufig darauf hinweisen, dass man sowohl unter Benützung der aplanatischen Punkte der beiden Flächen als auch unter Berücksichtigung des Umstandes, dass, wie eben bemerkt, die Aberration derselben Fläche je nach der Lage des Objektpunktes verschiedenes Vorzeichen hat, zwei Flächen so zusammensetzen kann, dass die Aberration des Gesammtsystems — etwa einer beiderseits an Luft grenzenden Linse — bei gegebener endlicher Brennweite gleich Null sei.

Die Aberration einer beiderseits an dasselbe Medium grenzenden Linse von verschwindender Dicke, deren Vorderfläche die Krümmung ρ, deren Hinterfläche die Krümmung ρ' und deren Substanz den relativen Index n gegen das umgebende Medium hat, für unendlich fernen Objektpunkt ergiebt sich aus (9a), gemessen durch den objektseitigen Winkelwerth des Zerstreuungskreises zu

$$\zeta = h^3 \left[\frac{n+2}{n}\varphi\rho^2 - \frac{2n+1}{n-1}\varphi^2\rho + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\varphi^3\right], \tag{11}$$

wenn $\varphi = (n-1)(\rho - \rho')$ die Stärke der Linse ist. Dieselbe wird also, in Funktion von ρ durch eine Parabel dargestellt, deren Axe senkrecht zur Axe der ρ-Werthe ist.

Damit die Brennweite oder Stärke der Linse bei gegebenem n dieselbe bleiben, muss $\rho - \rho' = k$ constant sein. Wenn man also ρ variirt, so ist vorausgesetzt, dass ρ' im gleichen Sinne und um den gleichen Betrag geändert werde. Man bezeichnet eine solche gleichartige Variation von ρ und ρ' oft als »Durchbiegen« der Linse.

Die Aberration einer einfachen dünnen Linse ist ein Minimum für

$$\rho_{min} = +\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{n-1}\,\frac{n}{n+2}\cdot\varphi$$

und beträgt dann

$$\zeta_{min} = (h\varphi)^3\,\frac{n(4n-1)}{(n-1)^2\,4(n+2)}.$$

In der folgenden Tabelle sind für $n = 1{\cdot}5$ und $n = 2{\cdot}0$ die Werthe, die ζ bei verschiedener Form der Linse annimmt, zusammengestellt.

	$n = 1{\cdot}5$			$n = 2{\cdot}0$		
Gestalt der Linse:	ρ/φ	ρ'/φ	$\zeta/(h\varphi)^3$	ρ/φ	ρ'/φ	$\zeta/(h\varphi)^3$
Ebene Vorderfläche . . .	± 0	-2	$+9$	± 0	-1	$+4$
Gleichseitig	$+1$	-1	$+\frac{10}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+2$
Ebene Hinterfläche . . .	$+2$	± 0	$+\frac{7}{3}$	$+1$	± 0	$+1$
Günstigste Form (Aberration = Minimum)	$+\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{15}{7}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{7}{8}$

Wie man sieht, nehmen die Aberrationen unter sonst gleichen Umständen mit wachsendem n rasch ab.

Wenn der Objektpunkt anders gelegen wäre, als oben angenommen, so würde die Aberration im wesentlichen dasselbe Gesetz befolgen. Nur würde z. B. das Minimum der Aberration dann bei einer anderen Gestalt stattfinden.

Indem wir die Discussion dieses Falles dem Leser anheimgeben, wollen wir nur noch die Aberration in einem System von beliebig vielen in Contakt befindlichen Linsen von zu vernachlässigender Dicke besprechen. Die Brennweiten der Linsen seien gegeben durch deren Reciproken, die »Stärken« $= \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_k \ldots . \varphi_p$. Die Krümmungen der dem Lichte zugewandten Flächen seien $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_k \ldots . \rho_p$ die Brechungsindices der Linsen gegen das sie umgebende Mittel, (etwa Luft[1]) $= n_1, n_2 \ldots n_k \ldots . n_p$.

[1] Die Fiction, dass alle Linsen sich in Luft befinden, ist auch dann erlaubt, wenn in Wirklichkeit zwei Medien verschiedenen Indicis aneinanderstossen, da man sich diese durch eine unendlich dünne Luftschicht getrennt denken kann, ohne an der Wirkung etwas zu ändern.

Bei unendlicher Entfernung des Objekts ist dann die Aberration gemäss (9a)

$$\zeta_0^{(p)} = h_1^3 \sum_{k=1}^{k=p} \left[\frac{n_k + 2}{n_k} \varphi_k \rho_k^2 - \frac{2n_k + 1}{n_k - 1} \varphi_k^2 \rho_k - \frac{4n_k + 1}{n_k} \varphi_k \rho_k \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l \right. \\ \left. + \left(\frac{n_k}{n_{k-1}} \right)^2 \varphi_k^3 + \frac{3n_k + 1}{n_k - 1} \varphi_k^2 \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l + \frac{3n_k + 2}{n_k} \varphi_k \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l^2 \right]. \tag{12}$$

Wie man sieht besteht die ganze Summe aus lauter Gliedern von der Form $G_k = A_k \rho_k^2 + B_k \rho_k + C_k$. Das erste Glied dieser Art stellt die Aberration der ersten Linse gegenüber parallel einfallendem Lichte dar, die wir oben näher betrachtet haben. Das $k$te Glied stellt den Zuwachs der Aberration dar, den die $k$te Linse verursacht, auf welche die Strahlen aus der Entfernung $e_k = 1 : \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l$ einfallen, nämlich aus dem hinteren Brennpunkt des aus den voranstehenden $(k-1)$ Linsen gebildeten Systems. Die Coëfficienten dieser Glieder hängen daher ausser von n_k, ρ_k und φ_k auch noch von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1}$ ab.

Der durch jede einzelne Linse bewirkte Zuwachs der Aberration wird also unter den gegebenen Umständen in Funktion ihrer Vorderkrümmung ebenfalls durch je eine Parabel dargestellt, deren Axe zur (Abcissen-) Axe der ρ senkrecht steht, aber für die verschiedenen Linsen verschiedene Lage hat. Denkt man sich die Gesammtheit der Aberrationswerthe jeder Linse in dieser Weise graphisch dargestellt, so gewinnt man am besten einen Ueberblick über die Möglichkeit und die Bedingungen der Aufhebung der Aberration des Gesammtsystem durch gegenseitige Compensation.

Im Falle zweier Linsen z. B. ist nothwendig, dass die Aberration der zweiten Linse für die aus der Entfernung $\frac{1}{\varphi_1}$ einfallenden Strahlen entgegengesetzt gleich sei der der ersten Linse für parallel einfallende Strahlen. Dies wird im allgemeinen nur dann möglich sein, wenn die ersten Brennweiten der beiden Linsen entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. h. die eine Linse collektiv, die andere dispansiv ist, während das Verhältniss der absoluten Grössen der Brennweiten ein beliebiges endliches sein kann. Alsdann aber ist die Aufhebung der Aberration auf unendlich viele Arten möglich, denn von dem grösseren der beiden Minimalwerthe der die Aberrationen darstellenden Parabeln an kommt jeder Ordinatenwerth in jeder Parabel zwei Mal vor. Von da an können daher zu jedem Aberrationswerth, d. h. jeder Form der einen Linse zwei Formen der anderen Linse angegeben werden, in welchen sie die Aberration der ersteren aufhebt.

Analytisch ist die Bedingung der aufzuhebenden Aberration 1. Ordnung in einem aus zwei Linsen bestehenden System, gemäss (12) dargestellt durch eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten.

Wir müssen uns ein näheres Eingehen auf diesen für die Theorie der Fernrohrobjektive wichtigen Fall wegen Mangel an Raum leider versagen, ebenso die Discussion der in Combinationen von 3 und 4 Linsen auftretenden Möglichkeiten.

Ausser einer vollständigen Aufhebung der Aberration durch gegenseitige Compensation kann man durch Anwendung mehrerer Linsen auch schon eine erhebliche Verminderung dieser Aberration bewirken. Ersetzt man z. B. eine einfache Linse von der Stärke $\Phi = (n-1)(P - P')$ durch k Linsen gleicher Substanz, gleicher Form (etwa alle gleichseitig oder dergl.) und gleicher Gesammtbrennweite, so dass also $\Sigma \varphi_k = \Phi$, so wird die Aberration der letzteren dargestellt durch einen Ausdruck von der Form $M \frac{1}{k^2} + N \frac{1}{k}$, worin M und N von der Substanz und Form der Linsen abhängen. Die Aberration des Gesammtsystems nimmt *also mit wachsendem* k schnell ab.

Wenn die Dicken der Linsen gegen deren Radien endlich, oder die Linsen durch grössere Intervalle getrennt sind, so erfahren alle diese Sätze erhebliche Modifikationen.

Ganz ebenso wie für einen unendlich fernen Punkt lässt sich aus Gleichung (8) bezw. (8a) für einen in endlichem Abstand gelegenen ein geschlossener Ausdruck für die Aberration ableiten, wenn das System gegeben ist. Dieser Ausdruck wird ganz gleichartig jenem, nur dass in seinen Coëfficienten ausser den das System als solches bestimmenden Grössen auch jene Entfernung s des Objektpunktes von der ersten brechenden Fläche auftritt. Für ein System dünner Linsen wird er also ebenso wie Gleichung (12) in einer Summe von Gliedern der Form $G_k' = A_k' \rho_k^2 + B_k' \rho_k + C_k'$ bestehen. Durch ein System zweier Linsen von gegebener Brennweite lässt sich daher — analytisch wenigstens — der Bedingung genügen: die sphärische Aberration erster Ordnung für zwei Punkte auf der Axe zu heben. Es ergeben sich vier Lösungen, von denen natürlich noch fraglich ist, welche reell sind. Um die Aberration für drei Punkte zu heben, bedarf es mindestens dreier Variabelen, also bei gegebenen Werthen von n und φ dreier Linsen u. s. f. Um die Aberration erster Ordnung für ein endliches Stück der Axe gleichzeitig zu heben, müsste man demnach unendlich viele Linsen anwenden, mit anderen Worten: es ist praktisch unmöglich, auch nur diesen, relativ geringen Grad dioptrischer Vervollkommnung in einem endlichen Raumgebiet zu erreichen.

Wir begegnen also schon hier einer der Grenzen, auf welche wir pag. 84 hingewiesen haben. —

Die höheren Glieder der sphärischen Aberration auf der Axe. Das dem Quadrat der Apertur proportionale, erste Glied des Ausdrucks für die sphärische Aberration wird die letztere im Allgemeinen nur dann einigermaassen vollständig darstellen, wenn die Apertur im Verhältniss zu den Radien der brechenden Flächen sehr klein ist. Da aber aus mehreren Gründen das Bestreben der Constructeure von optischen Apparaten darauf gerichtet sein muss, die Apertur möglichst gross zu machen, so sind für eine Berechnung der Aberration in solchen Systemen auch die höheren Glieder der Entwickelung noch zu berücksichtigen.

Wie bereits früher erwähnt (pag. 86) hat die Darstellung der Aberration durch eine nach Potenzen der Einfallshöhe, des Einfallswinkels oder dergl. fortschreitende Potenzreihe einen Sinn und Werth überhaupt nur dann, wenn diese Variabele relativ klein ist, da bei grösseren Werthen entsprechend hohe Potenzen berücksichtigt werden müssten. Die Coëfficienten derselben werden aber bald so complicirt und enthalten zugleich so hohe Potenzen der verfügbaren Elemente (Radien und Dicken), dass an eine analytische Behandlung derselben kaum zu denken ist. Einer solchen Behandlung hat sich nur noch das der vierten Potenz der Apertur proportionale zweite Glied der Reihe zugänglich erwiesen, auf dessen Entwickelung wir jedoch hier aus Mangel an Raum auch verzichten, indem wir auf die Literatur verweisen (s. unten).

Man erreicht natürlich eine vollkommnere Strahlenvereinigung, wenn man gleichzeitig mit dem ersten Gliede das zweite durch geeignete Wahl der Linsen-Krümmungen zum Verschwinden bringt. In einem System aus zwei Linsen ist dies bei den verfügbaren Werthen der Brechungsindices meist unmöglich; und auch dann, wenn mehr Linsen zur Verfügung stehen, ist es nicht von vornherein als das Beste zu erachten, wenn das erste und zweite Glied der Aberration ganz auf Null gebracht wird, ohne dass man die höheren Glieder mit berücksichtigt, da diese dann unter Umständen einen um so schädlicheren Einfluss ausüben können. Im Allgemeinen ist man vielmehr bei dieser, wie bei allen ähnlichen Aufgaben, welche auf eine Erweiterung der Abbildungsgrenzen gerichtet sind, gezwungen, ein gewisses Ausgleichungs-

verfahren anzuwenden: Man verzichtet darauf, den betreffenden Bildfehler in aller Strenge aufzuheben, und sucht vielmehr zu erreichen, dass derselbe innerhalb des gegebenen Gebietes überall möglichst klein werde. Dabei kommen die im Eingange dieses Abschnittes genannten beiden Momente zu statten: die beschränkte Schärfe des Auges, welche es überflüssig macht, den »Bildpunkt« unter eine gewisse Grösse zu vermindern und die, wenn auch kleine, so doch endliche Länge der Lichtwellen, welche eine Summirung der Lichtstärke ergiebt, auch bei Elementarwellen, die um geringe Beträge gegen einander verzögert sind. Von diesem Ausgleichungsverfahren dürfte, in der Anwendung auf den vorliegenden Fall, die übersichliche Darstellung von GAUSS eine Idee geben, welche dieser in einem Briefe an BRANDES niedergelegt hat. Wir geben dieselbe daher hier wörtlich wieder (nach GEHLERS, Physikal. Wörterb., Leipzig 1831, Art. Linsenglas, Bd. 6, pag. 437)[1].

... »Ich finde nämlich jetzt durch eine tiefer eindringende Untersuchung, dass die Undeutlichkeit, die in dem Ausdrucke für die Längen-Abweichung von der vierten Potenz des Abstandes der auffallenden Strahlen von der Axe abhängt, den möglichst kleinsten Total-Einfluss hat, wenn man das Objektiv so construirt dass diejenigen Strahlen, die unendlich nahe bei der Axe einfallen, und diejenigen, die in einiger Entfernung $= R\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}$ auffallen würden, (wo $R =$ Radius des Objektivs ist,) in einem Punkte A sich vereinigen, wobei das Okular dann so steht, dass man denjenigen Punkt der Axe, wo die Strahlen, die in der Entfernung $= \sqrt{(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6})}\,R$ und $= \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6})}\,R$ von der Axe aufgefallen sind, sich alle vereinigen, deutlich sieht. Denken Sie sich nämlich durch diesen Punkt eine auf die Axe senkrechte Ebene, so ist das Bild desto undeutlicher, je grösser der Kreis um A ist, den die von einem Punkte des Objektes auf das Objektivglas gefallenen Strahlen füllen, doch so, dass die Intensität der Strahlen an jeder Stelle dieses Kreises mit berücksichtigt werden muss. Hierbei ist nun einige Willkürlichkeit; ich halte für das zweckmässigste, hier nach denselben Principien zu verfahren, die der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde liegen. Ist nämlich ds ein Element dieses Kreises, ρ die Entfernung des Elementes von A und i die Intensität der Strahlen daselbst, so nehme ich an, dass $\int i\rho^2 ds$ als das Maass der Total-Undeutlichkeit zu betrachten sei, und mache dieses zu einem Minimum. Ich finde dabei folgende Resultate: 1) Construirte man das Objektiv so, dass dasjenige Glied der Längen-Abweichung, welches von dem Quadrate der Entfernung von der Axe abhängt, $= O$ wird, und setzte das Ocular so, dass A dahin fällt, wo die der Axe unendlich nahen Strahlen diese schneiden, so sei der Werth dieses Integrals $= E$. 2) Stellte man aber bei derselben Einrichtung das Ocular so, dass das Integral so klein wird, wie es bei dieser Einrichtung werden kann, (wobei A der Vereinigungsgunkt der in der Entfernung $= R\sqrt{\frac{1}{3}}$ auffallenden Strahlen sein wird), so ist das Integral $= \frac{1}{4}E$; 3) dagegen ist bei der obigen Einrichtung und der vortheilhaftesten Stellung des Oculars das Integral $= \frac{1}{100}E$, als absolutes Minimum. Obiges Resultat, dass nämlich mit dem Vereinigungspunkte der der Axe unendlich nahen Strahlen ein blos fingirtes Bild (von Strahlen aus grösserer Distanz von der Axe als der Halbmesser des Objektivs) vereinigt werden soll, ist anfangs sehr überraschend und paradox scheinend; aber bei näherer Betrachtung sieht man den eigentlichen Grund leicht ein. Jenes erste so genannte Hauptbild (von Strahlen sehr nahe bei der Axe) ist nämlich dabei gleichsam das Unwichtigste wegen seiner geringen Intensität; viel wichtiger ist, dass die Strahlen von den der Peripherie näheren Ringen des Objectivs unter sich besser zusammen gehalten werden, was bei jener Einrichtung

[1]) *Siehe auch Werke* 5, pag. 509.

am besten erreicht wird. Es thut mir leid, dass die Grenzen eines Briefes jetzt grössere Ausführlichkeit nicht gestatten; der scharfe Calcül lässt sich nichts abstreiten und bei einem vagen Raisonnement übersieht man leicht einen wesentlichen Umstand; allein für den Kenner werden diese Winke schon zureichen.

Allgemein finde ich, dass immer bei der vortheilhaftesten Stellung des Oculars jenes Integral $= \frac{1}{4}E(1 - \frac{8}{5}\mu^2 + \frac{2}{3}\mu^4)$ wird, wenn das Objectiv so construirt ist, dass Strahlen aus der Entfernung μR von der Axe sich mit dem (oben sogenannten) Hauptbilde in einem Punkte vereinigen. Dieses ist ein Minimum für $\mu = \sqrt{\frac{6}{5}}$ und ist dann $= \frac{1}{100}E$; für $\mu = 1$ wäre es nur $= \frac{1}{60}E$ und für μ = unendlich klein $= \frac{1}{4}E$.«

Eine Ausführung der von GAUSS angedeuteten Rechenoperationen veröffentlichte J. C. E. SCHMIDT[1]). Zu dem gleichen Resultate wie GAUSS kam BESSEL[2]) und SCHEIBNER[3]); vergl. auch SCHLEIERMACHER[4]). In anderer Weise bestimmten die Lage und Grösse des sphärischen Zerstreuungskreises KERBER[5]) und von HOEGH[6]).

Wir haben wiederholt hervorgehoben, dass es zwecklos ist, Speculationen in dieser Richtung zu weit zu treiben, so lange man nicht auch auf die Phase der den Zerstreuungskreis schneidenden »Strahlen« d. h. Elementarwellen Rücksicht nimmt. Die Aufgabe, die Helligkeitsvertheilung in irgend einer Einstellungsebene eines mit spärischer Aberration behafteten Systems zu bestimmen, kommt in Wahrheit darauf hinaus: die Diffractionswirkung einer nicht spärischen, sondern nach bestimmtem Gesetze paraboloidischen, begrenzten Wellenfläche festzustellen, gehört also eigentlich nicht in das Gebiet der geometrischen, sondern der physischen Optik. Die erstere kann nur die Unterlagen für die weitere Behandlung liefern.

Bei Systemen von relativ grosser Oeffnung, wie den photographischen (Porträt-) Objectiven und namentlich den Mikroskopen genügt auch die Entwickelung des zweiten und dritten Gliedes der sphärischen Aberration nicht, um die thatsächlichen Verhältnisse selbst nur annähernd wiederzugeben. Eine Reihenentwickelung bis zu noch höheren Gliedern — und bei Mikroskopen würde sich dieselbe bis zu sehr hohen erstrecken müssen — würde aber ganz unverhältnissmässig complicirte Resultate liefern[7]), die keinerlei Uebersicht mehr gestatteten. In diesen Fällen ist man daher darauf angewiesen, sich von der Art der Strahlenvereinigung in einem gegebenen System dadurch zu überzeugen, dass man auf trigonometrischem Wege, gemäss den pag. 55/56 angegebenen Formeln eine genügende Anzahl der vom Objektpunkte aus divergirenden Strahlen durch die einzelnen Flächen verfolgt und so ihre Schnittpunkte mit der Axe nach der letzten Brechung bestimmt.

Die Einsicht, welche man auf diesem, gewissermaassen empirischen Wege in die Wirkungsweise der einzelnen Flächen und der Combinationen von solchen gewinnen kann, lässt sich natürlich sehr schwer weiter mittheilen, so dass

[1]) Lehrb. der analytischen Optik hrsg. v. GOLDSCHMIDT, Göttingen 1834, pag. 514 ff.

[2]) Astron. Unters., Königsberg 1841, Bd. I.

[3]) Abh. d. Leipz. Akad. 11, pag. 559. 1876.

[4]) Analytische Optik, Darmstadt 1842, Bd. 1, pag. 14 u. 378 ff.

[5]) Centr.-Zeitg. f. Opt. u. Mech. 8, pag. 145. 1887; 10, pag. 147. 1889.

[6]) Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 117. 1888; vergl. dagegen CZAPSKI, ibid., pag. 203, und MOSER, pag. 223.

[7]) Vergl. z. B. PETZVAL, Bericht über opt. Unters., Wiener Sitzber. 24, pag. 50. 1857, welcher zur Berechnung des nach ihm benannten photographischen Porträtobjectives die Reihenentwickelung bis zum neunten Grade trieb.

schliesslich Jeder darauf angewiesen bleibt, sich dieselbe durch eigene Erfahrung anzueignen. Auch sind die Resultate im einzelnen von wenig Interesse für weitere Kreise, sondern gehen fast ausschliesslich Diejenigen an, welche sich mit der rechnerischen Construction von optischen Systemen befassen.

Von Wichtigkeit ist nur — namentlich in praktischer Hinsicht — das allgemeine Ergebniss, welches solche Bemühungen geliefert haben: dass es möglich ist, auch in Büscheln von sehr grossem Oeffnungswinkel durch geeignete Combination einer relativ geringen Anzahl von brechenden Flächen die sphärische Aberration praktisch aufzuheben, d. h. auf ein so geringes Maass zu reduciren, dass ihr Einfluss auf die Bildschärfe unmerklich ist und jedenfalls geringer wird, als der anderer Faktoren, welche eine beliebige Steigerung der Bildschärfe ohnedies verhindern.

Bei Mikroskopen speciell kann der Oeffnungswinkel der vom Objekt divergirenden Strahlen nahezu 180° sein und er kann dies selbst in einem höher brechenden Medium als Luft — wodurch ja, wie ohne weiteres ersichtlich und später noch näher dargelegt werden soll, der dioptrische Werth des Büschels entsprechend gesteigert wird. Trotzdem ist eine durchaus befriedigende Aufhebung der sphärischen Aberration in solchen Systemen durch Combination von nicht mehr als 15 Brechungen, d. h. brechenden Flächen, möglich, mit welchen zugleich noch mehreren anderen wichtigen Bedingungen Genüge geleistet werden kann. Bei Systemen, deren Oeffnungswinkel nicht 180° in Luft übersteigt, genügen hierzu bereits 10—12 Brechungen.

II. Abbildung eines zur Axe senkrechten Flächenelements durch weitgeöffnete Büschel.

Bedingung des Aplanatismus.

Mit der Aufhebung der sogen. sphärischen Aberration auf der Axe, d. h. mit der Einrichtung eines Systems brechender oder spiegelnder Flächen, dass die von einem auf der Axe gelegenen Punkte ausfahrenden Strahlen wieder in einem auf der Axe gelegenen Punkte — oder sehr kleinen Scheibchen — vereinigt werden, ist geometrisch und physisch (letzteres gemäss dem Satze vom kürzesten Lichtweg, pag. 16) die Abbildung des einen Punktes in den anderen gegeben. Da alle Functionen eines Linsensystems sich stetig ändern, so wird bei einem System von geringer Oeffnung mit der Abbildung eines auf der Axe gelegenen Punktes jedenfalls auch die — wenn auch entsprechend weniger scharfe — Abbildung eines ihm seitlich benachbarten und damit die eines zur Axe senkrechten den ersteren Punkt enthaltenden Flächenelements durch ebenso weit geöffnete Büschel *eo ipso* gegeben sein. In Systemen von erheblicher endlicher Oeffnung jedoch ist dies, wie eine nähere Betrachtung zeigt, durchaus nicht der Fall; es muss dann vielmehr in den Büscheln, welche die Abbildung des Axenpunktes vermitteln, eine ganz bestimmte Beziehung unter den conjugirten Strahlen vor und nach dem Durchgang durch das System bestehen, damit die Abbildung auch nur eines unendlich kleinen axialen Flächenstücks ermöglicht werde.

Von allgemeineren Fragen ausgehend, als uns hier beschäftigen, hatte CLAUSIUS in seiner bekannten Abhandlung über »die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Grenzen ihrer Wirkung«[1]) nachgewiesen, dass, wenn die gesammte Energie, welche von einem Flächenelemente dq in einem Medium

[1]) POGG. Ann. 121, pag. 1. 1864 Mech. Wärmetheorie, 3. Aufl. I, pag. 315. 1887.

vom Brechungsindex n, innerhalb des unendlich kleinen Raumwinkels $d\omega$ ausgestrahlt wird, übertragen wird auf ein Element dq', in einem Medium vom Index n', dann die Beziehung stattfindet

$$\frac{n^2 \cos u\, d\omega}{n'^2 \cos u'\, d\omega'} = \frac{dq'}{dq}.$$

Hierin ist $d\omega'$ der unendlich kleine Raumwinkel, innerhalb dessen die Strahlung auf das Element dq' stattfindet, u und u' sind die Winkel, welche die Axen der Strahlenbündel mit den zugehörigen Flächennormalen bilden.

Für die Ableitung dieser Gleichung ist nur von dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und einigen anderen Beziehungen ganz allgemeiner Natur Gebrauch gemacht. Auch gilt dieselbe für einen viel allgemeineren Fall als den hier betrachteten, nämlich ganz unabhängig davon, durch welche Mittel die von dq ausgehenden Strahlen auf dq' concentrirt werden, ob dies z. B. durch continuirliche oder abrupte Aenderung der Strahlenwege geschieht, unabhängig auch von der gegenseitigen Lage der Elemente dq und dq' u. s. w. Es stellt diese Gleichung daher die allgemeinste Beziehung dar, welche zwischen den in sie eintretenden Grössen unter den angegebenen Umständen besteht und ebenso ist auch ihre Herleitung bei CLAUSIUS auf die denkbar allgemeinste Grundlage gestellt.

Angewandt auf ein optisches System mit einer Symmetriaxe, zu welcher dq und dq' senkrecht stehen, ergiebt die Gleichung als Bedingung für die Abbildung eines Flächenelements durch weitgeöffnete Büschel die Beziehung

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta = const,$$

welche wir alsbald auf einem anderen Wege herleiten wollen.

Direkter bewies denselben Satz v. HELMHOLTZ[1]) auf photometrischer Grundlage als Bedingung der Erhaltung der Leuchtkraft bei der Strahlung von dq innerhalb eines Kegelraums von der Oeffnung u auf dq' innerhalb der Oeffnung u'. Endlich hat auch HOCKIN[2]) einen Beweis geliefert, den kürzesten und einfachsten wohl, welcher möglich ist, indem er die Bedingung dafür aufsuchte, dass die optischen Längen zwischen conjugirten Punkten für zwei seitlich benachbarte Paare von Punkten auf allen innerhalb eines endlichen Winkelraums möglichen Weg je einander bis auf unendlich kleine Grössen gleich seien.

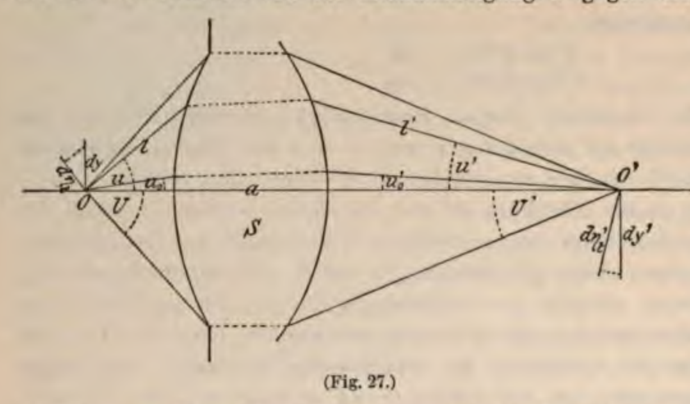
So werthvoll alle diese Herleitungen sind, namentlich durch die allgemeinere Bedeutung, welche sie dem Satze geben, so will ich mich doch damit begnügen, auf sie hingewiesen zu haben, den Satz selbst aber auf einem anderen Wege beweisen, welcher die uns hier in erster Linie interessirende dioptrische Bedeutung desselben deutlicher kenntlich macht, die bei jenen Ausführungen wohl fast ganz versteckt bleibt. Die Giltigkeit des Satzes zeigt sich auch unter diesem Gesichtspunkte als eine so weitgehende, dass er als eines der allgemeinsten Theoreme der Dioptrik bestehen bleibt.

Wir setzen auch unsererseits nichts weiter voraus, als dass ein optisches System ganz beliebiger Zusammensetzung vorliege, welches eine Symmetrieaxe besitzt, »centrirt« ist, und in welchem für die Punkte O und O' der Axe die sphärische Aberration aufgehoben ist. Ein bei O zur Axe senkrechtes Flächenelement dq werde (Fig. 27) durch die der Axe unendlich nahe verlaufenden Strahlen in das bei O' ebenfalls zur Axe senkrechte Element dq' abgebildet, so dass die lineare Lateralvergrösserung in diesen Elementen $\frac{dy'}{dy} = \beta_0$ ist. Die abbildenden Strahlen

[1]) POGG. Ann., Jubelbd., pag. 557. 1874.

[2]) Journ. R. Micr. Soc. Ser. 2, Vol. 4, pag. 337. 1884.

seien durch eine auf der Axe senkrechte kreisförmige Blende so begrenzt, dass überall nur Strahlen von der Maximalneigung U gegen die Axe in das System ein- und solche von der Maximalneigung U' aus ihm austreten können. Die Bedingung dafür, dass das Element dq durch alle von ihm innerhalb dieser Grenzen ausfahrenden Strahlen in dq' hinreichend deutlich abgebildet werde, kann dann offenbar auch so gefasst werden, dass diese Elemente durch alle Partial-Büschel, deren Axen bei der Incidenz irgend eine Neigung zwischen 0 und U haben — wenigstens bis auf unendlich kleine Abweichungen — mit gleicher Vergrösserung in einander abgebildet werden.



(Fig. 27.)

Wie wir wissen (pag. 80), repräsentirt nun jeder ein System unter endlichen Einfallswinkeln durchsetzender Strahl die Axe zweier räumlich und metrisch verschiedener collinearer Abbildungen: einer in der Einfallsebene des Strahls, im Meridianschnitt, und einer senkrecht dazu, im Sagittalschnitt verlaufenden. Beide sind auf unendlich schmale Streifen nahe der Axe beschränkt, in Bezug auf die abbildenden wie die zur Abbildung gelangenden Elemente. Wir sahen ferner, dass in einem centrirten optischen System sich dieses Verhältniss entlang dem gebrochenen Weg, den der Hauptstrahl durch dasselbe nimmt, fortsetzt. Innerhalb jeder Gruppe werden Linienelemente dy senkrecht zum einfallenden Hauptstrahl abgebildet in Linienelemente, welche unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von der zweiten Ordnung senkrecht auf dem gebrochenen Hauptstrahl stehen, wobei im Besonderen innerhalb jeder Partial-Abbildung die Beziehung fortbestehen bleibt

$$\beta \cdot \gamma = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{du'}{du} = \frac{n}{n'} .$$

Wir betrachten einen von O unter dem Winkel u gegen die Axe geneigt ausfahrenden Strahl l, welchem der unter dem Winkel u' gegen die Axe geneigte nach O' zielende Strahl l' entspricht. Wenn keine weiteren Annahmen gemacht werden als bisher geschehen, so kann u' jede beliebige stetige Function $f(u)$ von u sein, mit der einzigen Bedingung, dass sie für $u = 0$ selbst verschwindet, also dass $f(0) = 0$. Von den beiden Abbildungen, deren Objektaxe l und deren Bildaxe l' ist, werden sowohl Linienelemente, die zu l und l', als auch solche, die zur Axe a des ganzen Systems bei O senkrecht stehen, im Allgemeinen mit verschiedener Vergrösserung wiedergegeben, so dass also ein bei O zu a oder l senkrechter Kreis als eine zu a oder l' senkrechte Ellipse dargestellt wird.

Bei der senkrecht zur Einfallsebene sich vollziehenden Abbildung nämlich ist das Convergenzverhältniss conjugirter Strahlen in O und O', $\gamma_s = \frac{dv'}{dv}$, in folgender Weise zu bestimmen. Wir denken uns die Fig. 27 um den unendlich kleinen Winkel dw um die Axe a gedreht; dann sind die Winkel, welche

die Strahlen [illegible] und [illegible] in ihrer neuen Lage mit den früheren einschliessen die in Betracht kommenden [illegible] und [illegible] und es ist leicht zu sehen, dass

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

Die im Sagittalschnitt bei [illegible] und [illegible] zu [illegible] und [illegible] und zur Zeichenfläche senkrecht stehenden Linienelemente [illegible], [illegible], ferner stehen auch senkrecht zu [illegible] [illegible] also den Flächenelementen [illegible] bezw. [illegible] [illegible] und sind [illegible] [illegible] mit [illegible] bezw. [illegible]. Daher ist gemäss der Fundamentalgleichung [illegible]

$$[illegible] = \left(\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)^2 = \left(\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)^2 = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

Es variirt also die Vergrösserung der Linienelemente im Sagittalschnitt mit dem Winkel [illegible] wie das Verhältniss [illegible]. Damit [illegible] für alle Winkel [illegible] das gleiche sei, muss [illegible] = const. sein, innerhalb der Grenzen [illegible] und [illegible] und da für [illegible] ist, so ergiebt sich als Bedingung der Abbildung eines Punktes zur Axe senkrechter Linienelemente durch sagittale Büschel [illegible] endlicher Ausdehnung, dass

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible] = \text{const.} \qquad [illegible]$$

sei, also

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]} [illegible] \qquad [illegible]$$

Die zu der [illegible] im Meridianschnitt gelegenen, zu [illegible] und [illegible] bei [illegible] und [illegible] senkrechten Linienelemente [illegible], [illegible] sind [illegible] mit den in diesem Schnitt gelegenen Elementen [illegible], [illegible], der Flächenelemente [illegible] [illegible] bilden mit diesen bezw. die Winkel [illegible]. Für erstere ist nach der Gleichung [illegible]

$$\left(\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)^2 = \frac{[illegible]}{[illegible]},$$

wo [illegible] die [illegible] von [illegible] ist. Die zur Hauptaxe [illegible] senkrechten Elemente sind aber

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]} \qquad [illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]};$$

daher für diese[1] das Vergrösserungsverhältniss

---

[1] [illegible] ist das Bild eines zu [illegible] senkrechten, also gegen [illegible] unter dem Winkel $\frac{\pi}{4} - [illegible]$ geneigten Linienelements nicht weiter ein zu [illegible] senkrechtes, d. h. gegen [illegible] unter dem Winkel $\frac{\pi}{4} - [illegible]$ geneigtes, sondern gemäss den Sätzen [illegible] innerhalb dieses [illegible] Gebietes [illegible] [illegible] Annäherung eine Linie, welche der Bedingung genügt

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]} \left([illegible] \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}\right).$$

Dem gegenüber ist aber daran zu erinnern, dass einerseits die Strahlenvereinigung in Meridianschnittbüscheln überhaupt nur von der ersten Ordnung ist, d. h. dass von der Abbildung eines Elements [illegible] nur in [illegible] die Rede sein kann, als man Zerstreuungskreise vernachlässigt, welche [illegible] gegen die Dimensionen des [illegible] Elementes selbst [illegible] ist. Mit derselben Annäherung muss man sich also bei der Lösung der ganzen Aufgabe begnügen, wenn dieselbe allgemein bleiben soll. Mit dieser Annäherung kann aber [illegible] als Bild des zu [illegible] senkrechten Elements [illegible] durch Meridianbüschel [illegible] ein wie immer bestimmtes ebenfalls zu [illegible] senkrechtes Element [illegible] angenommen werden. Die von den einzelnen Punkten von [illegible] ausgehenden Strahlen durchsetzen [illegible] in Punkten, welche von der durch die oben angegebenen Beziehungen bestimmten [illegible] nicht weiter entfernt sind als bis auf Abweichungen, welche gegen die [illegible] von [illegible] selber unendlich klein sind. Mit dieser Annäherung müssen wir uns hier begnügen.

$$\beta_t = \left(\frac{dy'}{dy}\right)_t = \frac{n \cos u \, du}{n' \cos u' \, du'} = \frac{n \, d(\sin u)}{n' \, d(\sin u')} . \tag{3}$$

Damit β_t unabhängig von u und für $u = 0$ gleich β_0, d. i. gleich dem Vergrösserungsverhältniss für paraxiale Strahlen sei, muss wiederum

$$\beta_t = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = const, \tag{4}$$

also

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta_0$$

sein. Die Bedingung der Abbildung eines Paares von Linienelementen durch Büschel verschiedener endlicher Neigung zur Axe ist also für meridionale Büschel die gleiche wie für sagittale: Das Verhältniss der Sinus conjugirter Axenwinkel muss für die von den conjugirten Axenpunkten ausgehenden Strahlen innerhalb des betreffenden Winkelraums ein constantes sein. Der Werth der Constanten ist die Vergrösserung der paraxialen Strahlen β_0 multiplicirt mit dem Verhältniss der Brechungsexponenten des Objekt- und Bildmediums.

Abbe[1]), welcher zuerst den Sinussatz als die dioptrische Bedingung der Abbildung von Flächenelementen durch Büschel endlicher Oeffnung hingestellt hat, will den Begriff des »Aplanatismus« überhaupt eingeschränkt haben auf Punktepaare, welche neben der Bedingung der Strahlenvereinigung auch noch der obigen des constanten Sinusverhältnisses genügen. In diesem Sinne bleiben die früher (pag. 55) sogen. aplanatischen Punktepaare der Kugel, nämlich die im Scheitel, die im Mittelpunkt coincidirenden und die von letzterem in den Entfernungen $c = \frac{n}{n'} r$ und $c' = \frac{n'}{n} r$ gelegenen als solche bestehen, während z. B. die Brennpunkte des Ellipsoids, sowie der des Paraboloids und der unendlich ferne (für reflektirte Strahlen) diese Eigenschaft nicht besitzen.

Liegt der Objekt- oder Bildpunkt in unendlicher Entfernung, so wird die Bedingung des Aplanatismus, d. h. Erzeugung mässig ausgedehnter Bilder, wenn sphärische Aberration in der Axe aufgehoben ist,

$$\frac{h}{\sin u'} = const = f_0' \quad \text{bezw.} \quad \frac{h'}{\sin u} = const = f_0, \tag{4a}$$

wenn h und h' die Einfallshöhen von Strahlen bedeuten, welche parallel zur Axe einfallen bezw. austreten, u' und u die Neigungswinkel der ihnen conjugirten Strahlen, f_0 und f_0' die Brennweiten der paraxialen Strahlen. Wie man sich leicht überzeugt, ist dann die Brennweite der Partialbüschel im Meridianschnitt $f_t = f_0 / \cos u$, also variabel mit u, während dieselbe im Sagittalschnitt $f_s = f_0 = const$ ist.

Die genaue Erfüllung der Sinusbedingung ist natürlich desto kritischer, je grösser der Winkel U oder U' und damit der Spielraum der überhaupt möglichen Abweichungen des Sinusverhältnisses von der Constanz ist. Bei Mikroskopobjektiven grösserer Apertur können diese Abweichungen bis zu 50 % und selbst mehr des Normalwerthes gehen. Um ebenso viel variirt dann die Vergrösserung durch die betreffenden Zonen des Objektivs. Unter solchen Umständen ist aber das brauchbare Sehfeld fast gleich Null, die Zerstreuungskreise eines Punktes ausser der Axe bei gleichzeitiger Abbildung durch auseinanderliegende Theile der Oeffnung werden von gleicher Grössenordnung wie seine Entfernung von der Axe, d. h. wie die Bildgrösse selbst.

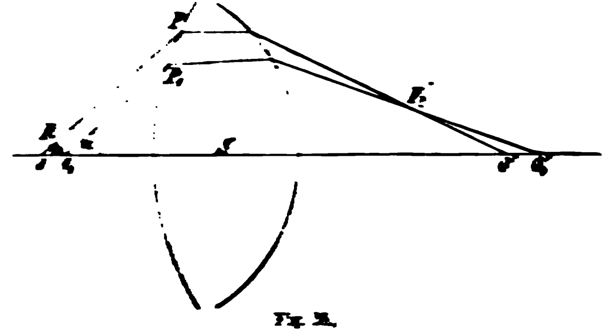
Abbe hat (l. c., pag. 310) ein frappantes experimentelles Kriterium für die

[1]) Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 420. 1873; und Rep. f. Exp. Physik 16, pag. 303. 1881.

Constanz des Sinusverhältnisses angegeben. Mittels desselben konnte er feststellen, dass in allen in Gebrauch befindlichen Mikroskopsystemen grösserer Oeffnung, woher sie auch stammen mochten, diese Bedingung sehr nahe erfüllt war, trotzdem sie damals den Optikern noch durchaus unbekannt war und diese sämmtlich ihre Systeme nur durch Tatonnement, — empirisch unter Controle des Auges — und nicht nach bewussten Regeln construirten. So unerlässlich ist ihre Erfüllung für eine befriedigende Wirkung in solchen Fällen.

Die Erfüllung der Sinusbedingung gewährleistet die Abbildung eines Paares von Flächenelementen. Ihre Erfüllung führt nicht die Abbildung ausgedehnterer Flächen herbei, wenn die Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel sehr gross sind, und sie ist im Widerspruch mit der Abbildung mehr als eines Paares von Flächenelementen an verschiedenen Stellen der Axe.

Denn was das erstere betrifft, so ist daran zu erinnern, dass wir uns von vornherein auf eine nur angenähert scharfe Abbildung beschränkt hatten, nämlich auf eine solche, bei welcher die Zerstreuungskreise unendlich klein von der ersten Ordnung gegen die Dimensionen des Bildes selbst sind. Mit wachsender Bildgrösse nehmen daher auch die Zerstreuungskreise zu und erreichen bei entsprechend grosser Oeffnung der abbildenden Büschel bald die für deutliches Sehen zulässige Grösse, auch wenn constantes Sinusverhältniss herrscht.


Fig. [illegible]

In Systemen geringerer Oeffnung kann das brauchbare Bildfeld entsprechend grösser sein.

Es ist andererseits unmöglich, dass ein System für zwei benachbarte Stellen der Axe zugleich aplanatisch sei. Hierzu müsste ja zunächst die sphärische Aberration für zwei solche Punktepaare aufgehoben sein, und diese Anforderung führt bereits auf eine Bedingung, welche der des Aplanatismus für eine Stelle der Axe widerspricht.

Zu ihrer Herleitung folgen wir dem sehr einfachen Gedankengange, mittelst dessen Hockin[1] die letztere herleitete (Fig. [illegible]). Wenn in dem Systeme S sowohl für die Punkte $O\,O'$ als $O_1 O_1'$ die sphärische Aberration aufgehoben sein soll, so muss die optische Länge der von O und O_1 unter dem beliebigen Winkel u $(< U)$ austretenden Strahlen bis O' bezw. O_1' die gleiche sein, als die der entsprechenden paraxialen Strahlen: es muss also zugleich

$$[OPO'] = [OSO'] \text{ und } [O_1P_1O_1'] = [O_1SO_1']$$

sein. Beachten wir, dass von F_1' (dem ersten) Brennpunkt des unter dem Winkel u einfallenden Parallelstrahlenbüschels OPO_1P die optischen Längen bis zu jedem dieses Büschel normal schneidenden Ebene O_1R gleich sind, so ergiebt die Zerlegung der fraglichen Lichtwege in einzelne Abschnitte und die Subtraction der beiden obigen Gleichungen von einander

$$[OR] + [FO'] - [FO_1'] = [OO_1] - [O'O_1']$$

oder, wenn $OO_1 = dx$, $O'O_1' = dx'$ gesetzt werden,

$$n\,dx \sin^2 \frac{u}{2} = n'\,dx' \sin^2 \frac{u'}{2}.$$

[1]) l. c., pag. 340.

Nun ist für die paraxialen Strahlen

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = \frac{n'}{n}\beta^2.$$

Damit also für jeden Einfallswinkel u das Verhältniss dx'/dx dasselbe, d. h. die sphärische Aberration in den beiden Punktpaaren O, O' und O_1, O_1' zugleich aufgehoben sei, muss

$$\frac{n\,sin\,(u/2)}{n'\,sin(u'/2)} = \beta_0 = const \tag{5}$$

sein; es müssen dann also die Sinus der halben Axenwinkel in constantem Verhältnisse stehen — was im Widerspruch steht mit der durch (4) ausgedrückten Bedingung.

Man kann nach den Gleichungen (2) resp. (4) und (5) berechnen, welche Aberration in einem aplanatischen System — unabhängig von jeder weiteren Annahme über die Zusammensetzung und sonstigen Eigenschaften desselben — eintritt, wenn der Objektpunkt auf der Axe verschoben wird und andererseits, wie die Lateral-Vergrösserung eines für zwei benachbarte Axenpunkte aberrationsfreien Systems in beiden Hauptschnitten nach dem Rande hin variirt.

Ein solche Untersuchung ergiebt für den ersteren Fall, also für ein System, welches der Gleichung (4) genügt, dass, wenn der Objektpunkt auf der Axe im Sinne der Lichtbewegung verschoben wird, dann in dem conjugirten Bildpunkte stets sphärische Uebercorrection eintritt, wofern der Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel auf der Objektseite der grössere ist — und umgekehrt. Bezeichnet dx_0' die Verschiebung des Bildpunktes, welche der Verschiebung dx des Objektpunktes für paraxiale Strahlen entspricht, dx' dieselbe Verschiebung für Strahlen der Neigung u zur Axe, so findet man

$$dx' = dx_0'\left(\frac{cos\,u'}{cos\,u} - 1\right).$$

Für grosse u und kleine u' kann daher dx' ein Vielfaches von dx_0' werden und es ist bei Werthen von $u > 57°$ der Zerstreuungskreis der so eingetretenen Aberration am Orte des Bildes der paraxialen Strahlen sogar grösser als der Zerstreuungskreis, welcher aus der blossen Focusdifferenz entspringt, wenn das Objekt im aplanatischen Objektpunkt verbleibt, das Bild aber in einer anderen als der conjugirten Ebene aufgefangen wird oder wenn das Objekt um dx verschoben und sein Bild in der ursprünglichen Ebene beobachtet wird.

Diese Erwägungen sind namentlich für die Theorie des Mikroskops von Belang, dessen stärkere Systeme in Folge dieser Verhältnisse nur bei einer bestimmten Bildentfernung (»Tubuslänge«) gute Bilder geben.

In einem Systeme andererseits, welches für zwei benachbarte Paare von Axenpunkten aberrationsfrei ist, welches also der Gleichung (5) genügt, wächst die Lateralvergrösserung eines zur Axe senkrechten Linienelements mit dem Neigungswinkel u des einfallenden Hauptstrahls im Sagittalschnitt nach der ebenfalls unschwer abzuleitenden Gleichung

$$\beta_s = \beta_0\,\frac{cos\,(u/2)}{cos\,(u'/2)}$$

und in der Einfallsebene, im Meridionalschnitt, nach der Gleichung

$$\beta_t = \beta_0\,\frac{cos\,(u'/2)}{cos\,(u/2)}\cdot\frac{cos\,u}{cos\,u'}.$$

Für den beim Mikroskop vorliegenden Fall, dass u' klein gegen u (β sehr gross) ist, wird annähernd

$$\beta_s = \beta_0\,cos\,(u/2); \qquad \beta_t = \beta_0\,\frac{cos\,u}{cos\,(u/2)}$$

und

$$\frac{\beta}{\beta_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{cos\,u} + 1\right).$$

Die Vergrösserung nimmt dann in beiden Hauptschnitten mit wachsendem u ab, jedoch in ungleichem Grade, so dass β_t im Verhältniss zu β_s immer kleiner wird. Einem Punkt der Objektebene, welcher in der seitlichen Entfernung dy von einem der aberrationsfreien Axen-

punkte sich befindet, entspricht in der Bildebene der paraxialen Strahlen eine Ellipse, deren Dimensionen bei endlicher Grösse von u auch in endlichem Verhältniss zu den Dimensionen des von den paraxialen Strahlen entworfenen Bildes selbst ($dy' = \beta_0 dy$) stehen. Die Halbmesser dieser Zerstreuungsellipse ρ_s, ρ_t stehen zu der Bildgrösse z. B. für $u = 60°$ in dem Verhältniss

$$\frac{\rho_t}{dy'} = 0{\cdot}42 \qquad \frac{\rho_s}{dy'} = 0{\cdot}13.$$

Bei einem Oeffnungswinkel von 0·1 hingegen (Fernrohre) ist die Differenz der Vergrösserungen auf dem Axen- und Randstrahl nur 0·1 %.

Das Resultat dieser Betrachtungen gipfelt also darin, dass gänzlich unabhängig von der Zusammensetzung eines optischen Systems und kraft der allgemeinen Gesetze, denen jede mit den Mitteln der Dioptrik hervorgebrachte Strahlenänderung und somit auch Strahlenvereinigung unterworfen ist, mit beliebig weit geöffneten Büscheln, entweder nur ein zur Axe senkrechtes Flächenelement oder ein unendlich kleines Stück der Axe selbst in ein entsprechendes scharf abgebildet werden kann. Die eine Anforderung steht im Widerspruch mit der anderen, und beide stehen im Widerspruch mit den Bedingungen collinearer Abbildung endlicher Räume bei endlichen Divergenzwinkeln. Denn für diese hatten wir gefunden (pag. 41)

$$\frac{\tang u}{\tang u'} = \frac{n'y'}{ny} = const.$$

Diese letztere Beziehung lässt sich andererseits als die geometrisch nothwendige Bedingung für die Abbildung auch nur zweier endlicher Ebenen in zwei entsprechende unter endlichen Divergenzwinkeln nachweisen, und es lässt sich dann weiter zeigen, dass wenn diese gegeben ist, mit Nothwendigkeit die Abbildung des ganzen unendlichen Raumes in einen entsprechenden, nach den Gesetzen der Collinearität folgt. Mit den Mitteln der Dioptrik jedoch ist, wie wir eben gesehen haben, die scharfe Abbildung auch nur eines unendlichen kleinen nach drei Dimensionen ausgedehnten Objektraumstücks unter grossen Divergenzwinkeln eine Unmöglichkeit.

Es bleibt uns der andere Theil des hier vorliegenden Problems zu behandeln übrig, nämlich wie weit es möglich ist, die von selbst gegebenen Grenzen der Abbildung dahin zu erweitern, dass mittelst enger (elementarer) Büschel endliche Flächen- oder Raumtheile abgebildet werden.

III. Abbildung ausgedehnter Flächen durch unendlich enge Büschel.

In Bezug auf diese fehlt es uns an Sätzen von gleicher Allgemeinheit als die Sinusbedingung für den vorher betrachteten Fall einer ist. Wir können daher nicht viel mehr thun als die Bedingungen zu formuliren, die man an eine solche Abbildung stellen muss.

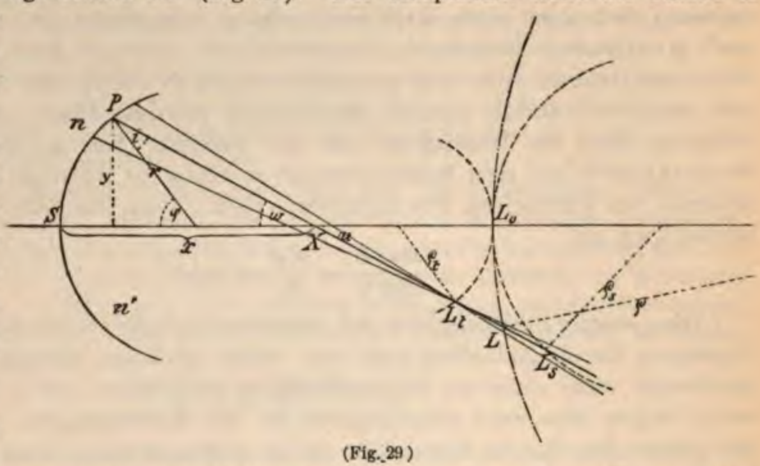
1) Astigmatismus. In erster Linie ist erforderlich, dass in den abbildenden Büscheln, auch wenn dieselben als unendlich dünne angenommen werden, der Astigmatismus gehoben sei. Andernfalls findet ja eine Abbildung, d. h. ein punktweises Entsprechen von Objekt- und Bildpunkten überhaupt nicht statt, sondern jedem Objektpunkte entsprechen zwei getrennte, zu einander und zur Büschelaxe senkrechte Linien, deren Grösse der Oeffnung des nach dem Bilde zu convergirenden Büschels und ihrer gegenseitigen Entfernung proportional ist.

Eine allgemeingiltige Bedingung für die Aufhebung des Astigmatismus in Büscheln, die von den verschiedenen Punkten eines endlichen Objektes ausgehen, ist meines Wissens noch nicht mathematisch formulirt worden. Praktisch

ist dieser Astigmatismus natürlich in allen Systemen grösseren Sehfeldes (Ocularen, Lupen, photographischen Objektiven) mehr oder minder gehoben — meist unwillkürlich, da die Combination von Brechungen verschiedenen Charakters, wie sie zur Erfüllung irgend welcher anderer an das Linsensystem gestellter Anforderungen nöthig und üblich ist, von selbst eine theilweise Compensation auch dieses Fehlers mit sich bringt.

Nur für die Aufhebung des Astigmatismus in zur Axe des Systems sehr schwach geneigten Büscheln lässt sich eine (algebraische) Bedingungs-Gleichung herleiten.

Ein Büschel von dem halben Oeffnungswinkel u falle gegen die Axe geneigt auf eine beliebige Fläche SP (Fig. 29). Der Hauptstrahl treffe die Fläche in der Höhe y über der Axe, letztere in der Entfernung $SX = x$ vom Scheitel, und unter dem Winkel w. Die halbe lineare Oeffnung des Büschels senkrecht zur Zeichnungsebene sei am Schnittpunkt



(Fig. 29)

mit der brechenden Fläche $= h$, die Schnittweiten der sagittalen und tangentialen Büschel $= s$, bezw. t. Nach der Brechung seien die durch sie veränderten Grössen wie früher durch oberen Index unterschieden. Wir wollen dann als Maass für die durch den Astigmatismus hervorgerufene Bildverschlechterung den Durchmesser des zwischen den beiden Bildlinien gelegenen Zerstreuungskreises nehmen. Dieser liegt von den beiden Bildlinien bei L_s und L_t in Entfernungen, die sich verhalten wie die entsprechenden Schnittweiten $PL_s = s$ und $PL_t = t$ selber. Sein Radius $\mathfrak{r}$ berechnet sich hiernach zu

$$\mathfrak{r} = h \cdot \frac{1/t - 1/s}{1/t + 1/s}.$$

Da bei geringer Neigung des Büschels zur Axe des Systems auch der Astigmatismus nur gering sein kann, wollen wir für $\frac{1}{t} + \frac{1}{s}$ den Mittelwerth $\frac{2}{s}$ setzen, so dass der Durchmesser des Zerstreuungskreises

$$2\mathfrak{r} = \mathfrak{d} = h\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right)s$$

wird.

Ist u der (unendlich kleine) halbe Oeffnungswinkel des Büschels, also $u = h/s$, so wird durch Multiplikation mit nu beiderseits

$$nu \cdot \mathfrak{d} = h^2 n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right),$$

daher

$$\Delta(nu \cdot \mathfrak{d}) = h^2 \Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right).$$

Bezeichnet wieder $(\mathfrak{d}_0)_k$ bezw. $(\mathfrak{d}_0')_k$ den Durchmesser des Kreises im Objekt, dessen Bild gemäss den Fundamentalformeln nach Ort und Grösse der thatsächliche Zerstreuungskreis vor bezw. nach der Brechung des Büschels an der betrachteten ($k$ten) Fläche des Systems ist, so haben wir wie früher (pag. 90)

$$n_k' u_k' \mathfrak{d}_k' = n_1 u_1 (\mathfrak{d}_0)_k'$$

und

$$n_k u_k \mathfrak{d}_k = n_1 u_1 (\mathfrak{d}_0)_k,$$

also

$$\Delta(\mathfrak{d}_0) = \frac{h^2}{n_1 u_1} \Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right). \tag{1}$$

Den rechter Hand stehenden zweiten Faktor fanden wir aber früher (pag. 88) streng

$$\Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = (n \sin i)^2 \Delta \left(\frac{1}{nt}\right).$$

In der hier berücksichtigten Näherung kann auf der rechten Seite

$$\sin i = i = w - \varphi = y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)$$

und t kann gleich s gesetzt werden, wo unter s auch die Schnittweite SL_0 eines von dem Axenpunkte desselben ursprünglichen Objekts ausgehenden paraxialen Büschels verstanden werden darf. Wir erhalten demnach

$$\Delta(\mathfrak{d}_0)_k = \frac{h_k^2}{n_1 u_1} y_k^2 \left[n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)\right]_k^2 \Delta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \tag{2}$$

und wenn wir wie früher mit h_1^2, und y_1^2, erweitern und die Invariante der Brechung für die Axenschnittpunkte des Hauptstrahls mit Q_x bezeichnen, also

$$Q_x = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'}\right),$$

so wird schliesslich

$$\Delta(\mathfrak{d}_0)_k = \frac{h_1^2 y_1^2}{n_1 u_1} \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 Q_x^2 \, \Delta \left(\frac{1}{ns}\right)_k. \tag{2a}$$

Hierin ist $\frac{y_k}{y_1}$ in ganz derselben Weise aus den $x_1 \ldots x_k'$ zu berechnen, wie $\frac{h_k}{h_1}$ aus den $s_1 \ldots s_k'$ (pag. 90).

Bei unendlich entfernten Objekten und $n_1 = 1$ ist der angulare Werth des auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreises

$$\Delta(\delta_0)_k = h_1 y_1^2 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 Q_k^2 \, \Delta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \tag{2b}$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\mathfrak{d}_0)_k = 0 \text{ bezw. } \sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\delta_0)_k = 0$$

wird die Bedingung für die Beseitigung des Astigmatismus in einem aus p Flächen bestehenden optischen System.

Ist der Astigmatismus in dieser Weise nicht nur für die der Axe nahen Theile des Objekts sondern für dessen ganze Ausdehnung gehoben, so ist damit eine Abbildung desselben innerhalb der hier gewählten Beschränkuug (nämlich auf enge Büschel) erreicht. Doch pflegt man an diese Abbildung noch zwei weitere Forderungen zu stellen, welche allerdings keine unbedingten sind und auch nicht immer gleich stark urgirt werden, sondern sich zum Theil nach dem Zwecke des Instruments richten, zum Theil bloss der Bequemlichkeit dienen.

Man wünscht nämlich oft noch

2) dass einem ebenen Objekte ein ebenes Bild entspreche und
3) dass das Bild in allen seinen Theilen dem Objekte ähnlich sei.

2) Wölbung des Bildes. Bedingungen der (annähernden) Bildebenung. Das durch die Brechung unendlich dünner Büschel in einem beliebigen optischen System hervorgebrachte Bild einer endlichen Ebene kann eine irgendwie gestaltete Rotationsfläche sein mit gleicher Axe als das System selbst und zwar entspricht, wenn der Astigmatismus in den wirksamen Büscheln nicht aufgehoben ist, den sagittalen und den tangentialen ebenen Partialbüscheln je eine besondere Bildfläche. Im Scheitel berühren beide Flächen einander und die Ebene des idealen Bildes. Von den Krümmungen, welche die Bildflächen in diesem Scheitel besitzen, lässt sich eine einfache Beziehung nachweisen.

Ein gegebenes System entwerfe von einer zur Axe senkrechten Ebene im Objektraume ein Bild, dessen Krümmungsradius im Scheitel $= \rho_0'$ sei. Analog sei ρ_0 der Krümmungsradius der Objektfläche, deren an der gleichen Stelle der Axe von demselben System entworfenes Bild eine Ebene ist, d. h. wenigstens im Scheitel die Krümmung Null hat. ρ und ρ' seien die Krümmungsradien eines beliebigen anderen Paares conjugirter Flächen, deren Scheitel an den gleichen Stellen der Axe liegen. Dann gilt

$$\Delta\left(\frac{1}{n\rho}\right) = \frac{1}{n'\rho'} - \frac{1}{n\rho} = \frac{1}{n'\rho_0'} = -\frac{1}{n\rho_0}, \tag{3}$$

wenn n und n' die Brechungsindices des Objekt- und Bildraumes sind.

Der Beweis ergiebt sich daraus, dass der Abstand einer Objekt- oder Bildfläche von der sie berührenden Ebene an irgend einer Stelle bis auf Glieder, die von den vierten und höheren Potenzen dieses Abstandes abhängen, gleich ist dem halben Quadrate der Entfernung dieser Stelle von der Axe dividirt durch den Krümmungsradius der betreffenden Fläche. Andererseits sind die der Axe parallelen Tangentialabstände zusammengehöriger Flächenpaare dioptrisch einander conjugirt gemäss der Formel für die Tiefenvergrösserung $\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2$, worin α das Verhältniss der eben genannten Axenentfernungen ist.

Es ist somit die Grösse $\pm\frac{1}{n\rho_0}$ oder $\mp\frac{1}{n'\rho_0'}$ das richtige Maass für das was man »Bildkrümmungsvermögen« eines Systems in Bezug auf zwei conjugirte Axenpunkte nennen könnte.

Jede Ebene, also auch diejenige, welche die Bildflächen im Scheitel berührt, schneidet aus den abbildenden unendlich dünnen Strahlenbüscheln, wie wir früher gesehen haben, Ellipsen heraus, deren Axen aber bei geringen Neigungswinkeln der Büschel als gleich gross angesehen werden können. Wenn man das Bild auf jener Ebene auffinge, so würden diese Schnitte die Zerstreuungskreise sein, als welche in Folge der Bildkrümmung die Bilder ausseraxialer Punkte in ihr erscheinen. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass die Zunahmen, welche der Durchmesser dieser Zerstreuungskreise bei einer Brechung erfährt, wenn man sie wie früher (pag. 90) auf die Objektseite zurückbezieht, einerseits proportional sind dem Bildkrümmungsvermögen und ausserdem proportional der numerischen Apertur und dem Quadrate der linearen Oeffnung h_0 des einfallenden Büschels. Nämlich

$$\Delta(\sigma_0)_k = n_0 u_0 h_0^2 \Delta\left(\frac{1}{n\rho_0}\right)_k = -n_0 u_0 h_0^2 \left(\frac{1}{n'\rho_0'}\right)_k, \tag{4}$$

wenn u_0 die halbe angulare Oeffnung des einfallenden Büschels ist.

Was nun endlich den Werth dieses Bildkrümmungsvermögens anbetrifft, so hängt derselbe von den Elementen des Linsensystems in folgender Weise ab (vergl. Fig. 29).

Wenn der Radius der brechenden Fläche, wie früher mit r, die Indices der an sie grenzenden Medien mit n und n' bezeichnet werden, wenn ferner die Axen der einfallenden Büschel die Axe des Systems in der Entfernung x vom Scheitel schneiden, die der gebrochenen in der Entfernung x' welche letztere mit x natürlich in der Beziehung steht, dass

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_0}\right)=Q_x=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_0'}\right),$$

wenn endlich die Scheitel der Objektfläche von dem der brechenden um s_0, der der Bildfläche von derselben um s_0' entfernt ist, wobei wieder

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s_0}\right)=Q_s=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s_0'}\right),$$

so ist die durch die betreffende Brechung bewirkte Krümmungszunahme für die im Aequatorealschnitt gelegenen Strahlen

$$\Delta\left(\frac{1}{n\rho_s}\right)=\frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{Q_x}{Q_x-Q_s}\right)^2\Delta\left(\frac{1}{ns_0}\right); \tag{5}$$

für die im Meridanschnitt gelegenen

$$\Delta\left(\frac{1}{n\rho_t}\right)=\frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{n}\right)-3\left(\frac{Q_x}{Q_x-Q_s}\right)^2\Delta\left(\frac{1}{n_{s0}}\right). \tag{6}$$

Die Bildkrümmung hängt also ausser von den die Brechung selbst bedingenden Elementen n, n', r, s noch wesentlich mit von der Lage des Punktes ab, in welchem sich die Hauptstrahlen der abbildenden Büschel kreuzen.

Zur Ableitung dieser Gleichungen kann man ebenso verfahren, wie wir oben bei der Betrachtung der sphärischen Aberration (pag. 86 ff.) ausführlich auseinandergesetzt haben. Man entwickelt die Werthe der beiden Abschnitte in die ein Hauptstrahl s durch die Axe des Systems getheilt wird, nach Potenzen der Kugelöffnung φ und zerlegt dann die Ausdrücke für die Invarianten der Brechung schiefer sagittaler bezw. tangentialer Büschel nämlich

$$Q_s=\frac{n}{s}-\frac{n\cos i}{r}=\frac{n'}{s'}-\frac{n'\cos i'}{r} \text{ (pag. 71)}$$

und

$$Q_t=\frac{n\cos^2 i}{t}-\frac{n\cos i}{r}=\frac{n'\cos^2 i'}{t'}-\frac{n'\cos i'}{r} \text{ (pag. 73)}$$

in den constanten und den von φ^2 abhängigen Theil unter steter Vernachlässigung aller von noch höheren Potenzen von φ abhängigen Glieder. Die Gleichsetzung der Factoren von φ^2 führt nach einigen Reductionen auf die obigen Gleichungen.[1]) Der Vergleich der Formeln (5) und (6) — welche gemäss dem oben angeführten mit (4) zu combiniren sind — mit denjenigen, welche durch die sphärische Aberration in der Axe hervorgerufene Verundeutlichung des Objekts angeben, zeigt den nahen Zusammenhang beider Grössen. (Die pag. 90/91 mit Q_k bezeichnete Grösse ist der Werth, den die hier mit Q_s bezeichnete an der $k$ten Fläche hat.)

Die Bedingungen dafür, dass ein System centrirter brechender Flächen von einem in gegebener Lage befindlichen ebenen Objekt mittelst Strahlenbüschel beider Art, deren Axen sich an gegebener Stelle kreuzen, ein in erster Näherung, d. h. im Scheitel, ebenes (und damit zugleich anastigmatisches) Bild entwerfe, zerfällt also analytisch in die beiden Gleichungen

---

[1]) Zu denselben gelangte ZINKEN-SOMMER, Unters. über die Dioptrik der Linsen-Systeme. Braunschweig 1870 pag. 51 ff., auf anderem Wege, nachdem er schon vorher (POGG. Ann. 122, pag. 563. 1864) die für den ersten Hauptschnitt giltige Gleichung abgeleitet und die beschränkte Giltigkeit der von PETZVAL als allgemein hingestellten erwiesen hatte.

$$\sum \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \tag{5a}$$

und

$$\sum \left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_x}\right)^2 \Delta \left(\frac{1}{ns}\right) = 0, \tag{6a}$$

wo die Summation über alle brechenden Flächen zu erstrecken ist[1]).

Bei einem System in Contakt befindlicher Linsen von kleiner, zu vernachlässigender Dicke (vergl. pag. 93), in deren gemeinsamem Scheitel sich die Hauptstrahlen der wirksamen Büschel kreuzen — wie ein solches in erster Näherung durch das Objektiv eines astronomischen Fernrohrs repräsentirt wird — werden alle $x = 0$, der Ausdruck $\frac{Q_x}{Q_x - Q_s} = 1$, demnach die Bedingungen der Ebenheit

$$\sum \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \tag{5*}$$

und

$$\sum \Delta \left(\frac{1}{ns}\right) = 0. \tag{6*}$$

Der Ausdruck $\Delta \left(\frac{1}{ns}\right)$ lässt sich transformiren in

$$\Delta \left(\frac{1}{ns}\right) = \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) - Q_s \Delta \left(\frac{1}{n^2}\right);$$

Gleichung (6*) geht daher in Verbindung mit (5*) über in

$$\sum Q_s \Delta \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0. \tag{6*}$$

Denkt man sich, wie pag. 109, die Linsen alle in Luft befindlich und werden die Reciproken ihrer Brennweiten wieder mit φ, die Brechungsindices der Linsensubstanzen mit n bezeichnet, so lassen sich die Gleichungen (5*) und (6*) weiter transformiren in

$$\sum \left(\frac{1}{n} \varphi\right) = 0 \quad \text{und} \quad \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right) \varphi = 0, \tag{5**}$$

welche letztere in Verbindung mit (5**) schliesslich in

$$\sum \varphi = \Phi = 0 \tag{6**}$$

übergeht (wo Φ die Gesammtstärke des Systems bezeichnet).

Die letztere zeigt, dass unter den angenommenen Verhältnissen die Ebenung des Bildes sich nur bei einem, wie eine Planparallelplatte wirkenden System von der Brennweite ∞ erreichen lässt.

Der Betrag der Krümmung des von den Sagittalstrahlen herrührenden Bildes eines ebenen Objekts ist bei einem solchen System in Contakt befindlicher dünner Linsen

$$\rho_s' = \sum \Delta (\rho_s') = - \sum \frac{n+1}{n} \frac{1}{f} = - \sum \frac{n+1}{n} \varphi, \tag{7}$$

in dem von den Tangentialstrahlen herrührenden Bilde

$$\rho_t' = \sum \Delta (\rho_t) = - \sum \frac{3n+1}{n} \frac{1}{f} = - \sum \frac{3n+1}{n} \varphi, \tag{8}$$

also beide unabhängig vom Orte des Objekts und Bildes.

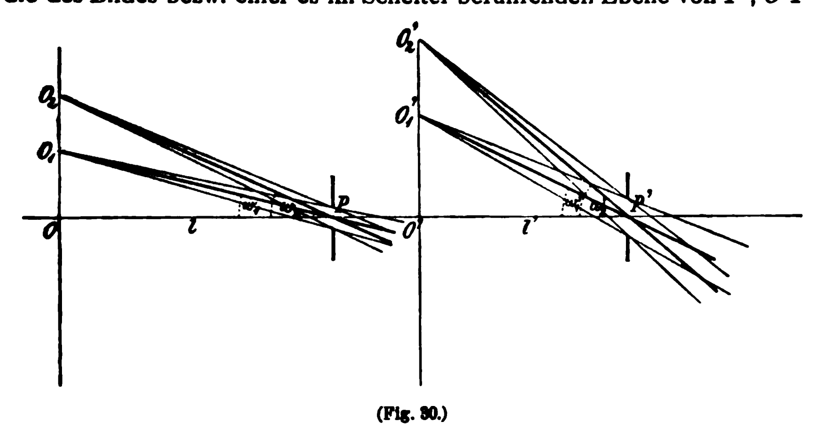
3) Verzerrung (Distortion) des Bildes. Bedingung der Orthoskopie. Dafür, ob das Bild eines Objektes diesem in allen seinen Theilen ähnlich sei,

---

[1]) J. PETZVAL, Bericht über opt. Unters., Sitzber. Wien. Akad. 24, pag. 97. 1857, glaubte in Gleichung (5a) allein die nöthige Bedingung gefunden zu haben. S. vor. Anm.

lässt sich ein Kriterium angeben, welches — wie der Sinussatz ohne Einschränkung mit Bezug auf die Grösse der wirksamen Büschelöffnungen — dasselbe in Bezug auf die Ausdehnung des Bildes und Objektes, welches also in voller Allgemeinheit giltig ist (Fig. 30).

Nehmen wir wieder den Fall an, der, wie wir später sehen werden fast in allen Arten optischer Instrumente verwirklicht ist, — dass die Hauptstrahlen (Axen) der vom Objekt $O\,O_1\,O_2$ ausgehenden Strahlenkegel sich in einem Punkte P der Axe des Systems schneiden, die der bildformirenden Büschel ebenfalls in einem solchen Punkte P'. Die Entfernung der Objektebene von P, OP sei $=l$, die des Bildes bezw. einer es im Scheitel berührenden Ebene von P', $O'P'=l'$.



(Fig. 30.)

Sind dann $O_1 O_2$ zwei, von der Axe verschieden weit entfernte Punkte des Objekts, $O_1' O_2'$ die entsprechenden Punkte des Bildes bezw. deren Central-Projektionen von P' auf eine das Bild in O' berührende Ebene, dann ist

$$O\,O_1 = y_1 = l\,tg\,w_1 \qquad O'\,O_1' = y_1' = l'\,tg\,w_1'$$
$$O\,O_2 = y_2 = l\,tg\,w_2 \qquad O'\,O_2' = y_2' = l'\,tg\,w_2'.$$

Damit nun die Vergrösserung in den beiden betrachteten Ebenen constant, d. h. unabhängig von der Bild- und Objektgrösse selbst seien, muss

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2'} = \text{etc.}$$

sein; also

$$\frac{tg\,w_1'}{tg\,w_1} = \frac{tg\,w_2'}{tg\,w_2} = \text{etc.} \ldots = const., \tag{9}$$

d. h. das Verhältniss der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche entsprechende Hauptstrahlen im Bild und Objekt mit der Axe des Systems einschliessen, muss ein constantes sein. Ist dies der Fall, so heissen P und P', die Kreuzungspunkte der betreffenden Hauptstrahlen, die »orthoskopischen Punkte« des Systems.

Da aber für sehr kleine Winkel w, für welche die Bedingungen collinearer Abbildung erfüllt sind, nothwendig

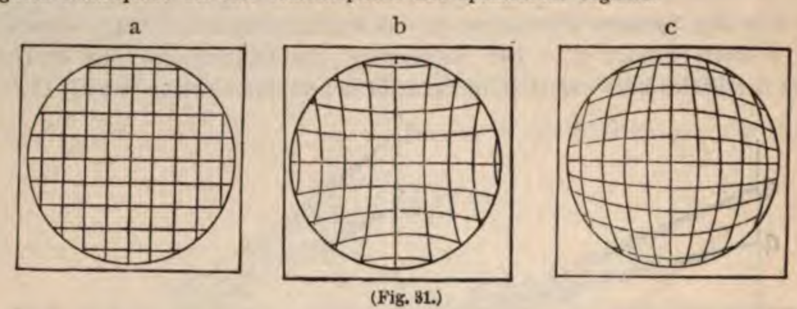
$$\frac{tg\,w_0'}{tg\,w_0} = \Gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B},$$

wo Γ das in den Punkten P und P' bestehende Convergenz-, B das in ihnen bestehende lineare Vergrösserungsverhältniss bezeichnet, so ist auch allgemein in den Punkten P, P'

$$\frac{tg\,w_k'}{tg\,w_k} = \frac{n}{n'}\,\frac{1}{B}. \tag{9a}$$

Wenn die Vergrösserung eines Instruments im ganzen Sehfeld constant ist so erscheint ein quadratisches Netz wie Fig. 31a. Wächst die Vergrösserung nach dem Rande des Sehfelds, so wird das Aussehen des Bildes das von Fig. 31b, nimmt sie mit wachsendem Parameter ab, so wird es das von Fig. 31c.

Wie hieraus ersichtlich, können orthoskopische Punkte niemals zugleich »aplanatische« in dem hier angewandten Sinne sein. Bei der allgemeinen collinearen Abbildung dagegen sind alle conjugirten Punktepaare der Axe orthoskopische und aplanatische zugleich.



(Fig. 31.)

Auch für die Bedingung der Orthoskopie lassen sich Näherungsformeln angeben, welche für die nahe der Axe gelegenen Theile des Objektes und Bildes gelten und die Abweichung vom orthoskopischen Verhältniss, den »Faktor der Anorthoskopie« (Distortion) im Anschluss an die Durchrechnung eines paraxialen Strahles bequem zu berechnen gestatten. Doch gilt für die Distortion ebensowohl als für die Bildkrümmung eine Bemerkung analog zu derjenigen, welche wir bezüglich der sphärischen Aberration für Axenpunkte zu machen hatten (pag. 96): Wenn es sich darum handelt, Bilder von merklich grosser Ausdehnung zu erzeugen, so ist es von geringem Werthe, die Krümmung oder Distortion derselben nahe der Axe, in der Mitte des Sehfeldes, aufzuheben. Denn da die Entfernung einer Kugel von der sie berührenden Ebene proportional ist dem Quadrat des Abstandes von der Berührungsstelle, und da ebenso Disproportionalitäten der Vergrösserung, wenn ihr Grad der gleiche bleibt, desto mehr in Erscheinung treten, je weiter von der Mitte des Bildes man dasselbe betrachtet, so muss man vielmehr suchen, beide Arten von Fehlern, — wenn man sie nicht ganz heben kann — so über das ganze Bild zu vertheilen, dass sie möglichst wenig störend wirken, d. h. auffallen. Es kann dann sehr wohl eintreten, dass die gemäss den oben angegebenen Formeln berechnete Krümmung des Bildes oder die Disproportionalität der Vergrösserung nahe der Axe relativ gross ist, aber aus dem angegebenen Umstande trotzdem wenig erkennbar wird zu Gunsten entfernterer Stellen des Bildes, wo ein an sich geringer Grad von Krümmung oder Distortion auf die grösseren Bildmasse wirkend und dadurch gewissermaassen mit einem grossen Faktor multiplicirt, sehr auffallend in die Erscheinung treten würde.

Ein solches systematisches Ausgleichungsverfahren, ähnlich dem von Gauss bei der sphärischen Aberration angewandten, wurde von Schleiermacher[1]) für die ersten Glieder der Reihenentwickelung aller Arten von Aberrationen durchgeführt. In der Praxis ist es jedoch einfacher und sicherer, auf die trigonometrische Durchrechnung der wirksamen Büschel zu recurriren.

Bei Instrumenten, die nur zu Messungen dienen, ist es noch vortheilhafter, die vorhandenen Abweichungen von der richtigen Orthoskopie möglichst regelmässig zu gestalten und rechnerisch oder am fertigen Instrument empirisch

[1]) Analyt. Optik, Darmstadt 1842.

genau festzustellen, damit man sie bei den Messungen bequem in Rechnung ziehen könne.

IV. Abbildung ausgedehnter Objekte durch Büschel endlicher Oeffnung.

Wir haben bisher das eine Mal diejenige Erweiterung der Abbildungsgrenzen betrachtet, welche durch Zusammenfügen der Partialabbildungen mehrerer von demselben Punkte der Axe ausgehender und wieder nach einem Punkte der Axe convergirender Elementarbüschel erreichbar ist. Die andere entsprechende Aufgabe war die, die Abbildungen solcher Elementarbüschel zusammenzusetzen, deren Hauptstrahlen sich zwar ebenfalls vor und nach der Brechung durch das System in einem Punkte seiner Axe schneiden, deren Spitzen aber auf einer von diesen Kreuzungspunkten um einen beliebigen endlichen Abstand entfernten Fläche liegen. Im ersteren Falle handelte es sich darum, die Abbildung eines — im Grenzfalle unendlich kleinen — Flächenelements durch beliebig weitgeöffnete Büschel herbeizuführen; im zweiten Falle wurden die Bedingungen gesucht, unter welchen die Abbildung eines endlichen Flächenstücks möglich ist, hier aber durch Büschel, die — *in thesi* — ihrerseits unendlich eng sind.

Dem praktischen Bedürfniss bei der Construction optischer Instrumente würde nun durch eine, an sich noch so vollständige Lösung weder des einen noch des andern Problems genügt werden. In der Wirklichkeit könnte man natürlich weder mit den — durch noch so weite Büschel vermittelten — Bildern von wirklichen Flächenelementen etwas anfangen, noch mit Bildern, die beliebig ausgedehnt aber durch unendlich enge Strahlenbüschel hervorgebracht wären. Es handelt sich hier vielmehr immer darum, Bilder endlicher Objekte durch Büschel endlicher Oeffnung zu erzielen und nur der Nachdruck, welcher auf den einen oder andern dieser beiden Faktoren gelegt wird, variirt innerhalb sehr weiter Grenzen von Fall zu Fall, je nach dem Zwecke und Charakter des Instruments von den Mikroskopobjektiven hoher Apertur auf der einen Seite durch die photographischen und Fernrohrobjektive hindurch bis zu den Lupen und Ocularen auf der andern Seite.

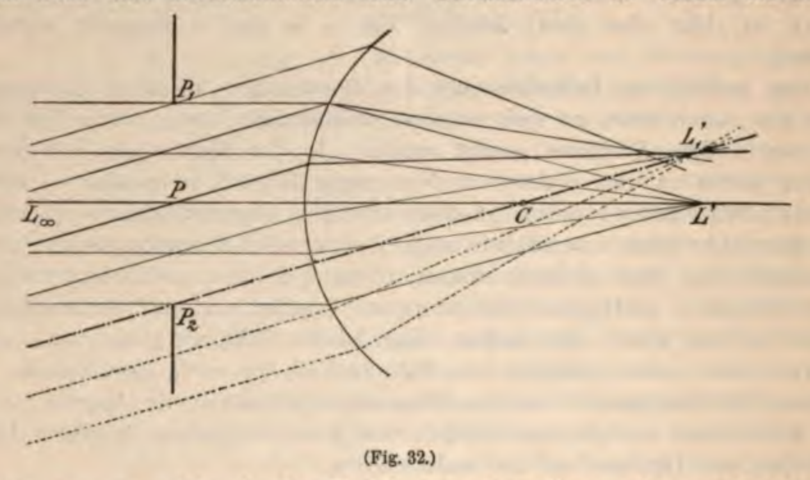
Hier finden nun von vornherein zunächst ähnliche Betrachtungen Anwendung wie die, mit welchen wir am Eingange dieses Abschnitts (pag. 82. ff.) die von selbst stattfindende Erweiterung der Abbildungsgrenzen nach beiden in Betracht kommenden Richtungen hin erläutert haben. Von selbst wird in Folge der dort aufgeführten beiden Momente — physiologische Unempfindlichkeit des beobachtenden Auges gegen mangelhafte Bildschärfe und Wellennatur des Lichtes — die genügend scharf abgebildete Fläche stets eine, wenn auch kleine, so doch endliche Ausdehnung haben, falls die Sinusbedingung erfüllt ist, und ohne weiteres wird man die Oeffnung der eine grössere Fläche abbildenden Büschel, wenn auch sehr eng, so doch endlich wählen dürfen, wenn die Bedingungen für die Abbildung derselben Fläche durch unendlich enge Büschel erfüllt sind; von selbst endlich wird man im letzteren Falle auch noch die jener ursprünglichen Fläche auf der Axe benachbarten hinreichend scharf abgebildet finden.

Um noch weiter zu gehen, um die Abbildung etwas grösserer Flächen durch relativ weite Büschel zu erzielen — wie sie z. B. Zweck und Aufgabe mehrerer zur Photographie dienender Systeme ist — ist man wieder fast ganz auf den Weg empirischen Suchens der hierzu geeigneten Linsencombinationen angewiesen, sei es, dass dieses auf dem Papiere, durch trigonometrische Verfolgung der wirksamen Strahlengruppen, sei es, dass es experimentell, durch systematische

Beobachtung des Endeffekts geschieht, den wirklich ausgeführte Versuchslinsen verschiedener Construction ergeben. Nur noch einen Schritt weiter hat die mathematische Theorie auf diesem Wege geführt.

Sphärische Aberration 1. Ordnung in schiefen Büscheln (Coma).

Vergegenwärtigt man sich nämlich die Hinweise, welche aus den oben entwickelten Eigenschaften der Aberrationen bereits zu entnehmen sind, so ist folgendes einzusehen: wenn in einem, von einem Axenpunkte aus divergirenden Büschel die dem Quadrat der Oeffnung proportionale sphärische Aberration aufgehoben ist, so wird ein zur Axe schwach geneigt einfallendes Büschel im allgemeinen keinen gleich scharfen Bildpunkt ergeben. Es wird ein solches Büschel, wie früher bereits wiederholt hervorgehoben, zunächst astigmatisch sein, selbst wenn es unendlich eng ist. Wenn aber auch der Astigmatismus gemäss Formel (2) pag. 107, aufgehoben wäre, so würde die Abbildung des ein wenig seitlich von der Axe gelegenen Punktes mittelst eines Büschels von der Oeffnung des axialen doch eine unvollkommene sein. Unterscheiden wir wieder die beiden



(Fig. 32.)

Strahlengruppen, welche in der Einfallsebene des (die Axe kreuzenden) Hauptstrahls und senkrecht zu ihr verlaufen. Für die letzteren wird bei geringer Neigung des Hauptstrahls die Strahlenvereinigung annähernd von derselben Vollkommenheit sein wie im Axenpunkte, weil sie im allgemeinen den gleichen Charakter hat wie die dort stattfindende (Symmetrie zum Hauptstrahl, vergl. das pag. 84 unten gesagte). Im ersten Hauptschnitt hingegen wird sich schon bei relativ geringer Neigung des Hauptstrahls die Deformation des Büschels bemerklich machen, welche der von vornherein niedrigeren Ordnung der Strahlenvereinigung in diesem Schnitte (vergl. pag. 73) entspricht.

Sei, um dies näher zu erläutern, L' (Fig. 32) das Bild eines Axenpunktes, erzeugt durch ein System, in welchem die Aberration 2. Ordnung für diesen Axenpunkt aufgehoben ist. Ganz grob schematisch können wir uns dies so vorstellen, als würden dann Strahlen, die von dem Objektpunkt innerhalb eines gewissen Winkelraumes ausgehen oder deren Büschelschnitt — bei unendlich fernem Objekt — unter einem gewissen Betrage bleibt, in L' zur strengen Vereinigung gebracht; in den diesen Winkelraum überschreitenden aber wäre diejenige sphärische Aberration vorhanden, welche den höheren Potenzen der Oeffnung entspricht. An irgend einer Stelle der Axe befinde sich die zu ihr concentrische Blende P_1P_2, die gemäss ihrer Lage und Grösse die nöthige Abblendung des einfallenden

Büschels bewirkt. Ein Strahlenbüschel, welches von einem seitlichen Punkte des Objekts ausgehend diese Blende passirt, hat dann schon gegenüber der ersten und ebenso weiter gegenüber allen folgenden Flächen einen anderen Charakter als das der Axe parallele. Würde sein Hauptstrahl in Folge der besonderen Lage der Blende zufällig den Krümmungsmittelpunkt C der ersten Fläche passiren, so würde es durch diese Fläche allerdings noch ganz ebenso modificirt werden als das vorher betrachtete axiale. Dies würde sich dann aber schon an der nächsten Fläche anders verhalten, wenn nicht etwa alle Flächen concentrisch zur Blendenmitte sind. Im allgemeinen wird das seitliche Büschel schon die erste Fläche so treffen, dass sein Hauptstrahl nicht durch dessen Centrum geht. Ein dem Hauptstrahl parallel durch dieses Centrum gezogener Strahl $P_2 C$ (welcher unter Umständen dem wirklichen Büschel gar nicht angehört) markirt dann diejenige Axe symmetrisch, zu welcher — schematisch gesprochen — das einfallende seitliche Büschel die gleiche Ausdehnung haben dürfte wie das axiale, wenn die Strahlenvereinigung in dem durch diese Fläche hervorgebrachten Bilde des seitlichen Punktes den gleichen Charakter haben sollte wie im Axenpunkte. Thatsächlich fallen daher Strahlen ein, welche die Oeffnung dieses ideellen Büschels nach der einen Seite jedenfalls überschreiten, Strahlen also, auf welche die Aberrationen höherer Ordnung an der betreffenden Fläche anderen Einfluss haben, als auf dieses.

An jeder folgenden Fläche ist — je nach der Lage dieser Fläche, d. h. ihres Mittelpunkts zu der die Strahlen begrenzenden Blende — das Verhältniss der Oeffnung des für diese Fläche construirbaren ideellen Büschels zu der des thatsächlich herausgeblendeten ein anderes; aber an allen Flächen sind diese Verhältnisse im allgemeinen von einander verschieden und an jeder wird daher das schiefe Büschel anders modificirt als das axiale.

Wir haben also das Resultat, dass das von einem seitlichen Objektpunkte ausgehende, durch irgend eine Blende beschränkte Büschel im ersten Hauptschnitt einen anderen Charakter hat, als bei gleicher Apertur das von dem axialen Objektpunkte und auch als das von demselben seitlichen Punkte ausgegangene sagittale Büschel. Die Aberrationen höherer Ordnung haben auf seine Constitution nach der einen Seite seines Hauptstrahls hin höheren Einfluss, als in jenen Büscheln und als in ihm selbst nach der anderen Seite hin. Das Büschel wird also durch diese Brechungen unter schiefer Incidenz innerhalb des ersten Hauptschnitts unsymmetrisch. Seine Constitution wird im Allgemeinen diejenige sein, welche man erhält, wenn man in einem endlichen Büschel allgemeiner Art (Fig. 6) durch einen der Axe parallelen Schnitt einen Theil absondert. Der übrig gebliebene Theil kann die Axe selbst, d. h. die Spitze der Kaustik enthalten oder auch nicht; das hängt von den thatsächlichen Verhältnissen ab. Im Allgemeinen aber wird jedenfalls das durch meridionale Strahlen erzeugte Bild eines seitlichen Objektpunktes statt eines Punktes das Stück einer kaustischen Curve sein.

Dieses Curvenstück — von manchen Optikern »Coma« genannt — wird gebildet durch die ersten Bildpunkte der successive auf einander folgenden Elementarbüschel, in welche man sich das grössere Büschel zerlegt denken kann. Wir haben nun früher (pag. 72) die Orte der Bildpunkte dieser Elementarbüschel dadurch gefunden, dass wir die Gleichung $n \sin i = n' \sin i' = Q$, welche den Zusammenhang zwischen den Richtungen des einfallenden und des gebrochenen Strahls angiebt, nach dem Centriwinkel der brechenden Kugelfläche, φ, variirten. Die Gleichsetzung der von $d\varphi$ unabhängigen Glieder in dem Ausdruck für $dQ/d\varphi$ vor und nach der Brechung

ergab die, bis auf Grössen von der Ordnung $d\varphi$ genauen Gleichungen (3), (3a) und (3b) pag. 73, welche den Zusammenhang zwischen t und t' einerseits, den Constanten der brechenden Fläche r, n, n' und denen des Hauptstrahls i, i' andererseits feststellen. Um jetzt die Beschaffenheit des fraglichen Stückes der kaustischen Curve in erster Näherung zu ermitteln, liegt es nahe, die Variation der Grössen t, t' selber mit dem Winkel φ oder mit den Oeffnungswinkeln der ein- und austretenden Büschel u, u' zu bestimmen. Man erhält diese in consequenter Fortsetzung jenes zur Ermittelung der Grundbeziehung zwischen t und t' selber angewandten Verfahrens, indem man $dQ/d\varphi$ nochmals nach φ variirt und und in den Endgleichungen nur Grössen von der Ordnung $d\varphi$ berücksichtigt.

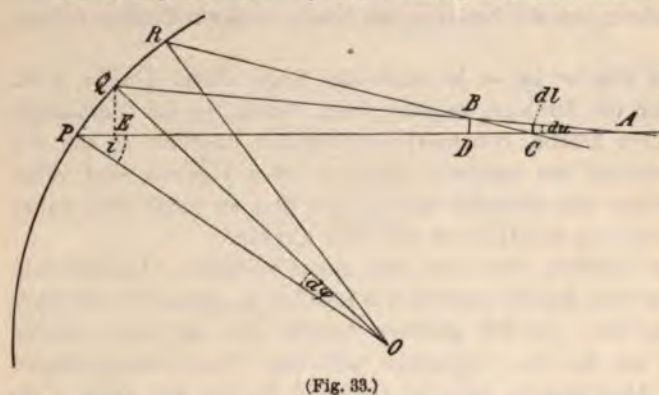
Setzen wir vorübergehend

$$\frac{1}{r}\frac{dQ}{d\varphi} = n\cos i\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r}\right) = Q^*, \tag{1}$$

dann ergiebt sich nach einigen einfachen Umformungen

$$\frac{1}{r}\frac{dQ^*}{d\varphi} = Q^{**} = -Q\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r}\right)^2 + QQ^*\frac{1}{nt} + \frac{n\cos^3 i}{t^3}\frac{dt}{du}. \tag{2}$$

Sei in Fig. 33 $PA = t$; der Schnittpunkt des dem Strahl PA benachbarten Strahls QA mit seinem nächsten Nachbar RC sei B, also $QB = t + dt$. Daher $dt = QB - PA$ und dies in genügender Annäherung $= -(PE + DA)$, wenn D und E die Schnittpunkte der um A mit AB und AQ geschlagenen Bögen mit dem Strahl PA sind. Weiter ist $PE = r\sin i\, d\varphi$ und DA genügend nahe $= 2d\tau$, wenn wir CA mit $d\tau$ bezeichnen. Also



(Fig. 33.)

$$dt = -2d\tau - r\,d\varphi\sin i$$

$$\frac{dt}{du} = -2\frac{d\tau}{du} - r\frac{d\varphi}{du}\sin i = -2\frac{d\tau}{du} - \frac{t\sin i}{\cos i}.$$

Hiernach wird schliesslich nach einigen Zusammenziehungen

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} + 3QQ^*\frac{1}{nt} - 2n\frac{\cos^3 i}{t^3}\frac{d\tau}{du} \tag{2a}$$

und ganz entsprechend kann man ohne weiteres auch

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} + 3QQ^*\frac{1}{n't'} - 2n'\frac{\cos^3 i'}{t^{3\prime}}\frac{d\tau'}{du'} \tag{2b}$$

setzen. Daher

$$\Delta\left(n\frac{\cos^3 i}{t^3}\frac{d\tau}{du}\right) = \frac{3}{2}QQ^*\Delta\left(\frac{1}{nt}\right) \tag{3}$$

für jede beliebige endliche Neigung der Hauptstrahlen, d. h. für jeden Betrag der Grössen i und i'. (Die in dieser Gleichung auftretende Grösse $d\tau/du$ hat bekanntlich die einfache geometrische Bedeutung, dass sie gleich dem Krümmungsradius der kaustischen Curve an der betrachteten Stelle C ist.)

Wenn in dieser Weise ein Büschel von der Oeffnung $PCR = 2du$ wirksam wäre, so würde es als Bild eines Punktes eine im ersten Hauptschnitt liegende Linie liefern. Als dieses Bild wollen wir die engste Einschnürung des wirksamen Büschels, bei C, ansehen. Seine Grösse ist

$$dl = d\tau \cdot du.$$

Bezeichnet man die Länge PQ des durch das einfallende Büschel in Anspruch genommenen Bogens der Kugelfläche mit dh (wo dann mit genügender Annäherung $PR = 2dh$ ist), so hat man weiterhin

$$\frac{\cos i}{t} = \frac{du}{r\,d\varphi} = \frac{du}{dh},$$

was in Verbindung mit

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{dl}{du^2}$$

ergiebt

$$\Delta\left(n\,\frac{\cos^3 i}{t^3}\,\frac{d\tau}{du}\right) = \Delta\left[n\left(\frac{du}{dh}\right)^3 \frac{dl}{du^2}\right] = \frac{1}{dh^3}\,\Delta(n\,du\,dl).$$

Werden jetzt wieder mit $(dl_0)_k$ und $(dl_0)_k'$ die Grössen bezeichnet, welche die vor und nach der $k$ten Brechung vorhandenen Zerstreuungslinien, auf das Objekt zurückbezogen besitzen, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung (3)

$$\frac{n_1\,du_1}{dh_k^3}\,\Delta\,(dl_0)_k.$$

Daher ist schliesslich

$$\Delta(dl_0)_k = \frac{3}{2}\,(n_1\,du_1)^2\left(\frac{dh_k}{n_1\,du_1}\right)^3 Q_k Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k \tag{4}$$

oder, da

$$du_1 = \frac{dh_1 \cos i_1}{t_1}$$

$$\Delta(dl_0)_k = \frac{3}{2}\,(n_1 du_1)^2\left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1}\right)^3\left(\frac{dh_k}{dh_1}\right)^3 Q_k Q_k^*\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k, \tag{4a}$$

worin

$$\frac{dh_k}{dh_1} = \frac{\cos i_1'/t_1'}{\cos i_2/t_2}\cdot\frac{\cos i_2'/t_2'}{\cos i_3/t_3}\cdot\ldots\ldots\frac{\cos i'_{k-1}/t'_{k-1}}{\cos i_k/t}, \tag{5}$$

ebenfalls für jede endliche Neigung des Büschels.

Lassen wir, wie früher, das Zeichen d weg, welches andeuten soll, dass die betreffenden Grössen unendlich klein von der ersten Ordnung sind, so lautet der Ausdruck für die durch die $k$te Brechung hervorgerufene Aenderung der auf das Objekt zurückbezogenen Grösse der Zerstreuungslinie l_0

$$\Delta(l_0)_k = \frac{3}{2}\,(n_1 u_1)^2\left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1}\right)^3\left(\frac{h_k}{h_1}\right)^3 Q_k Q_k^*\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k. \tag{6}$$

Liegt das Objekt in unendlicher Entfernung, so ist die Winkelgrösse λ der auf dasselbe bezogenen Zerstreuungslinie gegeben durch

$$\Delta(\lambda_0)_k = \frac{3}{2}\,h_1^2\left(\frac{1}{\cos i_1}\right)^3\left(\frac{h_k}{h_1}\right)^3 Q_k Q_k^*\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k \tag{7}$$

und die lineare oder angulare Grösse der durch alle p Brechungen zusammen hervorgerufenen Zerstreuungslinie, $l_0^{(p)}$ bezw. $\lambda_0^{(p)}$ wird wie früher erhalten, indem man über $\Delta(l_0)_k$ bezw. $\Delta(\lambda_0)_k$, von $k = 1$ bis $k = p$ summirt.

Wenn die wirksamen Büschel mit der Axe des Systems nur geringe Winkel bilden, ihre Hauptstrahlen wieder vor und nach der Brechung an der $k$ten Fläche die Axe in der Entfernung x bezw. x' vom Scheitel dieser Fläche unter dem

Winkel w bezw. w' und die Fläche selbst in der Höhe y über der Axe schneiden, so hat man wie früher

$$Q = n \sin i = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) y = y\, Q_x$$

und

$$Q^* = n \cos i\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r}\right) = -n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) = -n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$$

zu setzen, wo s die Schnittweite des vom Axenpunkte des Objekts ausgegangenen Strahls vor der $k$ten Brechung ist, also in unserer früheren Bezeichnung hier $\lim Q^* = -Q_s$.

Daher wird schliesslich unter Weglassung des Index k

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2}(n_1 u_1)^2 y_1 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y}{y_1}\right) Q_x Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right) \tag{8}$$

oder auch

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2}(n_1 u_1)^2 (n_1 w_1) \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{x}{n_1}\right) \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y}{y_1}\right) Q_x Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right) \tag{8a}$$

und analoge Ausdrücke ergeben sich für $\Delta(\lambda_0)$.

Dieselben zeigen die Abhängigkeit des fraglichen Fehlers von der Apertur und Neigung des einfallenden Büschels und weisen ihrer mathematischen Form nach wieder auf die nahe Verwandtschaft mit den anderen bisher betrachteten Aberrationen hin.

In dem wiederholt betrachteten Sonderfalle, dass die Dicken und Entfernungen aller Linsen zu vernachlässigen sind und dass die Hauptstrahlen der Büschel durch den nahezu gemeinsamen Scheitel der Linsen gehen, ist

$$Q_x = nw = \ldots\ldots = n_1 w_1 = n_2 w_2 = \ldots = n_k w_k,$$

daher

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2}(n_1 w_1)(n_1 u_1)^2 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right) \tag{9}$$

$$\Delta(\lambda_0) = -\frac{3}{2}(n_1 w_1) h_1^2 \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right). \tag{10}$$

Es ist ausser von Abbe selbst noch von verschiedenen Anderen[1]) gezeigt worden, dass die Erfüllung der Bedingung $\Sigma\Delta(l_0) = 0$ in einem Linsensystem nichts anderes ist, als die Sinusbedingung für geringe Oeffnungen der abbildenden Büschel, dementsprechend auf algebraische Form gebracht.

Literatur.

Dass homocentrische Büschel die Eigenschaft der Homocentricität durch Reflexion an einer Kugelfläche verlieren, hat wohl zuerst Roger Bacon um d. J. 1600 (Tractatus de speculis, vergl. Wilde, Gesch. d. Optik I, pag. 99) klar ausgesprochen und erwiesen; in Bezug auf sphärische Linsen Kepler (Dioptrice 1611, Prop. 59), welcher darum auch bereits paraboloidische Flächen vorschlug, um diesem Mangel zu begegnen. Weitere Ausbildung der Lehre von der Abweichung wegen der Kugelgestalt — meist beschränkt auf die Betrachtung von Axenpunkten — durch die älteren Forscher:

Is. Barrow, Lectiones opticae, London 1649,

J. Gregory, Optica promota, London 1663,

J. Newton, Opticks. London 1704, lib. I, pars 1, prop. 7, Lect. opt. pag. 165,

Chr. Huyghens, Dioptrica. Op. posth. II, Amstelod. 1728,

R. Smith' u. Kästner's früher citirte Werke (s. pag. 37).

---

[1]) L. Seidel, nach S. Finsterwalder's. Literatur. K. Moser, Zeitschr. f. Instrkde. 7 pag. 320. 1887, ganz neuerdings nochmals von A. Kerber, Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 12, pag. 121. 1891.

Ferner in besonderer Anwendung auf die Objective von Fernröhren durch:
L. EULER, Mém. Ac. Berlin von 1757, 1761, 1762, 1766 (mehrere Abhandlungen),
CLAIRAUT, Mém. Ac. Paris von 1756, 1757, 1762 (dto.),
KLINGENSTIERNA, Tentamen de defin. et corrig. aberrat. rad. lum. Petrop. 1762,
D'ALEMBERT, Opusc. math. IV. Paris 1764. Mém. Ac. Paris von 1764, 1765, 1767.
BOSCOVICH, Dissert. 5 ad Dioptricam pertinentes, Vindob. 1767,
BÉGUELIN, Mém. Ac. Berlin von 1762, 1763, 1769 und schliesslich
L. EULER, Dioptrice Petrop. 1769—71, 3 Bde.

Von den Leistungen aller dieser giebt eine übersichtliche Darstellung:
S. KLÜGEL in der Vorrede zu seiner Analytischen Dioptrik, Leipzig 1778, welche eine Bearbeitung des sehr umfangreichen EULER'schen Werkes ist. S. auch PRIESTLEY, Geschichte der Optik übers. v. KLÜGEL. Leipzig 1776.

Gleichzeitig mit KLÜGEL's Werk erschien eine wichtige Abhandlung über diesen Gegenstand von
LAGRANGE, Théorie des lunettes, Mém. Ac. Berlin 1778.

In den ausserordentlich zahlreichen, diesem Jahrhundert angehörigen Bearbeitungen des vorliegenden Gegenstandes, wie auch schon bei EULER, CLAIRAUT u. A., wird meistens die sphärische Aberration in und ausser der Axe in Verbindung mit den im folgenden Capitel zu behandelnden chromatischen Abweichungen erörtert. Die wichtigsten dieser Abhandlungen und Werke sind:

J. F. W. HERSCHEL, On the aberration of compoud lenses and object glasses. Phil. Trans. von 1821, pag. 222, theilweise reproducirt in dess. Verf. On Light. Encycl. Metrop. 1827. D. Uebers. v. SCHMIDT, Stuttg. 1831, pag. 115. (Aberration für Axenpunkte unter Vernachlässigung der Linsendicken und -abstände. Resultat: Gleichung 12, pag. 109.)

G. SANTINI, Teoria degli strumenti ottici. Padova 1828, Bd. I, pag. 114—138 u. 235—242.

S. STAMPFER, Ueber die Theorie der achromat. Objective bes. der FRAUNHOFER'schen Jahrb. d. k. k. polyt. Inst. 13, pag. 52. 1828 und Unters. der v. Hrn. ROGER vorgeschlagenen Verbess. in der Constr. achrom. Fernröhre, ibid. 14, pag. 108. 1829.

J. J. LITTROW, Zeitschr. f. Phys. u. Math. von BAUMGARTNER u. v. ETTINGSHAUSEN, Bd. 3 u. 4 (mehrere Abhdlgn.), und Dioptrik, Wien 1830, pag. 50—70 (daselbst ausführl. Literaturverzeichniss am Schlusse).

G. W. BRANDES, Art. Linsenglas in GEHLER's Physik. Wörterbuch, Bd. 6, Leipzig 1831.

L. J. SCHLEIERMACHER giebt in POGG. Ann. 14, pag. 1. 1828, eine Uebersicht, in BAUMGARTNER u. v. ETTINGSHAUSEN's Zeitschr. f. Phys. u. Math. 9, pag. 1, 161, 454; 10, pag. 171, 329, den Anfang desjenigen, was er in seiner »analytischen Dioptrik«, Darmstadt 1842 (nur Bd. 1 erschienen) fortgesetzt und ausgeführt hat. (Dies ist eine der vollständigsten Untersuchungen, welche jemals über diesen Gegenstand angestellt worden sind; sie überragt in der Tiefe der Problemstellung fast alle späteren Publikationen. Die analytischen Entwickelungen leider sehr schwerfällig und daher unübersichtlich; keine allgemeinen Resultate.)

I. A. GRUNERT, Optische Untersuchungen, Bd. 2, Leipz. 1847. (Discussion der versch. mögl. Fernrohrobjektivconstructionen.)

J. PETZVAL, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptr. Unters., Pesth 1843, desgl. Wiener Sitzber. 24, pag. 50. 1857; 26, pag. 33. 1858 (s. oben pag. 126).

L. SEIDEL, Zur Theorie der Fernrohrobjektive. Astr. Nachr. 35, pag. 302. 1852. (Sphär. Aberr. 1. Ordnung in der Axe ausgedrückt durch neue Variable: die relativen Neigungswinkel und Schnitthöhen eines paraxialen Strahls). Ders. Zur Dioptrik, Entwicklung aller Glieder dritter Ordnung, welche den Weg eines ausserhalb der Ebene der Axe gelegenen Lichtstrahls durch ein System brechender Flächen bestimmen. Astr. Nachr. 43, pag. 289. 1855. (Vollständigste Darstellung aller Aberrationen dritter Ordnung: axiale Aberration, Coma, Astigmatismus, Bildwölbung, Verzerrung durch algebraische Formeln. Einheitliche strenge Behandlung. Dies wohl neben den Untersuchungen von ABBE und HELMHOLTZ über den Aplanatismus bei weitgeöffneten Büscheln die wichtigste auf diesem ganzen Gebiete). Auf ihr fussen

G. A. KELLER, Entwickelg. der Glieder 5. Ordng. Gekr. Preisschrift. München 1865 (Beschränkung auf die 1. Hauptebene), und aus neuester Zeit

S. FINSTERWALDER, Die von opt. Syst. grösserer Oeffnung u. Gesichtsfeldes erzeugten

Bilder. Abh. Münch. Akad. 17, pag. 519—587. 1891 (Untersuchg. der Brennfläche der von einem ausseraxialen Objektpunkt ausgegangenen Strahlen nach dem Durchgang durch ein centr. System. Zusammenhang der Durchstossungspunkte in der Diaphragmenebene mit denen in einem das Bild auffangenden Schirm. Intensitätsvertheilung im Zerstreuungsbilde bei verschiedener Lage der Blenden und der Schirmebene).

Die übrigen auf SEIDEL's Publikationen folgenden Abhandlungen nehmen merkwürdigerweise auf diese keinen Bezug und stehen ihr grösstentheils in der Schärfe und dem Umfang der Behandlung nach. Das sonst vortreffliche Werk von

O. F. MOSSOTTI, Nuova teoria degli strumenti ottici. Pisa 1859, fusst noch ganz auf den Arbeiten von LAGRANGE, SANTINI und BIOT, ohne Kenntniss selbst derer von GAUSS. Ferner

H. ZINKEN-SOMMER, Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme, Braunschweig 1870.

P. A. HANSEN, Dioptr. Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Kugelgestalt. Abh. Leipz. Akad. 10, pag. 697—784. 1874.

W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichts in Gläsern etc. Leipzig 1874 (bes. § 4).

W. SCHEIBNER, Dioptr. Unters. insbes. über das HANSEN'sche Objectiv, Abh. Leipz. Akad. 11, pag. 541—620. 1876.

K. MOSER, Die Grundformeln der Dioptrik für den prakt. Gebrauch entwickelt. Sitzber. böhm. Akad., Prag 1881, insbes. pag. 22—28 (sehr aphoristisch, aber erschöpfend und elegant in der Entwickelung). Ergänzungen in dess. Verf. Die einfache achrom. Linse als Landschaftsobjektiv. EDER's Jahrb. f. Photogr. 1889, und Ueber Fernrohrobjektive, Zeitschr. f. Instrkde. 7, insbes. pag. 225—238. 1887.

L. BILLOTTI, Teoria degli strumenti ottici con applic. ai telesc. ed alla fotogr. celeste. Publ. del R. Osserv. di Brera. Milano 1883, insbes. pag. 87 ff.

A. KRAMER, Theorie der zwei- und dreitheiligen astron. Fernrohrobjektive, Berlin 1885 (schwerfällig).

Einen wesentlichen Beitrag zu dem Gegenstande des vorstehenden Kapitels lieferte jüngst

M. THIESEN, Beiträge zur Dioptrik. Sitzber. Berl. Akad. 35, pag. 799. 1890 (Bestimmung des Weges eines Lichtstrahls direkt aus dem Princip der schnellsten Ankunft. Resultate übereinstimmend mit den von SEIDEL erhaltenen, dessen Arbeiten auch TH. nicht gekannt zu haben scheint.)

S. CZAPSKI.

Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Theorie der Achromasie.

In den vorangehenden beiden Abschnitten ist immer von dem Brechungsexponenten eines Mediums schlechthin die Rede gewesen, als wenn derselbe eine eindeutige Constante des betreffenden Mediums wäre. Thatsächlich ist aber, wie bei früherer Gelegenheit bereits kurz erwähnt (pag. 10) der Brechungsexponent aller bisher untersuchten Substanzen von der Wellenlänge des Lichts abhängig gefunden worden, $n = f(\lambda)$. Die Auseinandersetzungen der vorigen Abschnitte darüber, auf welche Weise die geometrisch mögliche allgemeine optische Abbildung in Systemen centrirter Kugelflächen realisirt werden könne, sei es von selbst, sei es — in erweitertem Gebiete — durch geeignete Anordnung der wirksamen Flächen, sind daher erschöpfend nur für den besonderen Fall rein katoptrischer Systeme; denn bei der Reflexion ist $n' = -n$, also $n'/n = const$ für jedes λ. In dem allgemeinen Falle aber, dass Brechungen und Spiegelungen combinirt und auch in dem, dass nur erstere allein in dem betrachteten System wirksam sind, wird durch die Variabilität der Brechungsexponenten mit der Wellenlänge eine entsprechende Variation aller Faktoren der Abbildung

mit der Wellenlänge (Farbe) des angewandten Lichts bedingt. Ebensowohl die Grundfaktoren der Abbildung durch eine, und in Folge dessen auch durch beliebig viele brechende Flächen (pag. 60 ff.) — also die Lage der Brennebenen und die Grössen der Brennweiten jedes Systems — zeigten sich uns früher abhängig von den Brechungsexponenten der Medien, als auch die im vorangehenden Abschnitt betrachteten Ausdrücke für die verschiedenen Bildfehler. Beide sind also in dioptrischen Systemen Functionen der Wellenlänge. Infolgedessen werden, wie schon NEWTON, der Entdecker der Dispersion, für die einfachsten Fälle nachwies[1]), von einem Objekte, welches zu gleicher Zeit Licht verschiedener Wellenlänge ausstrahlt, durch ein dioptrisches System Bilder entworfen, deren Lage auf der Axe, Vergrösserung und qualitative Eigenschaften im Allgemeinen sämmtlich mit der Farbe variiren.

Man bezeichnet diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge als chromatische Aberrationen oder Abweichungen wegen der Farbenzerstreuung.

Dieselben bilden für den wesentlichen Zweck der optischen Systeme: deutliche Bilder zu erzeugen, ein ebenso grosses und unter Umständen sogar ein vergleichsweise noch stärkeres Hinderniss, als z. B. die Variation der Schnittweiten etc. der von einem Objektpunkt ausgegangenen Strahlen mit der Oeffnung des Büschels oder mit seiner Neigung gegen die Axe, d. h. als die im vorigen Abschnitt unter dem Gesammtnamen »sphärische Aberrationen« (oder Abweichungen wegen der Kugelgestalt der abbildenden Flächen) zusammengefassten Bildfehler. Und jener Zweck der optischen Instrumente würde offenbar bei allen dioptrischen Systemen nur sehr unvollkommen erreicht, wenn es nicht möglich wäre, durch geeignete Anordnung und Wahl der das System constituirenden Einzelelemente diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge zu compensiren — ganz analog und insbesondere auch gleichzeitig mit den entsprechenden Variationen der Strahlen von einerlei Farbe mit Apertur und Neigung des Büschels. Man bezeichnet die Ausführung dieser Compensation als Achromatisirung und ihr Ergebniss als »Achromasie«.

Da alle Eigenschaften eines Linsensystems, einschliesslich der sogen. Aberrationen, mit von dessen Medien und daher auch von der Wellenlänge abhängen, so kann in Bezug auf sie alle Achromasie erstrebt bezw. hergestellt werden. In diesem Sinne kann man, wie von den chromatischen Fehlern, so auch von einer Achromasie der Bildorte, der Vergrösserung, der Brennweiten und ebenso der Verzerrung, Bildwölbung etc. sprechen. Es ist aber — aus Gründen, die im Verlaufe der weiteren Darstellung von selbst hervortreten werden — die Herstellung aller dieser verschiedenen Arten der Achromasie für die Erzeugung deutlicher, d. h. anscheinend von dem Einflusse der Chromasie befreiter Bilder keineswegs gleich wichtig, geschweige denn stets die gleichzeitige Erreichung aller Arten von Achromasie erforderlich. Man kann sich vielmehr praktisch stets mit einer theilweisen Achromasie begnügen, welche sich nur auf gewisse — je nach den sonstigen Bedingungen des Falles verschiedene — Bildeigenschaften erstreckt. Die chromatischen Variationen einiger Bildeigenschaften, wie die der Wölbung, des Coma, des Astigmatismus sind z. B. bisher stets ausser Acht gelassen worden, d. h. man hat sich stets damit begnügt, den betreffenden Bildfehler nur für eine Farbe aufzuheben.

Die Vermehrung der Zahl der Flächen, aus welchen das System zusammengesetzt werden

[1]) Optice lib. I, pars 1, prop. 7. Lect. opt. 261.

müsste, um auch diese Eigenschaften zu achromatisiren, würde mit der durch sie bedingten Lichtschwächung (durch Reflexionen und Absorptionen), Gewichtserhöhung etc. viel unangenehmer werden, als jene relativ wenig bemerkbaren Fehler es sind.

Wir betrachten zuerst die

Variation der Fundamentaleigenschaften von Linsensystemen mit der Wellenlänge des Lichts und die Bedingungen ihrer Compensation (Achromasie.)

Die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems lässt sich (nach pag. 63) bestimmen aus der Wirkung bezw. den Grundfaktoren der einfachsten Partialsysteme, in welche es zerlegt gedacht werden kann, also schliesslich der einzelnen, je zwei Medien trennenden Flächen (von manchen Autoren »einfache Diopter« genannt). Dementsprechend kann auch die Variation der Wirkung des gesammten Systems mit der Farbe berechnet werden aus den Variationen, welche an den einzelnen Dioptern stattfinden. Man hat nur die a. a. O. gefundenen Ausdrücke für die Brennweiten und Brennpunktsorte nach den n zu variiren. Die Variationen der Brennweiten und Brennpunktsabstände der einzelnen Diopter aber ergeben sich einfach zu

$$\frac{df}{f} = \frac{ds_F}{s_F} = \frac{dn}{n} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)}$$

und (1)

$$\frac{df'}{f'} = \frac{ds_{F'}}{s_{F'}} = \frac{dn'}{n'} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)}\,. \tag{1}$$

wenn der der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Brechungsexponent dies- und jenseits der brechenden Fläche mit $n + dn$ bezw. $n' + dn'$ bezeichnet wird. Hat man auf diese Weise[1]) die Grössen df/f und df'/f' für das ganze System bestimmt, dann ist das der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Bild eines Objektes, welches vom vorderen Brennpunkte des Systems für λ, F_λ, um x, von dem für $\lambda + d\lambda$, $F_{\lambda+d\lambda}$, um $x + dx$ absteht, von dem der letzteren Wellenlänge entsprechenden hinteren Brennpunkte des Systems $F'_{\lambda+d\lambda}$, um die Strecke $x' + dx'$ entfernt, wobei dx' sich aus der Fundamentalformel

$$x \cdot x' = ff'$$

ergiebt zu

$$dx' = x'\left(\frac{df}{f} + \frac{df'}{f'} - \frac{dx}{x}\right). \tag{1a}$$

Die Vergrösserungen des Systems in Richtung zur und senkrecht zu der Axe sowie das Convergenzverhältniss in konjugirten Punkten für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ lassen sich dann ebenso einfach mit den Werthen derselben Grössen für die Wellenlänge λ in Beziehung setzen durch Variation der anderen unter (I) auf pag. 41 zusammengestellten Grundgleichungen. Wenn

$$\alpha_{\lambda+d\lambda} = \alpha + d\alpha;\quad \beta_{\lambda+d\lambda} = \beta + d\beta \quad\text{und}\quad \gamma_{\lambda+d\lambda} = \gamma + d\gamma$$

gesetzt wird, so findet man

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{\alpha} &= \frac{dx'}{x'} - \frac{dx}{x} \\ \frac{d\beta}{\beta} &= \frac{df}{f} - \frac{dx}{x} = \frac{dx'}{x'} - \frac{df'}{f'} \\ \frac{d\gamma}{\gamma} &= \frac{dx}{x} - \frac{df'}{f'} = \frac{df}{f} - \frac{dx'}{x'}\,. \end{aligned} \tag{1b}$$

[1]) Interessante graphische Behandlungen dieser und verwandter Aufgaben von F. Kessler, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 29, pag. 1. 1884.

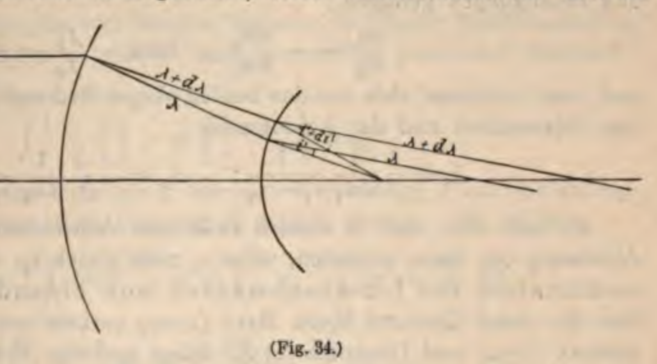
Diese Gleichungen geben den Einfluss an, den die relativen Variationen der Brennweiten und der x, x' d. h. indirekt auch der Brennpunktsorte auf die entsprechenden der Grössen α, β, γ haben.

Schon bei einem zweifachen Diopter z. B. einer beiderseits von Luft begrenzten Linse endlicher Dicke (vergl. pag. 65) bietet sich die Möglichkeit einer Achromatisirung der Brennweiten oder der Brennpunktsorte dar — und bei einer solchen sogar unabhängig von der Dispersion ihrer Substanz — da in den beiden Radien und der Dicke genügend Elemente gegeben sind, um eine der Gleichungen

$$\frac{df}{f} = \frac{df_1}{f_1} + \frac{df_2}{f_2}\frac{d\Delta}{\Delta} = 0$$

$$d(f_1 - \sigma) = df_1 - d\sigma = df_1 - \sigma\left(\frac{df_1}{f_1} + \frac{df_1'}{f_1'} - \frac{d\Delta}{\Delta}\right) = 0 \tag{2}$$

oder eine der entsprechenden für zweite Brennweite und zweiten Brennpunkt geltenden zu erfüllen. Durch graphische Darstellung kann man sich dies der verbreiteten Meinung widerstreitende Ergebniss[1]) leicht veranschaulichen. Ein zur Axe paralleler weisser Strahl (Fig. 34) wird durch Brechung z. B. an einer convexen Fläche in ein dichteres Medium nach der Axe zu gebrochen und zwar desto mehr, je kleiner die Wellenlänge ist. Es kann nun — wie man sich leicht überzeugt — Lage und Krümmung einer darauf folgenden Fläche so gewählt werden, dass die Strahlen sie unter desto geringeren Incidenzwinkeln treffen, je brechbarer sie sind und dies in solchem Verhältniss, dass die austretenden Strahlen verschiedener Wellenlänge entweder einander parallel austreten, wie in Fig. 34, (Gleichheit der Brennweiten), oder nach demselben Punkte hin convergiren (Achromasie in Bezug auf die Brennpunkte).



(Fig. 34.)

Statt einer einzigen dicken Linse in Luft wählt man zu demselben Zwecke vortheilhafter zwei dünne, durch einen grösseren Abstand getrennte Linsen. Im Grenzfalle, bei unendlich dünnen Linsen, fanden wir (pag. 68)

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - D\varphi_1\varphi_2,$$

worin D der Linsenabstand (bei etwas dickeren Linsen der Abstand der einander zugewandten Hauptpunkte) ist. Bei einer einzigen dünnen Linse in Luft war

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) = (n-1)k \quad \text{und} \quad \frac{df}{f} = \frac{dn}{n-1} = \frac{1}{\nu},$$

wenn wir die Grösse $\frac{n-1}{dn}$, das Reciproke des sogen. Zerstreuungsverhältnisses der Linsensubstanz, mit ν bezeichnen; daher ergiebt sich als Bedingung für die Constanz von φ oder f in Bezug auf λ nach einigen Umformungen die, dass

[1]) Wie ich nachträglich bemerkte, ist dasselbe schon von Kessler (a. a. O.) gefunden worden.

$$D = \frac{1}{2} \frac{\nu_2 f_2 + \nu_1 f_1}{\nu_2 + \nu_1}, \tag{3}$$

sei, also bei gleichem Material (ν) der beiden Linsen einfach

$$D = \frac{f_2 + f_1}{2} \tag{3a}$$

Dies ist die Bedingung, welcher, wie wir später sehen werden, die aus einfachen Linsen bestehenden Oculare in erster Linie genügen müssen.

Sind die beiden dünnen Linsen ganz aneinander gerückt, so dass $D = 0$ gesetzt werden kann, so ist die Brennweite (hier zugleich Brennpunktsabstand) des ganzen Systems gegeben durch

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n_1 - 1)k_1 + (n_2 - 1)k_2;$$

soll nun

$$d\varphi = dn_1 k_1 + dn_2 k_2 = 0 \tag{4}$$

sein, so müssen die Krümmungsdifferenzen der Linsenflächen

$$k_1 = \rho_1' - \rho_1'' \quad \text{und} \quad k_2 = \rho_2' - \rho_2''$$

den Bedingungen genügen

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{dn_2}{dn_1} \quad \text{oder} \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{\nu_1}{\nu_2} \tag{4a}$$

und zwar bestimmt sich aus den beiden obigen Bedingungsgleichungen (4) (denen des »Maasstabs« und der Achromasie)

$$k_1 = \frac{1}{f} \frac{1}{dn_1} \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}; \quad k_2 = -\frac{1}{f} \frac{1}{dn_2} \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}. \tag{4b}$$

Es lässt sich also in diesem Falle eine Achromasie der Grundfaktoren der Abbildung nur dann erreichen, wenn ν_1 nicht gleich ν_2, d. h. die Zerstreuungsverhältnisse der Linsensubstanzen von einander verschieden sind. Erst die durch CHESTER MORE HALL (1729) vorbereitete, dann durch KLINGENSTIERNA (1754) und DOLLOND (1757) sicher gestellte Erkenntniss, dass dies bei vielen Substanzen thatsächlich der Fall sei — was NEWTON und anfangs auch EULER in Abrede gestellt hatten — gab die Unterlage dafür, eine Achromasie überhaupt zu erstreben[1]).

Man sieht aus Gleichung (4) und (4a) ferner, dass die beiden zu einem achromatischen System combinirten Linsen stets Brennweiten von entgegengesetzten Vorzeichen erhalten müssen; die eine Linse muss eine collektive (positives f), die andere eine dispansive (negatives f) sein. Soll z. B. die Brennweite des ganzen Systems positiv sein, so muss die der sie constituirenden positiven Linse natürlich kürzer sein als die der dazu gehörigen negativen und als diejenige des Gesammtsystems. Das Zerstreuungsvermögen der negativen Linse muss dann das grössere sein, so dass durch diese Linse trotz ihrer geringeren Stärke die Dispersion der anderen compensirt wird, ohne dass zugleich deren collektive Fundamentalwirkung mit aufgehoben wird; bei negativer Gesammtbrennweite umgekehrt. Je verschiedener die Zerstreuungsvermögen der Linsensubstanzen sind, mit desto geringeren Krümmungen lässt sich *caet. par.* die Achromasie eines Systems von gegebener Brennweite erreichen. —

---

[1]) Näheren Bericht über die sehr merkwürdige Geschichte der Achromasie geben PRIESTLEY Geschichte etc. der Optik. Uebers. von KLÜGEL, Leipzig 1776, pag. 243, 520. BARLOW und BREWSTER in ihren Artikeln »Optics« in der 7. u. 8. Aufl. der Encypl. Brit. pag. 408, bezw. pag. 175. 1823. Letzterer auch in seinem Leben NEWTON's, übers. v. GOLDBERG, Leipz. 1833, pag. 19 u. pag. 45—56. Man sehe ferner WILDE, Gesch. d. Optik, Bd. 2, pag. 71. LITTROW, Dioptrik, pag. 457 und LÖWENHERZ, Zeitschr. f. Instrkde. 2, pag. 275. 1882.

Handelt es sich darum, in einem System nicht für einzelne oder alle Grundfaktoren Achromasie herbeizuführen, sondern nur für eine bestimmte Lage des Objektes und Bildes, so kann man hier, ganz analog wie für die Berechnung der einer Wellenlänge entsprechenden Elemente zwei Wege einschlagen: Entweder man ermittelt die in dem Gesammtsystem stattfindende Variation der Grundfaktoren der Abbildung und hieraus nach den Formeln (1) bis (1b) die Variation der in Frage stehenden besonderen Grössen — oder man ermittelt diese letztere Variation direkt aus den Gleichungen, welche die gesuchten Grössen selbst (Bildpunkte, Vergrösserungs-, Convergenzverhältniss) für die besondere Lage des Objektes zu berechnen gestatten. Die hierzu dienenden Gleichungen schliessen die früheren, zur Ermittelung der Variation der Grundfaktoren dienenden, als besonderen Fall ein (in welchem $s = \infty$); sie sollen daher hier entwickelt werden und zwar wollen wir wiederum die Verundeutlichung des Bildes feststellen, welche durch die chromatische Aberration — und zwar zunächst der paraxialen Strahlen — verursacht wird.

Die Schnittweiten s, s' vor und nach der Brechung an einer Fläche vom Radius r, welche beiderseits von Medien begrenzt ist, deren Brechungsindices für die Wellenlänge λ bezw. n und n' sind, stehen bei paraxialen Strahlen i dem Zusammenhang, dass

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)=Q$$

ist. Ihre Variationen beim Uebergang von der Wellenlänge λ zur Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ werden daher durch Variation von Q nach λ erhalten. Es ist nun

$$[dQ]_\lambda=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)dn+\frac{n}{s^2}ds=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)dn'+\frac{n'}{s'^2}ds'$$

oder

$$Q\frac{dn}{n}+\frac{n}{s^2}ds=Q\frac{dn'}{n'}+\frac{n'}{s'^2}ds'$$

also

$$Q\Delta\left(\frac{dn}{n}\right)=-\Delta\left(\frac{n}{s^2}ds\right). \tag{5}$$

Ueber den Ort, an welchem ein chromatisches Bild aufgefasst wird und daher auch über die Grösse des durch die chromatische Aberration hervorgerufenen Zerstreuungskreises, welcher an Stelle eines scharfen Bildpunktes auftritt, befindet man sich in einer ähnlichen Unsicherheit, wie bei dem der sphärischen Aberration (vergl. pag. 88). Da die Farben, in welche weisses Licht durch Dispersion zerlegt wird, physiologisch einen sehr ungleichen, ja sogar mit der Intensität der Lichtquelle und auch individuell erheblich schwankenden Effekt haben, so sind dieselben für die thatsächliche Auffassung des Bildortes und die Beurtheilung der Grösse des Zerstreuungskreises sehr ungleichwerthig — analog der Ungleichwerthigkeit der unter verschiedener Axenneigung nach dem Bilde convergirenden Strahlen von einerlei Farbe bei der sphärischen Aberration[1]). Für ihre Bewerthung sind die Unterlagen nur durch experimentelle Vergleiche der physiologischen Eindruckstärken verschiedenwelligen Lichts zu beschaffen. Solche Untersuchungen wurden zuerst von FRAUNHOFER[2]) ausgeführt und in neuerer Zeit

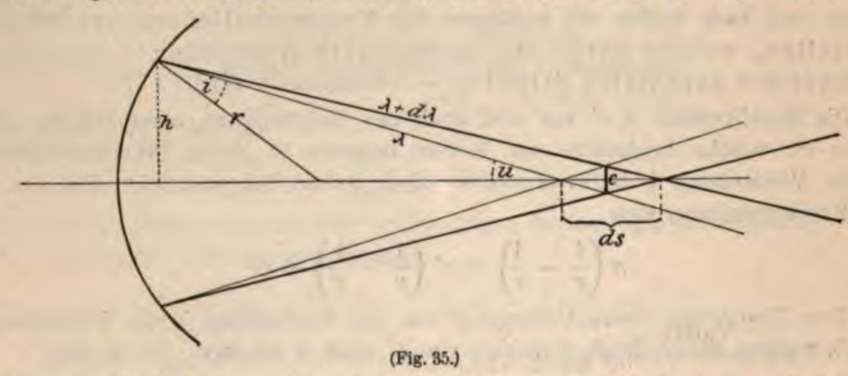
[1]) S. HELMHOLTZ, Physiol. Optik 1. Aufl., pag. 132.

[2]) Denkschr. Münch. Akad. (für 1814/15) pag. 213. 1817. Ges. Schriften Münch. 1888 pag. 18, vergl. auch C. A. STEINHEIL und L. SEIDEL, Abh. Münch. Akad. 5, pag. 1, abgedruckt in A. STEINHEIL und E. VOIT, Handb. d. angew. Optik Leipz. 1891, pag. 248.

von VIERORDT[1]), E. BRODHUN[2]) und A. KÖNIG[3]). Wir werden auf dieselben bald zurückzukommen haben. Für den Augenblick können wir diese Details unberücksichtigt lassen, indem wir nur die beiden einzelnen Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ beachten, von denen wir annehmen wollen, dass sie physiologisch gleichwerthig seien und den Zerstreuungskreis berechnen, welcher von ihnen allein verursacht wird. Die geringste Einschnürung des nach dem Bilde eines Punktes zu convergirenden Lichtbüschels findet dann (s. Fig. 35) in der Mitte zwischen den beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Bildpunkten statt und ihr Durchmesser c ist bis auf Grössen von höherer als der zweiten Ordnung

$$c = \pm\, ds \cdot u \qquad \text{bezw.} \qquad c' = ds' \cdot u',$$

wenn u bezw. u' der halbe Oeffnungswinkel des nach dem Objekt- bezw. Bildpunkte hin convergirenden Büschels ist. Das Vorzeichen von c ist an sich willkürlich. Wir



(Fig. 35.)

wollen es, wie bei der sphärischen Aberration, so wählen, dass es bei einer collektiven Brechung positiv wird, also, indem λ als unabhängige Variable gedacht wird, oben das positive Vorzeichen annehmen.

Wie früher auf das Objekt zurückbezogen, ist vor und nach der betrachteten $k$ten Brechung

$$n_k u_k c_k = n_1 u_1 (c_0)_k \qquad \text{und} \qquad n_k' u_k' c_k' = n_1 u_1 (c_0)_k,$$

daher, da

$$u_k = \frac{h_k}{s_k} \qquad \text{und} \qquad u_k' = \frac{h_k}{s_k'}.$$

$$ds_k = \frac{c_k}{u_k} = (c_0)_k \frac{n_1 u_1}{n_k u_k^2} = (c_0)_k (n_1 u_1) \frac{s_k^2}{n_k h_k^2}$$

und ebenso

$$ds_k' = \frac{c_k'}{u_k'} = (c_0)_k' \frac{n_1 u_1}{n_k' u_k'^2} = (c_0)_k' (n_1 u_1) \frac{s_k'^2}{n_k' h_k^2}$$

Tragen wir diese Werthe von ds_k und ds_k' in (5) ein, so wird nach einigen Umformungen

$$\Delta(c_0)_k = -\frac{h_k^2}{n_1 u_1} Q_k \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)_k$$

oder für die Rechnung bequemer

$$\Delta(c_0)_k = -(n_1 u_1)\left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)_k, \tag{6}$$

---

[1]) POGG. Ann. 137, pag. 200. 1869. Die Anwendung des Spectralapparates etc. Tübingen 1871, pag. 45 ff.

[2]) Beiträge z. Farbenlehre, Inaug. Diss. Berlin 1887.

[3]) Beitr. z. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg. Festschrift für v. HELMHOLTZ, Leipzig. 1891, auch separat u. d. T. Ueber den Helligkeitswerth der Spektralfarben bei verschied. absol. Intensität. S. auch v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 2. Aufl., pag. 428 ff. (daselbst weitere Literaturangaben).

die durch die Brechung an der $k$ten Fläche bewirkte Zunahme des auf die Objektseite bezogenen chromatischen Zerstreuungskreises.

Seine ganze Grösse nach der $p$ten Brechung ist, wenn er vor der ersten Brechung = Null war

$$c_0^{(p)} = \sum \Delta (c_0)_k = -(n_1 u_1) \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k. \qquad (6\text{a})$$

In angularem Maasse, bei unendlich fernem Objekt in Luft, beträgt derselbe

$$\gamma_0^{(p)} = \sum \Delta (\gamma_0)_k = + h_1 \sum Q_k \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k \qquad (7)$$

oder, wenn wir den Werth, welchen die rechtsstehende Summe für eine Brennweite des Gesammtsystems = 1 annimmt, mit G bezeichnen

$$\gamma_0^{(p)} = + \left(\frac{h_1}{f}\right) \cdot G. \qquad (7\text{a})$$

Die durch die Chromasie bewirkte Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objekts ist also bei gegebener Construction eines Systems dem Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite einfach proportional und — wie die durch sphärische Aberration bewirkte — in ihrem Winkelwerth von der Grösse der Brennweite selbst unabhängig.

Man kann aus dem gemäss (6a) oder (7) berechneten Zerstreuungskreis, ebenso wie bei der sphärischen Aberration, auch wieder rückwärts die nach der $k$ten Brechung vorhandene Längsaberration berechnen, nämlich

$$ds_p' = (s'_{\lambda+d\lambda} - s_\lambda')_p = -\left(\frac{n_1 u_1}{n_p' u_p'}\right)^2 \left(\frac{n_p'}{n_1 u_1}\right) c_0^{(p)} = -\frac{n_p'}{n_1 u_1} \beta^{(p)2} c_0^{(p)}.$$

Bei unendlich fernem Objekt ist diese Längsaberration zugleich die Variation des Brennpunkts und zwar

$$ds_p' = ds_F' = + \left(\frac{f'}{h_1}\right) f' \cdot \gamma_0^{(p)}.$$

Wie wir vorhin sahen, lässt sich die chromatische Aberration für den Axenpunkt schon bei einem zweifachen Diopter aufheben; bei einem aus drei und mehr Flächen zusammengesetzten Systeme ist man daher im Allgemeinen im Stande, die chromatische und sphärische Aberration für Axenpunkte durch geeignete Wahl der Krümmungen jener Flächen gleichzeitig aufzuheben.

Noch einfacher als die Variation des Bildortes mit der Farbe lässt sich die der Lateral- und Angularvergrösserung bestimmen.

Die Lateralvergrösserung bei der Brechung an einer einzelnen, der $k$ten, Fläche ist nach pag. 63

$$\frac{y_k'}{y_k} = \beta_k = \frac{n_k s_k'}{n_k' s_k},$$

also für ein System von p Flächen

$$\beta^{(p)} = \frac{y_p'}{y_1} = \frac{y_1'}{y_1} \cdot \frac{y_2'}{y_2} \cdot \ldots \ldots \frac{y_k'}{y_k} \cdot \ldots \ldots \frac{y_p'}{y_p}$$

oder

$$\frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_p'} \left(\frac{s_1'}{s_1}\right) \left(\frac{s_2'}{s_2}\right) \ldots \ldots \left(\frac{s_k'}{s_k}\right) \ldots \ldots \left(\frac{s_p'}{s_p}\right),$$

daher

$$\frac{d\beta}{\beta} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s}\right)_k + \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_p'}{n_p'} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s} - \frac{dn}{n}\right)_k = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s-r}\right)_k. \qquad (8)$$

In gleicher Weise ist das Convergenzverhältniss für ein System von p Flächen

$$\frac{u_p'}{u_1} = \frac{u'}{u} = \gamma^{(p)} = \left(\frac{s_1}{s_1'}\right) \cdot \left(\frac{s_2}{s_2'}\right) \cdots\cdots \left(\frac{s_k}{s_k'}\right) \cdots\cdots \left(\frac{s_p}{s_p'}\right),$$

daher

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = -\sum \left(\frac{ds}{s}\right)_k, \qquad (9)$$

eine Gleichung, die auch schon in Verbindung mit (8) aus $\beta\gamma = -(n/n')$ folgt.

Für die praktische Anwendung der vorstehenden Gleichungen (6) bis (9) ist vorausgesetzt, dass ein paraxialer Strahl der Weltenlänge λ von dem gegebenen Objektpunkte aus durch wiederholte Anwendung der Grundformel $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$ und $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ auf die einzelnen Flächen des Systems durch dieses verfolgt sei.

Verfolgt man in derselben Weise einen aus ∞ (parallel zur Axe) einfallenden Strahl durch das System, so erhält man aus den Schnittweiten vor und nach der Brechung an den einzelnen Flächen die Brennweite des Bildraums, wie leicht ersichtlich, zu

$$f' = \frac{h}{tg u'} = \frac{h_1}{(h_p/s_p')} = \left(\frac{s_1'}{s_2}\right) \cdot \left(\frac{s_2'}{s_3}\right) \cdots\cdots \left(\frac{s'_{p-1}}{s_p}\right) \cdot s_p';$$

daher die Variation der hinteren Brennweite mit der Farbe aus den analogen Variationen der Einzelschnittweiten

$$\frac{df'}{f'} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s}\right)_k \qquad (10)$$

und ganz ebenso die relative Variation der vorderen Brennweite df/f aus den Elementen, die sich bei der Durchrechnung eines in entgegengesetzter Richtung, von der Bildseite her, durch das System tretenden Strahls ergeben.

Sekundäres Spectrum.

Die bisherigen Erörterungen fussen auf der Thatsache, dass der Brechungsexponent n jedes Mediums eine Function der Wellenlänge sei, ohne weiter auf die Natur dieser Function Rücksicht zu nehmen. Die genaue Beschaffenheit derselben ist trotz der zahlreichen, seit NEWTON über sie angestellten experimentellen und speculativen Untersuchungen noch nicht endgültig festgestellt (s. den. Art. Dispersion). Von ihr hängen nun gewisse Erscheinungen sekundärer Natur ab, welche mit jeder Art von Achromasie verbunden sind, und deren allgemeiner Charakter sich auch schon auf Grund desjenigen, was bisher über die Gesetze der Dispersion bekannt ist, mit genügender Sicherheit kennzeichnen lässt.

Während nämlich NEWTON und u. A. auch noch WOLLASTON annahmen, dass die relative Dispersion verschiedener Substanzen in allen Theilen des Spectrums eine constante sei, haben schon CLAIRAUT, BLAIR, dann durch eine Reihe kritischer Experimente BOSCOVICH[1]) und schliesslich, entsprechend seiner exakten Beobachtungsmethode ganz unwiderleglich, FRAUNHOFER[2]) erwiesen, dass dies nicht der Fall sei: dass vielmehr bei Spectren, welche mit Prismen verschiedener Substanz entworfen werden, die Ausdehnung der einzelnen Farbenbezirke in einem sehr variablen Verhältniss zur Gesammtausdehnung stehe, oder genauer: dass das Verhältniss der Dispersionen (Differenzen der Brechungsexponenten für verschiedene Wellenlängen) in verschiedenen Theilen des Spectrums von Substanz zu Substanz erheblich variire. So zeigte FRAUNHOFER[3]), dass das Verhältniss der Disper-

[1]) Ueber diese drei vergl. BREWSTER, Treatise on new philos. Instruments, Edinburgh 1813, pag. 300 und 353.

[2]) Denkschr. Münch. Akad. für 1814/15, pag. 209. Ges. Schriften pag. 14.

[3]) a. a. O. Tab. IV.

sionen zweier Gläser am rothen Ende des Spectrums (von Linie B bis Linie C) zu demjenigen am violetten Ende (Linie G bis Linie H) variiren könne von 1·9 zu 2·3 oder etwa wie 1:1·2; die gleichen Verhältnisse bei Glas und Wasser von 2·6 zu 3·7 oder fast wie 1:1·5 u. dergl. mehr.

Daraus folgt, dass, wenn man n als Function von λ darstellen will — etwa als eine Potenzreihe — in dieser jedenfalls $dn/d\lambda$ noch Function von λ bleiben muss. Eine genauere Discussion des über Dispersion vorliegenden Beobachtungsmaterials führt dazu[1]) — wenn überhaupt — dann eine Potenzreihe mit wenigstens drei Coëfficienten zur vollständigen Darstellung der Dispersion aller Substanzen anzunehmen, wenn auch die vieler Substanzen durch eine zweiconstantige Reihe bereits sehr vollkommen dargestellt wird[2]).

Die Form des betreffenden Ausdrucks ist gewöhnlich (nach CAUCHY und BRIOT)

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} + \ldots \qquad (11)$$

Die Achromasie — sei es der Brennpunkte oder Brennweiten, Bildpunkte oder Convergenzverhältnisse, welche mit einem Paar Linsen bewirkt wird deren Substanzen nicht zufällig proportionale Coëfficienten b, c, d besitzen, ist nun in Folge der Abhängigkeit der Differentialquotienten $dn/d\lambda$ oder dn/dl (wo $l = 1/\lambda^2$) von λ bezw. l, stets eine unvollständige. Ihr Charakter ist im allgemeinen der, dass die Achromasie (Identität) des fraglichen Elementes immer nur für je zwei Wellenlängen vorhanden ist; von der Stelle λ an, für welche die Variation = Null gemacht und daher ein (Maximum oder) Minimum ist, ist paarweise nach beiden Seiten des Spectrums hin für je eine Stelle der einen Spectralhälfte das betreffende Abbildungselement identisch mit dem für eine Stelle der andern Spectralhälfte. Dieser besondere Charakter der Unvollkommenheit der Achromasie — von BLAIR »secundäres Spectrum« genannt — entspringt allein der zufälligen besonderen Beschaffenheit des Dispersionsverlaufs in den bekannten Substanzen, namentlich in den Gläsern, und ist kein naturnothwendiger Es giebt vielmehr im Gegentheil auch Glasarten und andere Substanzen, deren Combination einen wesentlich anderen Gang des secundären Spectrums herbeiführt; so die neuen Borat- und Phosphatgläser, welche das Jenaer Glaswerk seit 1884 fabrikatorisch herstellt[3]).

Ich habe a. a. O. eine einfache Methode angegeben, um die Grösse des secundären Spectrums, d. h. der Focusdifferenz zweier zu einem System combinirter unendlich dünner Linsen aus den Dispersionswerthen zu berechnen, wenn festgesetzt ist, für welche Wellenlängen das System gleiche Brennweiten (und Brennpunkte) haben soll.

Ist nämlich das System so construirt, dass die Brennweite für die Wellenlänge λ_a gleich ist der für die Wellenlänge λ_b, so haben wir nach Gleichung (4) mit ein wenig veränderter Bezeichnung

$$\varphi_a = \frac{1}{f_a} = (n_a' - 1)k' + (n_a'' - 1)k'' = \varphi_b = \frac{1}{f_b} = (n_b' - 1)k' + (n_b'' - 1)k'',$$

woraus sich

$$k' = (\rho_1' - \rho_2') \qquad \text{und} \qquad k'' = (\rho_1'' - \rho_2'')$$

berechnen zu

---

[1]) CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 6, pag. 341 1886.

[2]) vergl. z. B. WÜLLNER, Lehrb. d. Exper. Physik 2, pag. 156, Leipz. 1882 u. W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichts in Gläsern, Leipz. 1874, § 1.

[3]) Vergl. CZAPSKI a. a. O. und das Productionsverzeichniss des Jenaer Glaswerks.

$$k' = \frac{1}{f}\frac{1}{\Delta n'}\frac{1}{\nu' - \nu''} \quad \text{und} \quad k'' = -\frac{1}{f}\frac{1}{\Delta n''}\frac{1}{\nu' - \nu''},$$

wenn hier

$$\Delta n' = n_b' - n_a'; \qquad \Delta n'' = n_b'' - n_a''$$

$$\nu' = \frac{n' - 1}{\Delta n'} \quad \text{und} \quad \nu'' = \frac{n'' - 1}{\Delta n''}$$

bedeutet. Die Brennweite der Combination für eine andere Wellenlänge λ_x ist dann gegeben durch

$$\varphi_x = \frac{1}{f_x} = (n_x' - 1)k' + (n_x'' - 1)k''.$$

Demnach

$$\varphi_a - \varphi_x = (n_a' - n_x')k' + (n_a'' - n_x'')k''$$

$$\varphi_b - \varphi_x = (n_b' - n_x')k' + (n_b'' - n_x'')k''$$

oder

$$\frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{n_a' - n_x'}{\Delta n'} - \frac{n_a'' - n_x''}{\Delta n''}\right) = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{a,\,x}}{\Delta n'_{a,\,b}} - \frac{\Delta n''_{a,\,x}}{\Delta n''_{a,\,b}}\right)$$

und

$$\frac{f_x - f_b}{f} = \frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{b,\,x}}{\Delta n'_{a,\,b}} - \frac{\Delta n''_{b,\,x}}{\Delta n''_{a,\,b}}\right). \tag{12}$$

A. a. O. habe ich die Grösse des nach diesen Formeln berechneten sekundären Spectrums für mehrere Combinationen von Glasarten angegeben und z. Th. graphisch dargestellt. Es ist z. B. bei der Combination eines Silicat-Crownglases englischer Art mit einem mittelschweren Flintglas $\left(\nu' = 60{\cdot}2,\ \nu'' = 36{\cdot}2,\ \text{wenn}\ \nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}\right)$ bei der Brennweite 1 und einer solchen Achromatisirungsweise, dass $f_F = f_C$:

$$f_{G'} - f_F = f_{G'} - f_C = +\,0{\cdot}00179$$

$$f_D - f_F = f_D - f_C = -\,0{\cdot}00046$$

$$f_{A'} - f_F = f_{A'} - f_C = +\,0{\cdot}00113.$$

Mit Hilfe einer Dispersionsformel wie (11) erhält man für einige Jenaer Glasarten folgende Tabelle der Abweichungen:

Werthe der Differenzen $f_\lambda - f_{0{\cdot}55\mu}$ in Tausendteln von $f_{0{\cdot}55\mu}$.

λ in Mikron	0·77	0·73	0·69	0·65	0·61	0·57	0·53	0·49	0·45	0·41
S. 60 — O. 103	+ 1·79	+ 1·39	+ 0·98	+ 0·58	+ 0·25	+ 0·03	+ 0·04	+ 0·44	— 1·51	+ 3·70
S. 30 — S. 7	+ 0·88	+ 0·69	+ 0·48	+ 0·29	+ 0·12	+ 0·02	+ 0·03	+ 0·21	+ 0·71	+ 1·69
S· 30 — S. 8	— 0·04	— 0·02	— 0·01	± 0·00	± 0·00	± 0·00	+ 0·01	+ 0·04	+ 0·21	+ 0·79

Fig. 36 veranschaulicht den Verlauf der Focusdifferenzen bei diesen drei Combinationen.

Die Constanten der hier angenommenen Gläser sind nach dem Productions-Verzeichniss der Jenaer Glasschmelzerei folgende:

Fabr. No.	Chemische Charakter	n_D	$n_F - n_C$	$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = \nu$	$n_D - n_{A'}$	$n_F - n_D$	$n_{G'} - n_F$
O. 60	Calcium-Silicat-Crown	1·5179	0·00860	60·2	0·00553 0·643	0·00605 0·703	0·00487 0·566
O. 103	Gewöhnl. Silicat-Flint	1·6202	0·01709	36·2	0·01034 0·605	0·01120 0·714	0·01041 0·609
S. 30	Schweres Barium-Phosphat-Crown . . .	1·5760	0·00884	65·2	0·00570 0·644	0·00622 0·703	0·00500 0·565
S. 7	Borat-Flint	1·6086	0·01375	44·3	0·00864 0·628	0·00974 0·708	0·00802 0·583
S. 8	Borat-Flint	1·5736	0·01129	50·8	0·00728 0·645	0·00795 0·704	0·00644 0·571

Mit A' ist die rothe Kalilinie ($\lambda = 0\cdot7677$), mit G' die blaue Wasserstofflinie H_γ ($\lambda = 0\cdot4341$) bezeichnet. Die in kleiner Schrift unter die Beträge der partiellen Dispersion gesetzten Zahlen sind die Verhältnisse dieser partiellen Dispersionen zur gesammten ($n_F - n_C$).

Obige Tabelle giebt ein Bild von der Grösse und dem Gange des secundären Spectrums bei binären Combinationen aus älteren Gläsern und von der Veränderung seiner Grösse und seines Ganges, die durch Anwendung mancher von den neuerdings hergestellten Glasarten möglich geworden ist. Ihr Inhalt stimmt im wesentlichen überein mit den Resultaten, welche H. C. VOGEL[1]), HASSELBERG[2]), M. WOLF[3]) u. A. durch direkte Messungen der Focusdifferenzen von Fernrohrobjektiven erhalten haben.

(Fig. 36.)

Da, wie wir oben bemerkten, die verschiedenen Theile des Spectrums sehr verschiedene Helligkeit besitzen, so ist es sehr wichtig, die Achromasie, d. h. das sekundäre Spectrum, so zu gestalten, dass es möglichst wenig störend wirkt, also die hellsten Strahlen in einem möglichst engen Raum vereinigt werden. Ein rationelles Verfahren hierzu gab bereits FRAUNHOFER an; doch führte dasselbe nicht zu befriedigender Uebereinstimmung mit der praktischen Erfahrung, vielleicht in Folge der Ungenauigkeit seiner Bestimmung der relativen Helligkeiten der Spectralbezirke. Er schlug nämlich vor, alle Dispersionsverhältnisse *pro rata* ihrer Lichtmenge (Produkt aus Helligkeit und Ausdehnung des betreffenden Spectralbezirks) in Rechnung zu ziehen. Ein ähnliches Verfahren wandten STEINHEIL und SEIDEL an (a. a. O.). In besserer Uebereinstimmung mit der Erfahrung

[1]) Monatsber. Berl. Akad. 1880, pag. 433. Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 22, pag. 142. 1888.

[2]) Mél. math. et astr. de l'Acad. de Petersb. 6, pag. 669. 1888.

[3]) WIED. Ann. 33, pag. 212. 1888. Ausführliche Referate über diese Arbeiten dieser drei Forscher in Ztschr. f. Instkde. 8, pag. 246; 9, pag. 16.

ist der von SCHEIBNER[1]) gewählte Modus: das Verhältniss dn'/dn als Grenzwerth (Differentialquotienten) aus empirischen Dispersionsformeln der beiden Substanzen abzuleiten und zwar für die Wellenlänge der hellsten Stelle des Spectrums $\lambda =$ ca. 0·55 μ [2]). Dies ist in obiger Tabelle geschehen. Fast dasselbe Ergebniss wird erhalten, wenn man die Identität der zu achromatisirenden Grösse (Bildort, Bildgrösse etc.) für die C- und F-Linie (rothe und grüne Wasserstofflinie H_α, H_β) herstellt.

Die letzteren Regeln gelten für Instrumente, deren Bilder direkt vom Auge wahrgenommen werden sollen (dessen Chromasie natürlich mitbestimmend ist). Sollen die Bilder in anderer Weise wirken, z. B. auf photographische Platten so ist deren Empfindlichkeit nach Wellenlänge und Intensität in analoger Weise zu berücksichtigen.

Eine Achromasie höherer Ordnung, bei welcher also statt für je zwei für je drei Wellenlängen Identität der Bilder nach Ort oder Grösse vorhanden ist, lässt sich bei binären — aus zwei Linsen zusammengesetzten — Systemen, wie bemerkt, nur erreichen durch Anwendung einiger von den neuen Jenaer Glasarten[3]); unter Benutzung der gewöhnlichen Glasarten nur dadurch, dass man das System aus mindestens drei Linsen zusammensetzt, deren Substanzen hinreichend verschiedene Dispersionsverhältnisse besitzen[4]). Es ergeben sich die entsprechenden Krümmungsmaasse der (als verschwindend dünn und in Contakt befindlich vorausgesetzten) drei Linsen k', k'', k''' einfach durch Auflösung der drei Gleichungen, welche hier an Stelle der oben betrachteten zwei Bedingungsgleichungen für die Achromasie treten. Es ist wohl kaum nöthig, dieselben hier aufzuführen. Ich will nur bemerken, dass man zu relativ sehr grossen Krümmungsmaassen kommt, wenn man die Dispersionsverhältnisse der drei Substanzen nicht angemessen auswählt[5]).

Die durch das secundäre — oder im letzteren Falle tertiäre und bei noch weiter gehender Achromatisirung quaternäre etc. — Spectrum hervorgerufenen Zerstreuungskreise sind, ebenso wie die des primären Spectrums der relativen Oeffnung (Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite) des Systems proportional. Von erheblich grösserem Einfluss auf die Achromasie der Bilder als diese von den höheren Gliedern der Dispersionsformeln abhängigen Fehler ist schon bei mässigen relativen Oeffnungen (des Systems) die

Variation der von der Kugelgestalt herrührenden (sphärischen) Aberrationen mit der Wellenlänge,

insbesondere der schlechthin so genannten »sphärischen Aberration«, nämlich derjenigen für Axenpunkte. Wenn diese Aberration für eine bestimmte Wellenlänge λ_0 aufgehoben ist, so wird sie es im allgemeinen nicht zugleich auch für

[1]) Abh. Sächs. Akad. 11, pag. 565. 1876.

[2]) Nach den Messungen von A. KÖNIG wandert das Maximum der Helligkeit im Sonnenspectrum bei zunehmender Gesammtintensität desselben von $\lambda = 0{\cdot}53\,\mu$ bis $\lambda = 0{\cdot}61\,\mu$.

[3]) Früher wurde in Ermangelung geeigneter fester Körper wiederholt die Anwendung von Flüssigkeiten zwischen gekrümmten Platten oder Glaslinsen vorgeschlagen und versucht von S. BLAIR, Trans. Edinb. Soc. 3, pag. 3. 1791. BARLOW, Phil. Trans. 1828, pag. 105, 313, auch ibid. 1829, 1831, 1833.

[4]) Dies wohl zuerst von BOSCOVICH hervorgehoben, Diss. quinque ad dioptric. pertin. Wien 1764.

[5]) Ueber solche und verwandte Bestrebungen speciell auf dem Gebiete der Fernrohroptik hat A. SAFARIK, Vierteljahrschr. d. astr. Ges. 17, pag. 13. 1882, über eben solche auf dem Gebiete der Mikroskopoptik E. ABBE, Ber. über die 1876er Ausstellung wiss. App. in London, Braunschweig 1878, Bd. 1., pag. 415, zusammenfassend berichtet.

andere Wellenlängen sein. Gewöhnlich besteht dann vielmehr wegen der stärkeren Dispersion bei den (dispansiven) Flintgläsern in dem System sphärische Uebercorrection für kürzere und sphärische Untercorrection für grössere Wellenlängen als λ_0. Diese »chromatische Differenz der sphärischen Aberration« (nach der Bezeichnung ABBE's) ist nun, wie leicht einzusehen, gleichbedeutend mit einer »sphärischen Differenz der chromatischen Aberration«, d. h. einer Variation der letzteren von Zone zu Zone. In dem vorgedachten Falle würde bei richtiger chromatischer Correction der centralen Zone eine nach dem Rande der Oeffnung hin wachsende chromatische Uebercorrection eintreten (Schnittweite der kurzwelligen Strahlen grösser als die der langwelligen). Bei Systemen von erheblicher Oeffnung kann diese Uebercorrection — und die sphärische Differenz der chromatischen Aberration über haupt — so stark werden, dass in manchen Zonen gar keine paarweise Coincidenz der Bildpunkte mehr eintritt, so dass der Charakter der Aberration dort ganz der einer einfachen uncorrigirten Linse wird. Bei mässiger Oeffnung tritt nur eine mit der Distanz der betrachteten Zone von der bestcorrigirten wachsende Verschiebung des Minimums der Bildweite gegen den Rand des Systems hin nach den langwelligen (Uebercorrection) gegen die centrale Zone hin nach den kurzwelligen Strahlen (Untercorrection) ein.

Die auf diese Weise eintretende chromatische Aberration kann, wie bemerkt, schon bei mässigen Oeffnungen von erheblich grösserer Bedeutung werden als die secundäre Aberration in Folge der Disproportionalität der Zerstreuungsverhältnisse in verschiedenen Theilen des Spectrums. Um sie möglichst unschädlich zu machen, muss man, wenn man sie nicht ganz beseitigen kann, die beste chromatische Correction nicht in die centrale Zone des Systems legen, sondern in eine passend zwischen dieser und dem Rande gelegene — so nämlich, dass der Zerstreuungskreis, welcher durch die dann nach der Mitte hin zunehmende Untercorrection hervorgerufen wird, etwa von gleicher Grösse (aber entgegengesetztem Charakter) wird, als der, von der nach dem Rande zu wachsenden chromatischen Uebercorrection herrührende[1]). Die maximale Grösse dieser entgegengesetzt gleichen und sich überdeckenden Zerstreuungskreise bleibt dann erheblich unter derjenigen, welche bei centraler chromatischer Correction eintreten würde — da ja die sphärische Aberration für je eine Wellenlänge, welche ihre Ursache ist, selbst bei kleinen Oeffnungsverhältnissen schon mit der dritten Potenz der Apertur wächst.

Diese Verhältnisse, auf welche ich hier nicht noch näher eingehen will, kann man sich durch graphische Darstellung (Fig. 37 a und b, Taf. I) veranschaulichen[2]).

[1]) S. z. B. KERBER, Centr.-Zeitg. f. Opt. u. Mech. 7, pag. 157. 1886, welcher findet dass die chromatische Correctur in der Zone $h = 0{\cdot}866\,h$ stattfinden müsse.

[2]) In diesen beiden Figuren sind der Deutlichkeit wegen die (langwelligen) rothen Strahlen nur auf der einen Seite der Axe angegeben, die (kurzwelligen) blauen nur auf der anderen Seite. Beide stellen Systeme vor, welche sphärisch für eine mittlere Wellenlänge — etwa Grüngelb, als der optisch intensivsten Stelle des Spectrums — corrigirt sind, für roth aber sphärisch unter-, für blau übercorrigirt. Chromatisch ist jedoch das System Fig. 37a in der centralen Zone (Axe) corrigirt; Fig. 37b für die Randzone. Im ersteren Falle haben die Randstrahlen, im letzteren Falle die nach der Axe zu gelegenen eine unverhältnissmässig grosse chromatische Längsabweichung ($c \cdot a$; $c' \cdot a'$) und bewirken einen ihrer Axenneigung entsprechenden Zerstreuungskreis. Der letztere wird am kleinsten bei chromatischer Correctur in einer mittleren Zone. Man kann z. B. offenbar die Oeffnung des Systems Fig. 37b so weit vermehren, dass seine Randstrahlen einen Zerstreuungskreis von gleicher Grösse und Lage hervor bringen, als seine Axenstrahlen, ohne die chromatische Correction des gesammten Systems gegen vorher zu verschlechtern.

Die sphärische Aberration sucht man natürlich, wenn sie nur für eine Wellenlänge erreicht werden kann, für diejenige herzustellen, welche — je nach der Bestimmung des Instruments physiologisch, thermisch oder chemisch — den intensivsten Eindruck macht.

GAUSS[1]), welcher auf diese Umstände besonders nachdrücklich hinwies, gab auch bereits eine Construction für Fernrohrobjektive an, bei welcher die sphärische Aberration für zwei Wellenlängen und die chromatische für mindestens zwei Zonen des Systems gehoben ist. (Erster Vorschlag hierzu von D'ALEMBERT. Seitdem ist diese Construction und ähnliche mehrfach Gegenstand der Diskussion und Neuberechnung gewesen[2]), insbesondere ist eine analoge auch für Mikroskopobjektive angewandt worden[3]), bei welchen sie, entsprechend deren grösserer Apertur, auch überwiegende Vortheile gewährt, zumal, wenn gleichzeitig durch geeignete Wahl der Glasarten auch das secundäre Spectrum beseitigt ist[4]).

Variation des Aplanatismus mit der Wellenlänge. Damit neben der durch die Aufhebung der sphärischen Aberration herbeigeführten Abbildung eines axialen Objektpunkts noch die eines ihm seitlich benachbarten, d. h. die eines zur Axe senkrechten Flächenelements stattfinde, musste bei Systemen grosser Apertur der Bedingung genügt sein (pag. 102), dass für das betreffende Paar von Axenpunkten

$$\frac{n_1 \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = const$$

sei. Damit bei solchen Systemen die Abbildung eines Flächenelements für mehrere Wellenlängen zugleich stattfinde, muss für diese auch die entsprechende Constanz der Sinusverhältnisse conjugirter Strahlen gleichzeitig bestehen. Soll z. B. Aplanasie für zwei unendlich benachbarte Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ vorhanden sein, so muss zu obiger Gleichung für λ noch die durch deren Variation nach λ sich ergebende hinzutreten:

$$\frac{du}{\tang u} + \frac{dn}{n} = \frac{du'}{\tang u'} + \frac{dn'}{n} + \frac{d\beta}{\beta} \tag{13}$$

oder

$$\Delta\left(\frac{du}{\tang u}\right) = -\Delta\left(\frac{dn}{n}\right) - \frac{d\beta}{\beta}.$$

ABBE[5]) hat Systeme, welche frei von sekundärem Spectrum und zugleich aplanatisch für mehrere Farben sind, als »apochromatische« bezeichnet und solche auf mehreren Gebieten praktisch realisirt.

Es würde nach Erfüllung von (13) jedoch noch eine für alle Zonen constante Verschiedenheit der Vergrösserung bestehen (Fig. 38, Taf. I), welche nach dem Rande des Sehfeldes zu wachsend in Geltung tritt. Soll auch diese in Wegfall kommen, so muss $d\beta = 0$ sein, und wenn $du = 0$ gesetzt, d. h. ein originäres oder sonst aberrationsfreies Objekt vorausgesetzt wird, so geht (13) in die Bedingung über

$$\frac{du'}{\tang u'} = \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'}. \tag{13a}$$

Die Grösse $\frac{du'}{tg u}$ und die chromatische Längsabweichung kann aus den Elementen, welche den Weg eines beliebig geneigten Strahls im Hauptschnitt eines centrirten Systems bestimmen,

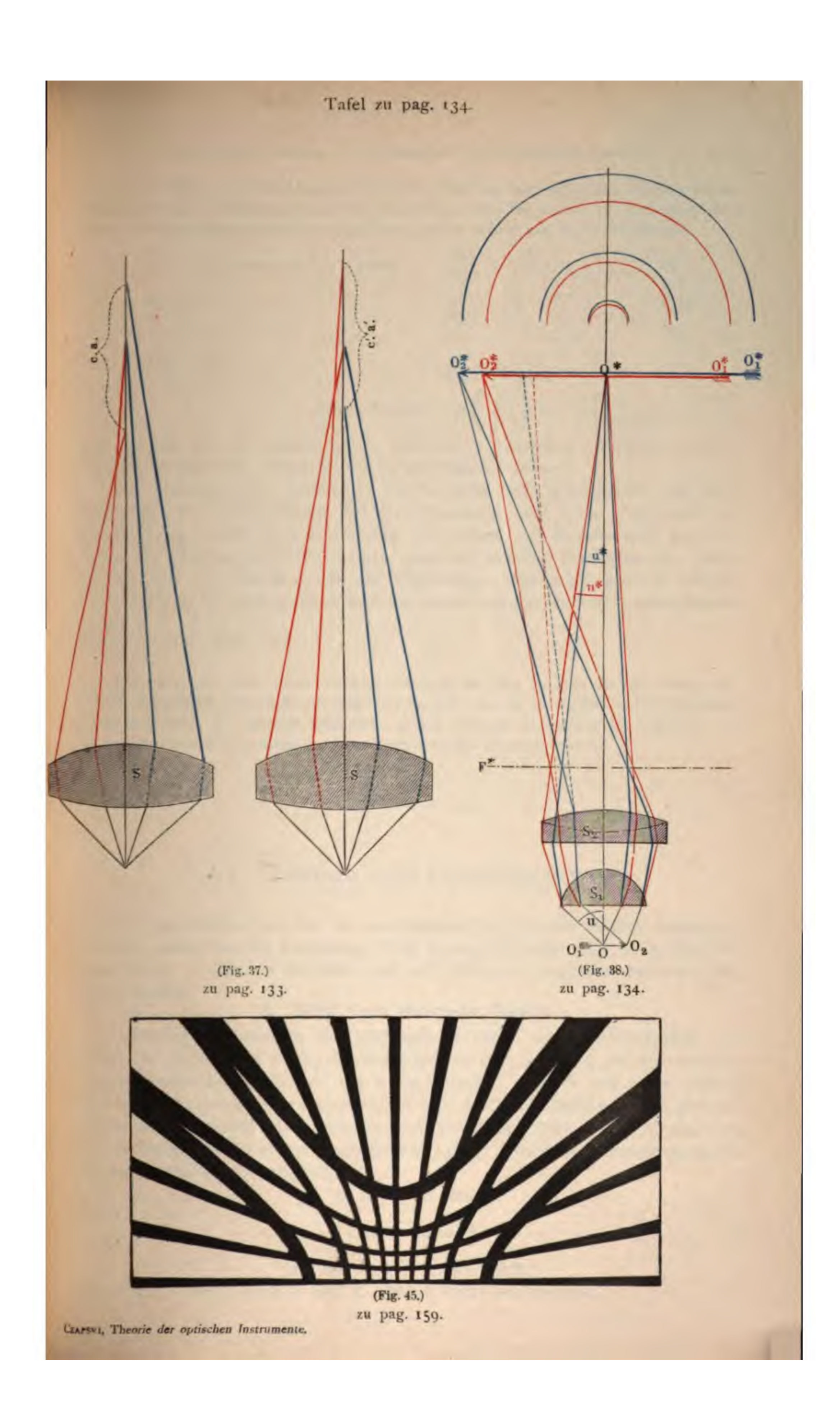
[1]) Zeitschr. f. Astronomie v. LINDENAU 4, pag. 345, Werke 5, pag. 507.

[2]) Eine (nicht ganz einwandsfreie) Zusammenstellung der Ergebnisse nebst Literaturnachweisen gab H. KRÜSS, Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 7, 53, 83. 1888.

[3]) E. ABBE, Journ. R. Micr. Soc. (2) 2, pag. 812. 1879.

[4]) E. ABBE, Sitzber. med. naturw. Ges. Jena f. 1887, pag. 107.

[5]) l. c. pag. 114.



(Fig. 37.)
zu pag. 133.

(Fig. 38.)
zu pag. 134.

(Fig. 45.)
zu pag. 159.

bequem von Fläche zu Fläche berechnet werden, so dass man nicht nöthig hat, die ganze Durchrechnung für jede Wellenlänge besonders auszuführen. Man hat nämlich zur Verfolgung eines Strahls beliebiger Wellenlänge durch irgend eine Fläche gemäss pag. 68/69 das Schema

(a)	$\frac{s-r}{r} \cdot \sin u = \sin i$	woraus	$\frac{du}{\tan u} + \frac{ds}{s-r} = \frac{di}{\tan i}$	(a')
(b)	$\frac{n}{n'} \sin i = \sin i'$	"	$\frac{di}{\tan i} + \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'} = \frac{di'}{\tan i'}$	(b')
(c)	$u + (i' - i) = u'$	"	$du + di' - di = du'$	(c')
(d)	$\frac{r \sin i'}{\sin u'} = s' - r$	"	$\frac{di'}{\tan i'} - \frac{du'}{\tan u'} = \frac{ds'}{s'-r}$	(d')

daher schliesslich $\Delta\left(\frac{ds}{s-r}\right) = -\Delta\left(\frac{du}{\tan u}\right) - \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)$

folgt. Ist also du und ds gegeben und der Strahl von der Wellenlänge λ festgelegt, so werden nach dem rechtstehenden Schema ds' und du' sehr einfach berechnet.

Die chromatischen Variationen der übrigen Kugelgestaltfehler: der Bildkrümmung, des Astigmatismus und der Orthoskopie sind selten Gegenstand der Untersuchung, bezw. ihre Aufhebung Gegenstand der Bemühungen gewesen. Allein die letztere, die Orthoskopie, muss bei manchen Gattungen von Instrumenten von der Variation mit der Wellenlänge unabhängig gemacht werden. Die Bedingung hierfür folgt ohne weiteres aus der entsprechenden Grundbedingung. $\frac{n \tan w}{n' \tan w'} = B$ (pag. 111).

Die Literatur über diesen Abschnitt ist theils im Text, theils in der dem vorigen Abschnitt angehängten Uebersicht mit aufgeführt worden. Da die sphärischen und chromatischen Fehler dem Zweck der optischen Instrumente, scharfe Bilder zu erzeugen, gleich hinderlich sind, so sind dieselben auch meistens im Connex mit einander behandelt worden.

VI. Prismen und Prismensysteme.

Der Specialfall, dass die die verschiedenen brechenden Medien trennenden Flächen sämmtlich die Krümmung Null haben, Ebenen sind, bietet ein hervorragendes praktisches Interesse und soll daher im Folgenden besonders diskutirt werden.

I. Weg eines einzelnen Strahls.

Derselbe ist innerhalb der Einfallsebene durch das Brechungsgesetz und durch die pag. 25 und 26 abgeleiteten Hilfssätze auch in Bezug auf eine beliebig anzunehmende andere Grundebene völlig bestimmt. Sind ϑ und φ die Winkel, welche die Projection eines Strahles auf eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene mit dem Strahl selbst bezw. mit jener Normalen bildet, ϑ' und φ' dieselben für die Projection des gebrochenen Strahls, i und i' Einfalls- und Brechungswinkel, so war ausser der Grundgleichung

$$n \cdot \sin i = n' \sin i'$$

noch

$$n \cdot \sin \vartheta = n' \sin \vartheta' \tag{1}$$

und

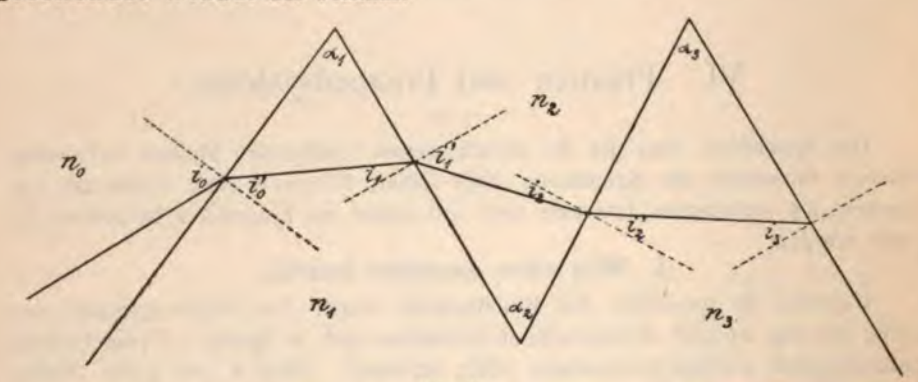
$$n \cdot \sin \varphi \cos \vartheta = n' \sin \varphi' \cos \vartheta',$$

daher aus ϑ und φ auch ϑ' und φ' ohne weiteres berechenbar.

Von den vielen graphischen Constructionen, welche für die Lösung dieser Aufgabe angegeben worden sind[1]), will ich nur die von REUSCH[2]) erwähnen, welche aus Fig. 2, pag. 13, fast unmittelbar zu entnehmen ist. Man schlage um den Einfallspunkt O Halbkugeln mit den Radien n und n' nach dem zweiten Medium zu. Den Punkt P, in welchem die Verlängerung des einfallenden Strahls die erstere Halbkugelfläche trifft, proicire man parallel der Einfallsnormalen auf die zweite Halbkugel nach P', dann ist P' ein Punkt des gebrochenen Strahls.

Liegen mehrere brechende Ebenen vor, so genügen die gleichen Formeln und auch die angegebene graphische Construction, wenn man für erstere als Projectionsebene die zur Schnittlinie je zweier auf einander folgender Ebenen senkrechte den »Hauptschnitt« der beiden Ebenen annimmt und beachtet, dass der Winkel, welchen der an der ersteren Fläche gebrochene Strahl mit jener Ebene bildet, derselbe ist, wie derjenige, welchen er beim Einfall auf die zweite Fläche mit dieser bildet, dass also stets $\vartheta_{k+1} = \vartheta_k'$. Zur Bestimmung von φ_{k+1} aus φ_k' muss der Neigungswinkel der beiden brechenden Ebenen α_k und der zweier auf einander folgender Hauptschnitte gegeben sein. Da die Richtung des Strahls dieselbe bleibt, er mag an einer gegebenen Fläche selbst oder an einer zu dieser parallelen gebrochen werden, so kann für die Construction wie Berechnung der Richtungsänderung durch Brechung in einem Prismensystem angenommen werden, dass dessen sämmtliche Flächen sich selbst parallel bis zum Einfallspunkte verschoben seien. Man hat alsdann für die analytische Verfolgung des Strahlenweges nur eine Reihe sphärische Dreiecke aufzulösen[3]).

Besonders einfach ist der, auch am häufigsten vorliegende Fall, dass die Hauptschnitte aller brechenden Ebenenpaare zusammenfallen, also alle Ebenen auf diesem einen Hauptschnitt senkrecht stehen. Je zwei aufeinanderfolgende Ebenen fasst man unter der Bezeichnung Prisma zusammen, ihre Schnittlinie heisst brechende Kante, der Winkel α, den sie einschliessen, brechender Winkel des Prismas.



(Fig. 39.)

Der Weg eines Strahls durch ein solches Prismensystem bestimmt sich, wenn der Strahl im Hauptschnitt verläuft, folgendermaassen (Fig. 39).

Die Einfalls- und Brechungswinkel des Strahls an den einzelnen Ebenen

---

[1]) RADAU, POGG. Ann. 118, pag. 452. 1863. LOMMEL, ebendort 156, pag. 578. 1876; KESSLER, Jahresb. Gew.-Schule Bochum f. 1880. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 29, pag. 69. 1884. Alle diese behandeln auch den Weg eines Strahls durch ein Prisma.

[2]) REUSCH, POGG. Ann. 117, pag. 241. 1862.

[3]) S. z. B. HERSCHEL, Light. D. Uebers. pag. 82.

seien wie früher mit i_k, i_k' bezeichnet und als positiv gerechnet, wenn man den Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muss, um ihn mit seiner Normalen zur Deckung zu bringen. Die brechenden Winkel α_k der Prismen rechnen wir als positiv, wenn sich ihre Scheitel von einem mit dem Strahle sich Bewegenden und auf die Zeichnungsebene Blickenden links befinden. Die Ablenkung endlich, welche ein Strahl erfährt, rechnen wir als positiv, wenn man den einfallenden Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muss, um ihn mit dem austretenden zur Deckung zu bringen.

Der Weg des Strahls im Hauptschnitt ist dann bestimmt durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n_1 \sin i_0' &= n_0 \sin i_0 \\ i_1 &= i_0' - \alpha_1 \\ n_2 \sin i_1' &= n_1 \sin i_1 \\ i_2 &= i_1' - \alpha_2 \\ &\dots\dots \\ n_p' \sin i_p' &= n_p \sin i_p \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= i_0 - i_0' \\ \varepsilon_1 &= i_1 - i_1' \\ &\dots\dots \\ \varepsilon_p &= i_p - i_p' \end{aligned} \tag{3}$$

daher ist die Gesammtablenkung

$$\varepsilon^{(p)} = \sum_{k=0}^{k=p} \varepsilon_k = i_0 - i_p' - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \alpha_k.$$

$\sum_{k=1}^{k=p} \alpha_k$ ist nichts anderes als der Winkel der letzten gegen die erste brechende Fläche $= \alpha_{1,p}$, also

$$\varepsilon^{(p)} = i_0 - i_p' - \alpha_{1,p}.$$

Diese Ablenkung ist ein Minimum für denjenigen Einfallswinkel i_0, für welchen unter den gegebenen Verhältnissen (n, α)

$$\frac{\delta \varepsilon^{(p)}}{\delta i} = 0 \quad \text{also} \quad \delta i = \delta i_p' \tag{4}$$

ist (natürlich vorausgesetzt, dass $\delta^2 \varepsilon / \delta i^2$ einen positiven Werth hat).

Zur Berechnung von $\delta i_p'$ in Funktion von δi_0 dient das aus (2) abzuleitende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta i_0' &= \frac{n_0}{n_1} \frac{\cos i_0}{\cos i_0'} \delta i_0 \\ \delta i_1' &= \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \delta i_1, \quad \text{worin } \delta i_1 = \delta i_0' \\ &\dots\dots \\ \delta i_p' &= \frac{n_p}{n_p'} \frac{\cos i_p}{\cos i_p'} \delta i_p, \quad \text{worin } \delta i_p = \delta i'_{p-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

also schliesslich

$$\delta i_p' = \frac{n_0}{n_p'} \frac{\cos i_0}{\cos i_0'} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \cdot \dots\dots \frac{\cos i_p}{\cos i_p'} \cdot \delta i_0. \tag{6}$$

Das Verhältniss der Cosinus von Einfalls- und Brechungswinkel an je einer Fläche $\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}$, ist eine Function des Einfallswinkels i_k und des relativen Brechungsexponenten der beiden wirksamen Medien. Bezeichnen wir Produkte durch das Zeichen Π, so ist bei der Minimalablenkung, wo also $\delta i_p' = \delta i_0$

$$n_0 \, \Pi (\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = n_p' \, \Pi (\cos i_k')_{k=0}^{k=p} \tag{7}$$

oder, da fast stets erstes und letztes Medium Luft, $n_0 = n_p' = 1$ ist

$$\Pi (\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = \Pi (\cos i_k')_{k=0}^{k=p} \text{ [1]}. \tag{7a}$$

---

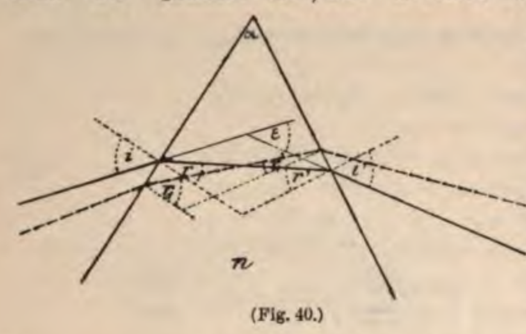
[1]) HERSCHEL, a. a. O. pag. 89.

Wenden wir die letztere Gleichung auf ein einziges, beiderseits vom gleichen Medium umgebenes Prisma an, bei welchem wir der Symmetrie wegen die äusseren Einfallswinkel mit i und i', die inneren mit r und r' bezeichnen (Fig. 40), so muss hier bei der Minimalablenkung

$$\cos i \cdot \cos r' = \cos i' \cdot \cos r \quad \text{oder} \quad \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r'}, \tag{7b}$$

sein. Der Quotient $\cos i/\cos r$ ist nun, wie ersichtlich, dieselbe eindeutige Function von i und n, als der Quotient $\cos i'/\cos r'$ von i' und n. Man hat daher aus $f(i, n) = f(i', n)$

$$i = \pm i'. \tag{7c}$$



(Fig. 40.)

Eine unmittelbare Betrachtung zeigt aber, dass beim einfachen Prisma das Minimum der Ablenkung eines Strahls stattfindet, wenn dieser das Prisma symmetrisch durchsetzt, also wenn $i = -i'$, $r = -r'$ ist. Denn gehe ich unter Voraussetzung eines solchen Verlaufs des Strahls vom Innern des Prismas aus, so ist die Ablenkung, die der Strahl an der einen Fläche erfährt, $\varepsilon = (i - r)$ ebenso gross und trägt zu dem Endeffekt im gleichen Sinne bei als die an der andern Fläche, $\varepsilon' = i' - r'$. Bei einem anderen Strahlengang (s. Fig. 40) ist stets der eine der Winkel r gegenüber der symmetrischen Lage um ebenso viel grösser, als der andere kleiner, da ja dem absoluten Betrage nach stets $[r] + [r'] = \alpha$. Nach dem pag. 13 bewiesenen Satze wächst aber die Ablenkung eines Strahls durch Brechung *caet. par.* mit dem Einfallswinkel immer schneller. Der Zunahme δr des einen Winkels entspricht also eine grössere Zunahme der Ablenkung $\delta\varepsilon$ an dieser Fläche, als die Abnahme $\delta\varepsilon'$ beträgt, welche der gleichgrossen Abnahme $\delta r'$ des anderen inneren Einfallswinkels entspricht. Der verbleibende Ueberschuss der Gesammtablenkung $\delta\varepsilon + \delta\varepsilon'$ ist bei kleinen Werthen δr von der zweiten Ordnung, also in erster Näherung gleich Null, aber, wie gerade diese Betrachtungsweise zeigt, positiv und stetig wachsend bis zu den grössten möglichen Werthen von r oder r'.

Diese grössten Werthe entsprechen den Werthen $\sin i$ bezw. $\sin i' = \pm 1$, d. h. streifendem Ein- bezw. Austritt des Strahls. Ein Prisma, bei welchem der ein- und der austretende Strahl die Flächen streifen, hat den Grenzwinkel $\bar{\ }$, welcher durch die Beziehung $n \sin \bar{\alpha}/2 = 1$, bestimmt ist und nicht gesteigert werden darf, damit überhaupt noch durch das Prisma mittelst blosser Brechung an seinen beiden Flächen Licht hindurchtreten könne. Derselbe beträgt z. B. für

$n =$	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
$\bar{\alpha} =$	100° 34′	91° 10′	83° 37′	77° 22′	72° 4′	67° 30′	63° 30′	60° 0′
$\bar{\varepsilon} =$	79° 56′	88° 50′	96° 23′	102° 38′	107° 56′	112° 30′	116° 30′	120° 0′

Die Ablenkung des Strahls in diesem Falle — bei welchem ebenfalls symmetrischer Durchgang desselben, also Minimalablenkung stattfindet, beträgt $\bar{\varepsilon} = 180° - \bar{\alpha}$ und ist oben mit angegeben.

Bei der Minimalablenkung überhaupt ist

$$r = -r' = \frac{\alpha}{2}; \qquad \varepsilon_0 = 2i - \alpha; \qquad i = \frac{\varepsilon_0 + \alpha}{2},$$

also wegen $\sin i = n \sin r$

$$\sin\frac{\varepsilon_0+\alpha}{2}=n\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{8}$$

Diese Gleichung liegt dem FRAUNHOFER'schen Verfahren der Brechungsexponentbestimmung zu Grunde.

Die Einfalls- bezw. Austrittswinkel auf jeder Seite des Prismas können zwischen 90° und demjenigen Werthe variiren, welchem auf der andern Seite der Winkel 90° entspricht. Innerhalb dieser Grenzen kann also jeder Winkel sowohl als Einfallswinkel vorkommen, als auch — mit dem entgegengesetzten Vorzeichen — als Austrittswinkel. Die Ablenkung $\varepsilon = i - i' - \alpha$ ist für irgend ein Werthepaar $i = p$ und $i' = -q$ dieselbe wie für das Werthepaar $i = q$ und $i' = -p$. Es kommt also innerhalb der durch das Minimum (bei symmetrischem Strahlengang) und das Maximum (bei streifendem Ein- oder Austritt) gegebenen Grenzen jeder Betrag der Ablenkung in zwei Stellungen des Prismas vor, welche ihrerseits symmetrisch zu der Stellung der Minimalablenkung liegen — die Richtung des einfallenden Strahls als fest gedacht.

Allgemein ist bei einem einzelnen Prisma

$$\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha)=n\sin\frac{1}{2}\alpha\frac{\cos\frac{1}{2}(r+r')}{\cos\frac{1}{2}(i+i')}\,. \tag{8a}$$

Besonders einfach und übersichtlich werden diese Verhältnisse bei einem System von Prismen, deren brechende Winkel sehr klein sind, so dass deren Sinus den Bogen selbst gleich gesetzt werden können. Alsdann ist nämlich für je ein solches Prisma in Luft bei kleinen Einfallswinkeln stets

$$\varepsilon=(n-1)\,\alpha \tag{9}$$

und bei einem System von p solchen Prismen ebenso

$$\varepsilon(p)=\sum(\varepsilon_k)=\sum_{k=1}^{k=p}(n_k-1)\alpha. \tag{9a}$$

Wenn der betrachtete Strahl nicht im Hauptschnitt des Prismensystems verläuft, so ist seine Verfolgung, wie wir oben andeuteten, etwas umständlicher. Versteht man unter ϑ und φ die Winkel, welche die Projection des Strahls auf den Hauptschnitt eines Prismas mit dem Strahl bezw. der Einfallsnormalen bildet, dann haben wir bei einem solchen Prisma in Luft gemäss den Gleichungen (1), wenn n der Brechungsindex des Prismas ist, an der ersten Fläche:

$$n\sin i_1'=\sin i_1, \tag{1a}$$

$$\frac{\sin\vartheta_1'}{\sin\vartheta_1}=\frac{1}{n}, \tag{1b}$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1'}=\frac{n\cos\vartheta_1'}{\cos\vartheta_1}\,. \tag{1c}$$

Da für die zweite Fläche des Prismas die Projectionsebene dieselbe ist, so hat man $\vartheta_2=\vartheta_1'$, demnach folgt aus

$$\frac{\sin\vartheta_2'}{\sin\vartheta_2}=n, \tag{1b'}$$

dass $\vartheta_2'=\vartheta_1$ ist, d. h. der austretende Strahl gegen den Hauptschnitt des Prismas ebenso stark geneigt ist, als der eintretende. Bezeichne ich daher kurz mit ϑ den betreffenden Winkel in Luft, mit ϑ' den im Prisma so wird durch

$$n\sin\varphi_1'\cdot\cos\vartheta'=\sin\varphi_1\cos\vartheta \tag{1c'}$$

und

$$\sin\varphi_2'\cos\vartheta=n\sin\varphi_2\cos\vartheta'$$

in Verbindung mit (1b) und der Beziehung $\varphi_2=\varphi_1'-\alpha$ der Weg der Projection des Strahls auf den Hauptschnitt innerhalb dieses bestimmt.

Die Ablenkung η, welche die Projection eines Strahls auf den Hauptschnitt erfährt, ist nun dasselbe wie die Projection der Ablenkung E des Strahls selbst auf den Hauptschnitt, es ist dann $\cos\frac{1}{2}E = \cos\frac{1}{2}\eta \cdot \cos\vartheta$, demnach erstere stets kleiner als letztere. Ihr Minimum η_0 findet, ganz ebenso wie das eines wirklichen Strahls, statt, wenn die Projection in dem Hauptschnitt symmetrisch verläuft, also, wenn $\varphi_1 = -\varphi_2' = \frac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)$; sie ist daher aus (1c') bestimmt gemäss

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) \cdot \cos\vartheta = n \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \cos\vartheta'. \tag{10}$$

Für $\vartheta = 0$ wird die Bestimmungsgleichung und alle in sie eintretende Grössen dieselben, wie für einen Strahl im Hauptschnitt, folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)_{\vartheta=0} = n \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha). \tag{8}$$

Daher allgemein, für andere Werthe von ϑ

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha)\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}. \tag{10a}$$

Nun ist stets $\vartheta' < \vartheta$, also $\cos\vartheta'/\cos\vartheta > 1$, daher auch stets

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) > \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha).$$

Folglich hat *a fortiori* das Minimum der Ablenkung eines ausserhalb des Hauptschnitts verlaufenden Strahls einen grösseren Betrag als das eines im Hauptschnitt verlaufenden[1]).

Krümmung der Spectrallinien. In Folge dieser Verhältnisse werden Strahlen, die von den Punkten einer zur Prismenkante parallelen Geraden ausgehen und unter verschiedenen Winkeln gegen den Hauptschnitt des Prismas verlaufen (z. B. sich alle in einem Punkte — etwa in der Pupille des Beobachters — kreuzen) verschiedene Ablenkung erfahren. Die geringste Ablenkung erfährt derjenige Strahl, welcher mit jenem Kreuzungspunkt in demselben Hauptschnitt des Prismas liegt, die anderen desto grössere Ablenkung, je grössere Winkel sie beim Einfall mit dem Hauptschnitt bilden. Wenn diese Strahlen die Axen von Büscheln sind, deren Spitzen in jener Geraden liegen, so wird das Bild der Geraden im Sehfeld gekrümmt erscheinen, einen Bogen bilden, dessen Scheitel in dem durch den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen (z. B. der Pupille des durch das Prisma blickenden Auges) gehenden Hauptschnitt liegt[2]).

Die Ablenkungen der von einer zur Prismenkante parallelen Geraden aus in verschiedenen Neigungen zum Hauptschnitt einfallenden Strahlen werden nach CORNU[3]) durch dieselbe Formel dargestellt, wie die Ablenkung des im Hauptschnitt verlaufenden Strahls, wenn man dem brechenden Medium in Bezug auf jeden Strahl an Stelle von n den Brechungsexponenten

$$n_\vartheta = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\,\tan^2\vartheta}$$

zuertheilt.

Bei den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf Prismensysteme, deren Hauptschnitte zusammenfallen, und auf Strahlenbüschel, deren Axen in diesem Hauptschnitt verlaufen.

---

1) Vergl. REUSCH a. a. O., pag. 245; HEATH, Treatise, pag. 31.

2) Genauere Berechnung der Bildkurve bei DITSCHEINER, Wiener Sitzber. 51, pag. 368. 1865; POGG. Ann. 129, pag. 336. 1866; und HEPPERGER, Wien. Sitzber. 92, pag. 109. 1885.

3) Réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque. Ann. de l'Ec. norm. (2) 1, pag. 231. 1872. vergl. auch CHRISTIE, Note on the curvature of lines in the spectrum an the method of correcting it. Monthly Not. 34, pag. 263. 1875. Bemerkgn. hierzu v. SIMMS ibid. pag. 363. CROVA, Etudes des aberrations des prismes et de leur influence sur les observations spectroscopiques. Ann. de chim. et de phys. (5) 22, pag. 513. 1881.

II. Abbildung durch Prismensysteme.

Beziehungen zwischen conjugirten Punkten. Astigmatismus.

Die Modificationen, welche ein von einem leuchtenden Punkte ausgehendes breites oder enges Büschel bei normaler wie schiefer Incidenz durch Brechung an einem Systeme von Ebenen — wie ein Prismensatz ein solches vorstellt — erfährt, werden ohne weiteres aus denjenigen bei der Brechung an Kugelflächen abgeleitet, indem man deren Radien sämmtlich gleich Null setzt. Die Möglichkeit einer Abbildung durch solche Brechungen, sowie deren Grenzen und Fehler lassen sich unmittelbar aus den früher angestellten Betrachtungen auf den vorliegenden Fall übertragen.

Bei senkrechter Incidenz des Haupstrahls ist die Abbildung in dem ihn umgebenden fadenförmigen Raume symmetrisch um ihn. Zwischen den Scheitelabständen von Objekt und Bild findet bei jeder Brechung die Beziehung statt (vergl. pag. 62 unten)

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \tag{11}$$

Das Convergenzverhältniss in conjugirten Punkten ist constant $\gamma = n/n'$, ebenso die Lateralvergrösserung $\beta = +1$. In der That repräsentirt eine brechende Ebene und ebenso ein System von solchen den in einem früheren Abschnitt (pag. 45) hervorgehobenen Fall der »teleskopischen« Abbildung.

Die Abbildung bei normaler Incidenz ist auf unendlich kleine Büschelöffnungen beschränkt. Ein homocentrisches Büschel endlicher Oeffnung ergiebt eine Kaustik[1]), deren beide Theile die geometrischen Oerter der ersten und zweiten Brennpunkte der von jenem Punkte ausgegangenen schiefen Elementarbüschel sind, in welche man das ganze Büschel zerlegt denken kann.

Die Abbildung kann für mehrere Ebenen eine solche bei normaler Incidenz natürlich nur dann bleiben, wenn diese sämmtlich einander parallel sind oder sehr kleine Winkel mit einander bilden. Andernfalls wird die Axe der Abbildung zu den Normalen der folgenden Flächen geneigt und wir haben es zu thun mit der

Abbildung bei schiefer Incidenz des Hauptstrahls. Das Büschel erfährt dann die pag. 69 ff. beschriebene astigmatische Veränderung. Die Abbildung zerfällt in zwei getrennte, auf je eine — zur Einfallsebene senkrechte (sagittale) und ihr parallele (tangentiale) — Ebene beschränkte mit verschiedenen Grundfaktoren[2]). Die, in dem vorliegenden Falle, sehr leicht auch unmittelbar abzuleitenden Beziehungen zwischen den Scheitelabständen conjugirter Punkte und den Convergenzverhältnissen in ihnen folgen aus Gleichung (1) und (2) für den Sagittalschnitt zu

---

[1]) S. Literatur über Kaustiken, oben pag. 19, ferner u. A. O. RÖTHIG, Probleme der Brechung etc., pag. 49. Leipzig 1876. J. RITZ, Beob. u. Berechn. über Brechung homoc. Lichts an n parall. Ebenen. Progr. Handelsschule, München 1879. TAIT, Light, pag. 87.

[2]) Die Richtung der Brennlinien ist hier ebenso wie in dem allgemeineren früher behandelten Falle bestimmt: als senkrecht zum Hauptstrahl und in, bezw. senkrecht zu der Einfallsebene gelegen — bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung. Die genauere Ermittelung derselben — analog zu den gleichartigen pag. 22 erwähnten Untersuchungen von MATTHIESSEN für Brechung an Kugelflächen — haben für den Fall eines Prismas in Luft, REUSCH a. a. O. und besonders P. ZECH, Ztschr. f. Math. u. Physik 24, pag. 168. 1879, vorgenommen.

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \tag{11}$$

und

$$\gamma_s = \frac{dv'}{dv} = \frac{s}{s'} = \frac{n}{n'},$$

also identisch mit den Beziehungen für senkrechte Incidenz des Hauptstrahls.

Im Tangentialschnitt wird gemäss Gleichung (3b) auf pag. 73

$$\frac{n'}{t'} = \frac{n}{t} \cdot \frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'} \quad \text{oder} \quad t' = \frac{n'}{n} \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} t$$

und (12)

$$\gamma_t = \frac{du'}{du} = \frac{t}{t'} \frac{\cos i'}{\cos i} = \frac{n \cos i}{n' \cos i'}.$$

Ein homocentrisches Büschel ($t = s$) erhält also durch die einmalige Brechung unter den Winkeln i, i' die astigmatische Differenz

$$(t' - s') = \frac{n'}{n} t \left(\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} - 1 \right). \tag{13}$$

Die Gleichungen (11) und (12) für die Bildorte gestatten den Astigmatismus zu berechnen, welchen ein Büschel durch die Brechung in einem System von p-Prismen erhält[1]).

Man hat hierzu zwei Systeme von je $2(p + 1)$ Gleichungen, nämlich für die

Sagittalstrahlen | Tangentialstrahlen

$$(14) \quad \left| \begin{array}{l} s_k' = \dfrac{n_{k+1}}{n_k} s_k \\ s_{k+1} = s_k' - d_{k+1} \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \qquad \left| \begin{array}{l} t_k' = \dfrac{n_{k+1}}{n_k} t_k \dfrac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \\ t_k = t'_{k-1} - d_k \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \quad (15)$$

worin d_k der von dem betreffenden Hauptstrahl in dem Prisma zurückgelegte Weg ist und s_0 bezw. t_0 sowie n_0 die auf das erste, s_p', t_p', $n_{p+1} = n_p'$ die auf das letzte das Prismensystem begrenzende Medium bezogenen Werthe der betreffenden Grössen sind.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt, wenn wir $n_0 = n_p' = 1$ also ein beiderseits von Luft begrenztes Prismensystem annehmen,

$$s_p' = s_0 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k}, \tag{14a}$$

unabhängig von den i_k, i_k' und

$$t_p' = t_0 \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \right)_{k=0}^{k=p} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k} \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \right)_{k=k}^{k=p}, \tag{15a}$$

daher für $s_0 = t_0 = a$

$$t_p' - s_p' = a \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \right)_{k=0}^{k=p} - 1 \right] - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k} \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \right)_{k=k}^{k=p} - 1 \right]. \tag{16}$$

In dem oben betrachteten Falle der Minimalablenkung verschwindet der Faktor von a; die astigmatische Differenz wird dann unabhängig von der Entfernung des leuchtenden Punktes; sie hängt aber dann noch wesentlich mit von den Grössen d_k ab und verschwindet mit diesen[2]). Bei endlicher Grösse der d_k ist der

[1]) Es ist hier bequemer, diesen Astigmatismus direkt durch die Differenz der letzten Schnittweiten selbst zu bemessen und nicht — wie früher und wie das auch an sich rationeller wäre — nach der Differenz der Reciproken von s und t.

[2]) Vergl. die analogen Untersuchungen von A. Gleichen, Ztschr. f. Math. u. Phys. 34, pag. 161. 1889 (von denen ich erst nach Abschluss der meinigen (1886) Kenntniss erhielt).

Astigmatismus relativ zur Bild- oder Objektentfernung desto geringfügiger, je grösser diese sind und wird gleich Null bei unendlich entferntem Objekte — wie denn auch die unmittelbare Betrachtung zeigt, dass parallelstrahlige (telecentrische) Büschel durch die Brechung an Ebenen keine anderen Modificationen erfahren als solche ihrer Richtung und ihres Querschnitts. Hierin liegt ein wesentlicher Vortheil der Anwendung telecentrischer Büschel bei allen spectroskopischen Untersuchungen.

Das Bild eines vertikalen zur Kante der Prismen parallelen Spaltes in einem Spectroskop würde allerdings gemäss dem pag. 76/77 ausgeführten (vergl. Fig. 24) auch bei nicht aufgehobenem Astigmatismus scharf bleiben, wenn man das Beobachtungsfernrohr auf dasselbe entsprechend einstellte. Nur die horizontalen Endlinien des Spaltes würden verwaschen erscheinen. Doch bietet die Anwendung telecentrischer Büschel bei messenden Untersuchungen den weiteren Vortheil, dass man es alsdann nur mit Richtungen und deren Aenderungen zu thun hat, und dass man unabhängig wird von den gegenseitigen Entfernungen des Prismensystems, Collimators und Beobachtungsfernrohrs.

Uebrigens kann man den bei nicht telecentrischen Büscheln auftretenden Astigmatismus benützen, um mit Hilfe eines guten Prismas Collimator und Fernrohr auf ∞ einzustellen, ohne ein GAUSS'sches Ocular zu Hilfe zu nehmen. Geht man nämlich von der Stellung der Minimalablenkung des Prismas aus zu grösseren Einfallswinkeln, so muss man das Ocular des Fernrohrs herausziehen, um den vertikalen Spalt des Collimators deutlich sichtbar zu behalten, wenn derselbe von dem Objektiv zu weit entfernt war und hineinschieben, wenn er demselben näher als der Brennpunkt war. Beim Uebergang zu kleineren Einfallswinkeln umgekehrt (vergl. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, I. Aufl., pag. 257). Ein ähnliches Verfahren wurde von SCHUSTER vorgeschlagen. Phil. Mag. (5) 7, pag. 95. 1879.

Bei einem einfachen Prisma in Luft ist

$$s' = s_0 - \frac{d}{n}, \tag{14}$$

unabhängig von den Winkeln des Hauptstrahls

$$t' = \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'}\left(\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}\, t_0 - \frac{d}{n}\right), \tag{15*}$$

also unter Vernachlässigung der Dicken

$$t' = t_0 \frac{\cos^2 r \cdot \cos^2 i'}{\cos^2 i \cdot \cos^2 r'}$$

oder

$$t'\left(\frac{n^2-1}{\cos^2 i'} - 1\right) = t_0\left(\frac{n^2-1}{\cos^2 i} - 1\right), \tag{15**}$$

welche Gleichung das vorhin Gesagte erklärt.

Scheinbare Grösse der Bilder von Spalten.

Ein zum Hauptschnitt des Prismensystems senkrechter Spalt wird von demselben in seiner scheinbaren Länge unverändert abgebildet, denn wie wir gesehen haben, tritt jeder Strahl — also auch der Hauptstrahl des abbildenden Büschels — unter demselben Winkel gegen den Hauptschnitt aus dem Prismensystem aus, unter welchem er in dasselbe einfiel. Die scheinbare Breite des Spaltes aber wird durch das Prismensystem im Allgemeinen verändert, d. h. die angulare Breite des Spaltbildes gesehen von der Austrittsstelle an der letzten Fläche des Systems ist im Allgemeinen verschieden von der scheinbaren Breite des Spaltes selbst, gesehen vom Einfallspunkte des Büschels an der ersten Fläche. Der Zusammenhang beider Grössen wird dargestellt durch Gleichung (6) des vorigen Abschnitts, also bei einem Prismensystem in Luft ($n_0 = n_p' = 1$ angenommen)

$$\delta i_p' = \delta i' = \delta i_0 \prod \left(\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}\right)_{k=0}^{k=p}. \tag{17}$$

Aus dem dort Angeführten folgt, dass die scheinbare Breite des Spaltes ungeändert dieselbe ist im Bilde wie im Objekt, wenn der Hauptstrahl das Prismensystem im Minimum der Ablenkung durchsetzt, wenn also

$$\Pi\,(\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = \Pi\,(\cos i_k')_{k=0}^{k=p}. \tag{17*}$$

In anderen Stellungen des Prismensystems kann die scheinbare Breite des Spaltes sowohl vermindert als vergrössert werden. Sie erscheint unendlich klein bei jeder Stellung des Prismensystems, bei welcher einer der Einfallswinkel $i_k = \frac{\pi}{4}$ ist, und jedesmal unendlich vergrössert, wenn einer der Austrittswinkel $i_k' = \pi$ ist, ausser wenn beides zugleich vorkommt.

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist

$$\delta i' = \delta i_0 \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos r \cdot \cos i'}$$

oder

$$\frac{\delta i'}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 i'} - 1}} = \frac{\delta i_0}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 i} - 1}}. \tag{17a}$$

Hieraus folgt nebenbei, dass bei einem solchen Prisma

$$\delta i' : \delta i_0 = \sqrt{t_0} : \sqrt{t'}.$$

Die scheinbare Breite des Spaltes, betrachtet durch ein einfaches Prisma, wächst also von derjenigen Stellung, bei welcher der Hauptstrahl streifend einfällt — bei welcher sie $= 0$ ist — stetig bis zu derjenigen Stellung, wo der Hauptstrahl aus dem Prisma streifend austritt, in welchem Falle jene Breite $= \infty$ wird.

Planparallele Platten.

Dieselben bilden nur einen Specialfall der Prismen, nämlich denjenigen, wo der brechende Winkel gleich Null ist. Es ist daher der Einfallswinkel an irgend einer Fläche stets gleich dem Brechungswinkel an der vorangehenden. Haben erstes und letztes Medium gleiches n, so ist der austretende Strahl parallel dem eintretenden, ganz gleich, welches die Folge der brechenden Schichten ist. Der austretende Strahl ist gegen den einfallenden nur seitlich verschoben. Der Austrittspunkt des Strahls aus der $k$ten Platte ist von dem in diese Platte einfallenden Strahl um die Strecke

$$e_k = \frac{d_k \sin(i_k - i_k')}{\cos i_k'}$$

entfernt, wenn d_k die Dicke der Platte, i_k und i_k' Einfalls- und Brechungswinkel an ihrer vorderen Fläche sind. Der schliesslich austretende Strahl ist also von dem einfallenden um

$$e^{(p)} = \sum e_k = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k \sin(i_k - i_k')}{\cos i_k'} \tag{18}$$

entfernt.

Auf dieser Wirkung planparalleler Platten beruht das von HELMHOLTZ erfundene Ophthalmometer, bei welchem die Austrittswinkel zweier unter verschiedenem Winkel einfallender Strahlen durch entgegengesetzt gleiche Drehungen zweier Glasplatten identisch gemacht werden[1].

[1] H. HELMHOLTZ, GRÄFE's Arch. f. Ophthalm. 2, pag. 3. 1854. Physiol. Opt. 1. Aufl., pag. 8. S. auch A. KÖNIG, Ztschr. f. Instrkde. 3, pag. 153. 1883.

III. Die von Prismensystemen entworfenen Spectra.

Ausdehnung des Spectrums.

Wenn von einem leuchtenden Punkte oder Spalte Licht verschiedener Wellenlänge ausgeht, so wird das Bild desselben der Verschiedenheit des Brechungsexponenten entsprechend auch verschieden stark abgelenkt, ja sogar — gemäss den Gleichungen (14) (15) und (17) — in verschiedener Entfernung und verschiedener Breite erscheinen. Sehen wir von diesen letzteren Veränderungen zunächst ab, so ist die Variation der Ablenkung bestimmt durch ein System von Gleichungen, die ebenso wie (5) aus (2) abgeleitet werden, indem ausser Einfalls- und Brechungswinkeln auch die Brechungsindices, und zwar mit λ, als variabel angenommen werden. Also:

$$\left| \begin{array}{l} n_{k+1} \cos i_k' \, di_k' + \sin i_k' \, dn_{k+1} = n_k \cos i_k \, di_k + \sin i_k \, dn_k \\ \text{wo} \qquad di_{k+1} = di_k' \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \tag{19}$$

Hieraus ergiebt sich für di_p', wenn wieder $n_0 = n_p' = 1$ und $dn_0 = dn_p' = 0$ angenommen wird und der Kürze wegen die Produkte der Cosinus der Einfalls- bezw. Brechungswinkel einfach mit Π resp. Π' bezeichnet werden

$$di_k' = di_0 \frac{\Pi_0^p}{\Pi'^p_0} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_{k-1}} dn_k \sin \alpha_k, \tag{19a}$$

oder

$$di_k' \Pi'^p_0 = di_0 \Pi_0^p - \sum_{k=1}^{k=p} dn_k \sin \alpha_k \Pi_{k+1}^p \Pi'^{k-2}_0. \tag{19b}$$

Man kann das System (19) auch in die Form bringen:

$$\left| \begin{array}{l} n_{k+1} \cos i_k' \, di_k' = n_k \cos i_k \, di_k - n_k \sin i_k \left(\dfrac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \dfrac{dn_k}{n_k} \right) \\ \qquad di_k = di_k' \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \tag{20}$$

und hieraus, indem man der Kürze wegen

$$n_k \sin i_k \left(\frac{dn_k'}{n_k'} - \frac{dn_k}{n_k} \right) = M_k,$$

setzt, ableiten

$$di_p' \Pi'^p_0 = di_0 \Pi_0^p - \sum_{k=0}^{k=p} M_k \Pi_{k+1}^p \Pi'^{k-1}_0. \tag{20a}$$

In diesen Gleichungen ist stets $\Pi_m^p = 1$, wenn $m > p$ und $\Pi'^l_0 = 1$, wenn $l > 0$[1]).

Für das Minimum der Ablenkung ist nach Gleichung (7a) $\Pi_0^p = \Pi'^p_0$, also die Zunahme der Dispersion durch das Prismensystem $di_p' - di_0 = di' - di$ gegeben durch

$$di' - di = - \sum_{k=1}^{k=p} dn_k \sin \alpha_k \Pi_{k+1}^p \Pi'^p_{k-2} \tag{19*}$$

oder

$$di' - di = - \sum_{k=0}^{k=p} \frac{M_k \Pi'^{k-1}_0}{\Pi_0^k} = - \sum_{k=0}^{k=p} \frac{M_k \Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_k}. \tag{20*}$$

Das Minimum der Ablenkung findet u. A. statt, wenn die Ablenkung gleich Null, d. h. das Prismensystem ein sogen. geradsichtiges (euthyoptrisches, *P. à vision directe*) ist. Auf ein solches haben also (19*) und (20*) jedenfalls Bezug.

[1]) Aehnliche Entwickelungen s. bei E. BLOCK, Beiträge zur Theorie der Lichtbrechung in Prismensystemen. Diss. Dorpat 1873.

Nur bei dieser Stellung des Prismensystems ist die Zunahme der Dispersion $(di' - di)$ unabhängig von der beim Eintritt der Büschel in das System bereits vorhandenen (di).

Bedingung der Achromasie. Das Prismensystem verursacht keine Zunahme der Dispersion, es ist »achromatisch« wenn

$$di(\Pi'^{p}_{0} - \Pi^{p}_{0}) - \sum_{k=1}^{k=p} M_k \Pi^{p}_{k+1} \Pi'^{k-1}_{0} = 0 \tag{20**}$$

also, falls beim Eintritt in das Prismensystem keine Dispersion vorhanden war, $di = 0$ ist, wenn

$$\sum_{k=1}^{k=p} M_k \Pi^{p}_{k+1} \Pi'^{k-1}_{0} = 0,$$

d. h.

$$\sum n_k \sin i_k \left(\frac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \frac{dn_k}{n_k} \right) \Pi (\cos i_k)^{p}_{k+1} \Pi (\cos i_k')^{k-1}_{0} = 0 \tag{21}$$

ist.

In letzterem Falle bewirkt das Prismensystem nur eine Ablenkung der Hauptstrahlen, welche für alle Wellenlängen die gleiche und durch Gleichung (3) bestimmt ist.

Jeder der beiden zuletzt erwähnten Effekte: Dispersion ohne Ablenkung des Strahls mittlerer Wellenlänge und Ablenkung ohne Dispersion lässt sich bereits mit einem aus zwei Einzelprismen zusammengesetzten System erreichen; diese Prismen können sogar aus der gleichen Substanz bestehen, wenn man keine anderen einschränkenden Bedingungen stellt. Stellt man als solche aber die, dass die einander zugewandten Prismenflächen einander parallel seien (damit man die Prismen durch einen Kitt fest mit einander verbinden könne, wodurch zugleich die Lichtverluste an diesen Flächen erheblich gemindert werden), so müssen die Substanzen der Prismen verschiedenes Zerstreuungsvermögen haben, damit der eine oder andere Effekt erreichbar sei. Nur in dem, den thatsächlich vorliegenden Verhältnissen meist sehr fernliegenden Grenzfalle unendlich kleiner Prismen- und Einfallswinkel lassen sich die in Betracht zu ziehenden Verhältnisse bequem übersehen. In den praktisch vorkommenden Fällen muss man daher gewöhnlich die weniger übersichtlichen Gleichungen (3) und (20*) bezw. (21) anwenden.

Für kleine Prismen- und Brechungswinkel hatten wir die Ablenkung

$$\varepsilon^{(p)} = \sum_{k=1}^{k=p} (n_k - 1) \alpha_k \tag{9a}$$

gefunden, also bei einem aus zwei Prismen zusammengesetzten System

$$\varepsilon = (n_1 - 1)\alpha_1 + (n_2 - 1)\alpha_2.$$

Die Dispersion, welche ein solches System hervorruft, kann daher direkt durch die Aenderung der Ablenkung, die es hervorbringt, ausgedrückt werden

$$d\varepsilon = dn_1 \alpha_1 + dn_2 \alpha_2.$$

Wie man sieht, sind dies Gleichungen von ganz derselben Form wie sie für die Möglichkeit einer Achromasie von Linsensystemen (pag. 124) in Betracht kamen. In der That war historisch (KLINGENSTIERNA, DOLLOND, CLAIRAUT, BOSCOVICH etc.) die Möglichkeit und Art und Weise der Achromatisirung von Prismensystemen maassgebend für die von Linsencombinationen. Man hat also für ein achromatisches Prismenpaar $(d\varepsilon = 0)$ die Winkel α_1 und α_2 so zu wählen, dass

$$\alpha_2 : \alpha_1 = - dn_1 : dn_2$$

und wenn dabei eine bestimmte Ablenkung ε hervorgebracht werden soll, so bestimmen sich α_1 und α_2 — wie früher bei einem Linsensystem von der Stärke $\varphi = 1/f$ die Grössen — k_1 und k_2 zu

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{dn_1(\nu_1 - \nu_2)}; \quad \alpha_2 = -\frac{\varepsilon}{dn_2(\nu_1 - \nu_2)}. \tag{22}$$

Soll umgekehrt die Dispersion $d\varepsilon$ ohne Ablenkung erzielt werden, so muss sein

$$\alpha_1 = -\frac{d\varepsilon}{dn_1}\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}; \quad \alpha_2 = +\frac{d\varepsilon}{dn_2}\frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}, \tag{23}$$

wo wie früher

$$\nu = \frac{n-1}{dn}$$

gesetzt ist.

Das secundäre Spectrum hat auf die durch solche dünne Prismen hervorgerufene Dispersion oder die mittelst ihrer hergestellte Achromasie einen ganz analogen Einfluss wie bei Linsen; einer Brennpunktsdifferenz dort entspricht eine Winkelabweichung hier. Es braucht deshalb auf diese Verhältnisse hier nicht nochmals eingegangen zu werden. —

Die bei dünnen Prismen von unendlich kleinen Winkeln stattfindenden Verhältnisse werden oft ohne weiteres auf Prismen von endlichen Winkeln übertragen. Dies ist aber, wie hier ausdrücklich bemerkt werden mag, ganz unzulässig. Insbesondere die Grösse und der Gang der Dispersion hängen schon bei einer einzigen Brechung in erheblichem Grade von dem Einfallswinkel ab, und werden bei den weiteren Brechungen, wie wir oben gesehen haben, auch noch mit durch den vorher erhaltenen Betrag bedingt. Es sind daher, wie eine genauere Untersuchung zeigt, weder die von zwei Prismen gleicher Substanz aber verschiedenen endlichen Winkels — selbst in gleicher Stellung, z. B. der der Minimalablenkung — hervorgebrachten Spectra einander »proportional«, noch haben solche von Prismen verschiedener Substanz immer verschiedenen Gang, wenn die wahren Dispersionen dieser Substanzen in den verschiedenen Theilen des Spectrums disproportional sind; sondern es hängen diese Verhältnisse eben sehr von dem Betrage und der Folge der Brechungen ab. Man kann daher, wie schon bemerkt, sehr wohl Prismenpaare aus optisch gleichen Substanzen herstellen, welche nur geradsichtig oder nur achromatisch sind, und im ersteren Falle eine endliche Dispersion, im letzteren Falle eine endliche Ablenkung haben (ersteres sogar, indem man einem solchen Prisma ein anderes genau gleiches mit umgekehrter Kante derart gegenüberstellt, dass der Strahl unter demselben Winkel in dieses einfällt, unter welchem er aus jenem austrat). Es folgt hieraus aber keineswegs, dass z. B. im letzteren Falle kein secundäres Spectrum vorhanden sei[1]). Nur wenn zwei Prismen von gleicher Substanz und gleichem Winkel mit einander so zusammengestellt werden, dass die inneren und äusseren Flächen je einander parallel sind, so dass das Prismenpaar gewissermaassen eine planparallele Platte wird, verschwinden nothwendig immer gleichzeitig Ablenkung, Dispersion und secundäres Spectrum.

Bei einem Prisma von endlichem Winkel in Luft bestimmt sich die Dispersion aus (19) oder (20) zu

$$di' \frac{\cos r}{\cos r'} = di \frac{\cos i}{\cos i'} - \frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r'}. \tag{24}$$

Im Minimum der Ablenkung, wo $i = -i'$, $r = -r'$ wird die Zunahme der Dispersion, unabhängig von der beim Eintritt vorhandenen

$$di' - di = -2\frac{dn}{n} tg\, i = -d\varepsilon. \tag{24*}$$

War beim Eintritt des Büschels in das Prisma keine Dispersion vorhanden, $di = 0$, so ist für jede beliebige Stellung des Prismas die Dispersion beim Austritt

$$di' = -\frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r'}; \tag{24a}$$

dieselbe wächst also von einem gewissen, zwischen streifendem Eintritt und Minimalablenkung liegenden Minimum stetig mit dem Austrittswinkel des mittleren Strahls bis zu dem, bei streifendem Austritt erreichten Werthe ∞[2]).

[1]) Diese Verhältnisse hebt z. Th. schon BREWSTER hervor (Treatise on new philos. Instruments, Edinburgh 1813, pag. 361 ff.), wie ich nachträglich gefunden habe.

[2]) Vergl. MOUSSON, POGG. Ann. 112, pag. 428. 1861. THOLLON, Compt. rend. 89, pag. 93. 1879.

Diese Ausbreitung in einen grösseren Winkelraum ist aber keineswegs genügend, um eine entsprechende **Leistungsfähigkeit des Prismas oder Prismensystems** zu verbürgen. Als Maass dieser darf der kleinste Unterschied der Wellenlänge gelten, den benachbarte Spectrallinien haben dürfen, damit sie durch das Prismensystem eben noch getrennt werden können. Hierzu ist erstens vom geometrisch optischen Standpunkte eine gewisse

Reinheit des Spectrums erforderlich. Durch das Prismensystem werden von dem lichtgebenden Spalte so viele Bilder entworfen, als in seinem Lichte Wellenlängen vorhanden sind. Wenn die Breite der Spaltbilder $\delta i'$ grösser ist als die Dispersion di' für einen bestimmten Unterschied $d\lambda$ der Wellenlängen, so decken sich die Spaltbilder der Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$ zum Theil, und das Spectrum erscheint entsprechend unrein. Als **Maass der Reinheit** R des von einem gegebenen Prismensystem gelieferten Spectrums können wir also nach HELMHOLTZ[1]) das Verhältniss

$$R = \frac{di'}{d\lambda} : \frac{\delta i'}{\delta i} \tag{25}$$

annehmen. Wir haben hierfür nach (17) und (19a) — $di_0 = 0$ vorausgesetzt —

$$R^{(p)} = -\sum_{k=1}^{k=p} dn_k \sin \alpha_k \frac{\Pi'^{k-2}_0}{\Pi^k_0} \tag{25 a}$$

oder nach (17) und 20a)

$$R^{(p)} = -\sum_{k=0}^{k=p} \frac{M_k \Pi'^{k-1}_0}{\Pi^k_0}. \tag{25 b}$$

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist hiernach

$$R^{(1)} = -\frac{dn \cdot \sin \alpha}{\cos i \cdot \cos r'}. \tag{25*}$$

Der Vergleich dieses letzteren Ausdrucks mit dem für die Dispersion (24a) eines einfachen Prismas lehrt, dass die Reinheit des von einem solchen gelieferten Spectrums von einem zwischen streifendem Austritt und Minimalablenkung gelegenen Minimum an nach beiden Seiten stetig zunimmt und bei streifendem Einfall (von der dicken Seite des Prismas her) sich dem Werthe ∞ nähert.

Das **Trennungs-(Auflösungs-)Vermögen eines Prismensystems** hängt jedoch, nach den Grundsätzen der Undulationstheorie betrachtet, nicht allein von der Winkeldifferenz ab, welche durch die Dispersion den verschiedenfarbigen Bildern des Spaltes ertheilt wird, sondern wesentlich mit von der **Breite der Büschel, welche die Abbildung des Spaltes vermitteln**. Ohne hier auf diesen Gegenstand — welcher in einem anderen Abschnitt dieser Darstellung ausführlich behandelt wird — näher einzugehen, mag nur soviel bemerkt werden, dass das Bild einer selbstleuchtenden Linie, vermittelt durch Büschel, deren Breite, senkrecht zur Richtung der Linie $= q$, und deren Wellenlänge $= \lambda$ ist, — durch welche optische Mittel auch immer es erzeugt sein mag — niemals wieder eine Linie, sondern immer ein **Streifen** ist, dessen Helligkeit nach den Rändern allmählich abfällt. Zurückbezogen auf das **Objekt** — wie wir dies früher bei der Berechnung der Aberration gethan haben — ist die **Länge** des Bildes (Höhe des Streifens) nahezu gleich der der ursprünglichen Linie, die Ausbreitung

---

[1]) Physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 259. HELMHOLTZ nimmt als Maass für die Reinheit des Spectrums die Grösse $R^* = (di'/d\lambda) : \delta i'$, so dass sein R^* gleich unserem $(R/\delta i)$. Uns lag jedoch näher, in R eine nicht sowohl für das **Spectrum**, als für das es erzeugende **Prismensystem** charakteristische Grösse zu definiren.

des Lichtes senkrecht dazu, also die **Breite des Bildes** nur eine Function von q und λ und zwar *caet. par.* mit wachsendem q abnehmend, mit wachsendem λ wachsend. Von zwei benachbarten Lichtlinien — seien dieselben reell als Objekte vorhanden oder virtuell, z. B. durch Dispersion, aus einer einzigen entstanden — entwirft das optische System als Bilder zwei solche Streifen, welche sich bei ungenügender Grösse von q oder unzureichender Kleinheit von λ zum Theil decken. Die Intensität des Bildes in diesen sich deckenden Theilen ist gleich der Summe der Intensitäten der Einzelbilder an den betreffenden Stellen.

Eine genauere Betrachtung des Verlaufs der Intensität in den Einzelbildern nach den Grundsätzen der Diffractionstheorie zeigt nun, dass bei solcher Superposition zweier — und zwar einander gleich vorausgesetzter — Spaltbilder eine merkliche Intensitätsverminderung zwischen den beiden den Bildmitten entsprechenden Intensitätsmaximis (nämlich auf etwa 0·8 dieser) erst dann vorhanden ist, **wenn der Winkel di', unter welchem die beiden Bilder (Spectrallinien) von der die Büschel begrenzenden rechteckigen Oeffnung aus erscheinen, grösser ist als derjenige, unter welchem die Wellenlänge λ des wirksamen Lichtes aus einer dem Querdurchmesser der Oeffnung q' gleichen Entfernung gesehen erscheint**, also wenn

$$di' > \frac{\lambda}{q'} \text{ [1]}. \tag{26}$$

Mit der Brechung eines parallelstrahligen Büschels durch ein Prismensystem ist nun im Allgemeinen auch eine **Veränderung seines Querschnitts im Hauptschnitt** verbunden, welche nach obigem neben der Breite der in das System eintretenden Büschel hier mit in Anschlag zu bringen ist.

Durch jede Brechung an einer Ebene wird nämlich, wie leicht ersichtlich, der Querschnitt q des Büschels in dem Verhältniss der Cosinus der Brechungswinkel geändert, also

$$\frac{q_k'}{q_k} = \frac{\cos i_k'}{\cos i_k}.$$

Da für ein Prismensystem $q_{k+1} = q_k'$, so haben wir für die Veränderung der Breite eines Büschels durch die Brechung in einem solchen System

$$\frac{q_p'}{q_0} = \frac{q'}{q} = \frac{\Pi(\cos i')_0^p}{\Pi(\cos i)_0^p} = \frac{\Pi'^p_0}{\Pi^p_0} = \frac{\delta i}{\delta i'}, \tag{27}$$

— wie übrigens auch aus dem LAGRANGE-HELMHOLTZ'schen Satze unmittelbar gefolgert werden könnte.

Damit das durch die Dispersion auf die Winkeldifferenz di' gebrachte Linienpaar getrennt erscheinen könne, muss also die Breite des abbildenden — aus dem Prismensystem austretenden — Büschels, q', der Bedingung (26) entsprechen.

Diese geht demnach, unter Berücksichtigung von (25) und (27) in die bemerkenswerthe Beziehung über

$$q > \frac{\lambda}{R d\lambda} \quad \text{oder auch} \quad R > \frac{\lambda}{q d\lambda}. \tag{27a}$$

Für q darf nicht der Querschnitt des in das Prismensystem überhaupt eingetretenen Büschels, also die Grösse $b_0 \cdot \cos i_0$ gesetzt werden (wo b_0 die von dem Büschel getroffene Länge der ersten Prismenfläche ist), sondern nur derjenige Theil desselben, welcher nicht durch die Begrenzung einer der folgenden Flächen nachträglich eine Abblendung erfährt — was wohl zu beachten ist.

Bei einem dreitheiligen symmetrischen Prismensatz *à vision directe*, wie solche häufig an-

[1] RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 9, pag. 266. 1879.

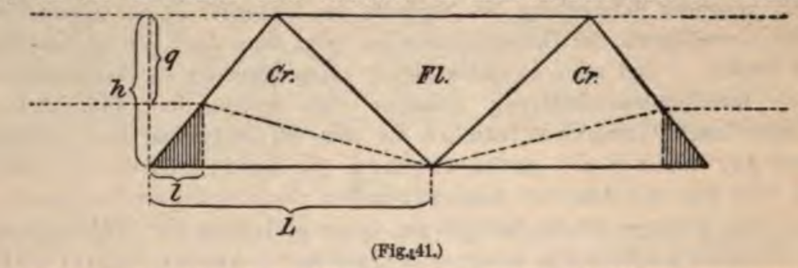
gewandt werden, ist z. B. das Verhältniss dieses nutzbaren Querschnitts q zu dem thatsächlichen, d. h. zu der Höhe der Prismen, h, in dem Verhältniss (s. Fig. 41)

$$\frac{q}{h} = \frac{\cos i_0 \cos i_1}{\cos i_0 \cos i_1 + \sin \alpha_1 \cdot \sin \varepsilon_0}$$

oder der unbenützbare Theil der Höhe, $h-q$, zum benutzbaren in dem Verhältniss

$$\frac{h-q}{q} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \varepsilon_0}{\cos i_0 \cdot \cos i_1}.$$

Man kann daher die Prismen durch einen zur Einfallsrichtung des Büschel senkrechten Schnitt um den unbenützten Theil verkürzen. Es kann auf diese Weise der Prismensatz an



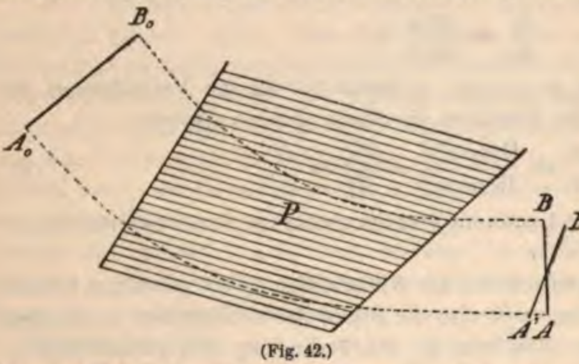
(Fig. 41.)

seiner breiteren Basis beiderseits um Stücke l verkürzt werden, welcher zur unverkürzten Länge dieser Basis L in dem Verhältniss stehen

$$\frac{l}{L} = n \cdot tg\, i_0' \cdot \sin \varepsilon_0.$$

Der combinirte Einfluss von Dispersion und Büschelquerschnitt auf das Auflösungsvermögen eines Prismensystems lässt sich nach RAYLEIGH[1]) unmittelbar aus den Principien der Undulationstheorie berechnen und in ganz allgemeiner Form darstellen. Wird durch die Brechung in dem System P die ebene Wellenfläche $A_0 B_0$ des einfallenden Lichtes in die Lage AB gebracht, so ist sowohl der Lichtweg von A_0 bis A, als auch derjenige von B_0 bis B ein Minimum, und beide sind einander gleich, also

$$\int_{A_0}^{A} n\,dl = \int_{B_0}^{B} n\,dl.$$



(Fig. 42.)

Eine Welle von anderer Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird in der gleichen Zeit in eine andere Lage $A'B'$ übergeführt (Fig. 42). Die Wege, welche die Strahlen derselben hierbei beschreiben, sind nun allerdings verschieden von den der Wellenlänge λ entsprechenden. Die Wegunterschiede sind aber vermöge der Minimumeigenschaft der Wege $A_0 \ldots A$ und $B_0 \ldots B$ bis auf Grössen höherer Ordnung verschwindend gegen die Wege selbst. Die optischen Längen von A_0 bis A' und B_0 bis B' können daher für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entlang denselben geometrischen Wegen berechnet werden wie für λ.

Die Differenz der optischen Längen von A_0 und B_0 nach A und B ist daher für $\lambda + d\lambda$ gleich

$$\int_{B_0}^{B} dn\,dl - \int_{A_0}^{A} dn\,dl$$

und diese Grösse dividirt durch den Querschnitt des austretenden Bündels, AB

[1]) l. c., pag. 271.

$= q'$ ist gleich dem Winkel, den die beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Wellenflächen mit einander einschliessen, d. h. gleich der Dispersion di'.

Bei einem System von Prismen gleicher Substanz z. B. ist hiernach die Dispersion

$$di' = dn \frac{e_2 - e_1}{q'}, \tag{28}$$

wo e_2 und e_1 die von den äussersten Randstrahlen des Büschels in Glas zurückgelegten Strecken sind. Geht der eine dieser Randstrahlen durch lauter **Prismenkanten**, so ist $e_1 = 0$, daher

$$di' = dn \frac{e}{q'}. \tag{28a}$$

Stehen die Prismen alle im Minimum der Ablenkung, so bedeutet e die Summe der Prismendicken an der Basis. Die Dispersion ist also hier unabhängig von der Zahl und den brechenden Winkeln der einzelnen Prismen ausgedrückt.

Damit ein solcher Prismensatz eine Doppellinie im Spectrum auflösen könne, deren angularer Abstand $di' = \vartheta$ ist, muss nach dem oben ausgeführten

$$q' > \frac{\lambda}{\vartheta},$$

daher

$$e > \frac{\lambda}{dn}, \tag{29}$$

wo dn die den beiden Linien entsprechende Differenz der Indices ist. Es ist z. B. die zur Auflösung der Haupt-Doppellinie des Natriumlichtes nothwendige Basisdicke eines Prismas aus englischen Extradense Flint ($n_D = 1{\cdot}650$ $n_D - n_c = 0{\cdot}0055$) in der Stellung der Minimalablenkung fast genau gleich 1 *cm*.

Die **Helligkeit des Spectrums** an irgend einer Stelle desselben hängt davon ab, von wie viel Wellenlängen Licht an diese Stelle gelangt. Bei irgend einer Breite des Spaltes δi kommt nun an eine Stelle seines Bildes $\delta i'$ Licht von denjenigen Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$, **deren Dispersion** di' **gleich der Breite jenes Spaltbildes** $\delta i'$ ist. Die Helligkeit h' des Spaltbildes für irgend eine homogene Farbe ist nun, da seine Höhe bei der Brechung in dem Prismensystem unverändert bleibt, umgekehrt proportional der Breitenänderung des Spaltes durch die Brechung, also, wenn h die ursprüngliche Helligkeit des Spaltes selbst ist,

$$h' : h = \delta i : \delta i'.$$

Die Helligkeit des Spectrums für die Wellenlänge λ ist daher, wenn wir annehmen, dass die Intensität in ihm von λ bis $\lambda + d\lambda$ constant sei

$$H = h' \cdot d\lambda = h \frac{\delta i}{\delta i'} d\lambda,$$

worin $d\lambda$ durch die Bedingung bestimmt ist, dass das ihm entsprechende $di' = \delta i'$ sei. Daraus folgt unter Benützung des Ausdrucks (25) für die **Reinheit** des Spectrums, dass das betreffende

$$d\lambda = \frac{\delta i}{R}$$

ist, und

$$H = \frac{\delta i}{\delta i'} \frac{h \cdot \delta i}{R} = \frac{h \delta i}{di'/d\lambda}. \tag{30}$$

Im Minimum der Ablenkung ist $\delta i = \delta\ i'$ also

$$H = \frac{h \delta i}{R}, \tag{30*}$$

d. h. die Helligkeit des Spectrums — abgesehen von den durch Reflexion und Absorption des Lichtes beim Durchgang durch das Prismensystem erlittenen Verlusten — ist dann direkt proportional der Helligkeit des in den Spalt eindringenden Lichtes und umgekehrt proportional der Reinheit des Spectrums[1]).

Durch die Anwendung eines Fernrohrs zur Beobachtung der Spectra werden die meisten der oben bewiesenen Relationen, namentlich die über Reinheit, Helligkeit und Auflösungsvermögen von Prismensystemen nicht wesentlich berührt. Voraussetzung hierbei ist natürlich, dass die Apertur des Fernrohrs die des Prismensystems übersteigt, anderenfalls wäre für die Bestimmung der Helligkeit und des Trennungsvermögens die erstere statt der letzteren maassgebend. Im übrigen erscheint das durch ein Fernrohr gesehene Spectrum nur ebenso verändert, wie jedes andere Objekt, wovon an anderer Stelle näher die Rede sein wird[2]). Man kann die von Prismen erzeugten Spectren aber auch in anderer Weise beobachten, wenn die wirksamen Büschel nicht telecentrische sind, durch eine Lupe oder dergl. Aus den oben angeführten Gründen verwendet man die Prismen alsdann im Minimum der Ablenkung.

Die Helligkeit des Spectrums wird, ausser durch diese geometrischen Umstände, noch durch die mit jeder Reflexion und Brechung verbundenen, sowie die beim Durchgang durch die Prismen (durch Absorption) erfahrenen Lichtverluste verändert. Die durch theilweise Reflexion des Lichtes für das Spectralbild verloren gehenden Mengen lassen sich aus den Winkeln, unter denen, und den Brechungsexponenten der Medien, an denen jene Reflexionen stattfinden nach den sogen. FRESNEL'schen Intensitäts-Formeln berechnen. Die Grösse des Lichtverlustes durch Absorption hängt von der Grösse des in dem fraglichen Medium zurückgelegten Weges und von dessen Absorptionsvermögen ab. Hiernach lassen sich für einfachere Fälle allgemeine Regeln ableiten[3]).

IV. Die üblichsten Constructionsformen.

Es sind dies

1) Das einfache Prisma, dessen Eigenschaften wir wiederholt näher betrachtet haben. Seine Dispersion in der Stellung der Minimalablenkung wächst nach (24a), welche Gleichung auch die Form erhalten kann

$$d\varepsilon = -2dn\,\frac{\sin\alpha/2}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha/2}}$$

mit dem brechenden Winkel des Prismas, α, ist daher nach dem pag. 138 ausgeführten auf einen mässigen Spielraum beschränkt. Bei einem 60° Prisma von schwerem Flintglase beträgt dieselbe von C bis F ca. 2°. Man verwendet deshalb zur Erziehung einer grösseren Dispersion oft

2) Viele gleiche Prismen, die sämmtlich in der Stellung der kleinsten Ablenkung sich befinden. Es ist dann natürlich auch die Ablenkung des ganzen Systems ein Minimum und sogar das kleinste mit demselben erreichbare. Um diese Minimalstellung während der Beobachtung für jede betrachtete

---

[1]) Diese Sätze wurden für ein einzelnes Prisma zuerst bewiesen von HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 260.

[2]) vergl. auch F. LIPPICH, Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 49. 1881.

[3]) S. PICKERING, Am. Journ. of Sci. 45. 1868. Phil. Mag. (4) 36, pag. 39. 1868; s. auch F. LIPPICH, Centr. Z. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 61. 1881; ROBINSON, Observatory 1882, pag. 53; KRÜSS, Ztschr. f. Instrkde. 5, pag. 185. 1885.

Spectralregion automatisch herzustellen, sind seit O LITTROW[1]) mancherlei sinnreiche Mechanismen in Anwendung gebracht worden[2]).

3) Von LITTROW rührt auch der Vorschlag her, dasselbe Prismensystem Licht mehrmals durchsetzen zu lassen. LITTROW liess das Büschel in sich selbst reflectiren; später zog man nach dem Vorschlag von C. A. YOUNG und LOCKYER vor, die Prismen so viel mal höher zu machen als das Büschel sie durchsetzen soll und führte es durch je zwei Reflexionen senkrecht zum Hauptschnitt aus einer Etage in die andre über[3]).

4) Wenn die Prismen durch Lufträume von einander getrennt sind, so ist der Lichtverlust durch partielle Reflexionen ein relativ grosser. Ausserdem müssen solche Prismen durch besondere mechanische Vorrichtungen in die gewünschte Stellung (z. B. der Minimalablenkung für irgend eine Wellenlänge) gebracht bezw. in derselbsn festgehalten werden, und endlich ist für manche Anwendung die hier mit der Dispersion Hand in Hand gehende Ablenkung unbequem. Allen drei Uebelständen hilft die von AMICI (1860) erfundene Combination von Prismen verschiedenen Brechungs- und Zerstreuungsvermögens mit verkitteten (parallelen) zugewandten Flächen ab, bei welchen die Ablenkung für irgend eine mittlere Wellenlänge aufgehoben ist, während ein gewisser Betrag von Dispersion bestehen bleibt. Wir haben die Theorie dieser geradsichtigen Prismen oder P. »*à vision directe*« oben näher betrachtet.

AMICI verwendete zuerst ein Flintglasprisma zwischen zwei mit ihrer Kante entgegengesetzten gleichen Prismen von Crownglas eingekittet (s. Fig. 339 oben). Andere suchten die Dispersion zu steigern durch Anwendung zweier Flintglasprismen und dreier Crownglasprismen. Derartige Combinationen sind oft beschrieben worden (s. die Literaturübersichten in den Werken von KAYSER und SCHEINER).

5) Wo auf die Geradsichtigkeit der Prismencombination kein besonderer Werth gelegt wird kann man die Dispersion erheblich steigern, indem man nach einer von RUTHERFURD[4]) wieder aufgenommenen Idee BROWNING's einem Prisma von hohem Zerstreuungsvermögen einen Winkel giebt, bei welchem (gemäss pag. 138) aus Luft überhaupt kein Strahl mehr durchtreten könnte und an dieses beiderseits Prismen von möglichst niedrigem Zerstreuungsvermögen ansetzt (Fig. 43), welche gerade ausreichen, um den Durchtritt des Lichtes zu ermöglichen, die Dispersion aber nur wenig herabsetzen. Gegenüber einem einfachen Prisma bieten diese nach RUTHERFURD benannten — 3- oder 5-fachen — Prismensätze den Vortheil erheblich grösserer Dispersion bei wenig vermehrtem Lichtverlust, da nur zwei Reflexionen an Luftgrenzen vorkommen. Ausserdem verändern sich die stark zerstreuenden Flintgläser leicht an der Luft, wogegen sie hier durch die aufgekitteten Crown-



(Fig. 43.)

[1]) Ber. Wien. Akad. 47, pag. 26. 1862. Amer. Journ. (2) 35, pag. 413.

[2]) S. z. B. Browning Monthly Not. 30, pag. 198 u. 214. 1871. H. KRÜSS, Ztschr. für Instrkde. 5, pag. 232. 1885; 8, pag. 388. 1888; 10, pag. 97. 1890. An ersterer Stelle discutirt K. des näheren die Vortheile und Bedingungen der Anwendung solcher Mechanismen. S. auch die Lehrbücher der Spectralanalyse von SCHELLEN, 2. Aufl., Braunschw. 1883, pag. 223, H. KAYSER, Berlin 1883, pag. 39; v. KONKOLY, Halle 1890, pag. 175 und SCHEINER, Leipzig 1890, pag. 82 ff., wegen der verschiedenen Arten der Adoptirung solcher und der im folgenden anzuführenden Apparate an die jeweilig in Frage stehende Beobachtungsmethode.

[3]) S. die angeführten Lehrbücher der Spectralanalyse.

[4]) Amer. Journ. of Sci. (3) 35, pag. 71, 407. 1865.

prismen geschützt sind, und endlich finden die Brechungen unter geringeren Winkeln statt, als bei einfachen Prismen von etwa 60°, wodurch die Ansprüche an die Ausführung der Flächen entsprechend geringere werden.

Da die Grösse der Dispersion wesentlich von der Differenz der Zerstreuungsvermögen der angewandten Substanz abhängt, manche Flüssigkeiten aber sich durch ausserordentlich hohes Zerstreuungsvermögen auszeichnen, so wendet man mit Vortheil oft mit Flüssigkeiten gefüllte Hohlprismen an. Früher diente hierzu meist der Schwefelkohlenstoff, auf den BREWSTER die Aufmerksamkeit gelenkt hat. Von den vielen anderen Flüssigkeiten, die später vorgeschlagen worden sind, sei nur der von WERNICKE[1]) empfohlene Zimmtsäureäthyläther genannt. Mit diesem ist ein Rutherfurdsches Prismensystem construirbar, welches etwa dreimal so starke Dispersion besitzt, als ein einfaches Prisma aus schwerem Flint.

VII. Die Begrenzung der Strahlen und die von ihr abhängigen Eigenschaften der optischen Instrumente.

Bei einer Abbildung, wie der im II. Capitel betrachteten — wo alle von je einem Punkte des Objektes ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte, dem Bildpunkte, vereinigt werden — wäre es völlig gleichgiltig, welche von allen möglichen Strahlen thatsächlich die Abbildung bewirken. Wenigstens würden Lage, Grösse und dioptrische Vollkommenheit des Bildes hierdurch gar nicht berührt. Die Betrachtungen der folgenden Abschnitte jedoch haben gezeigt, dass bei den uns vorzüglich zu Gebote stehenden Verwirklichungsweisen optischer Abbildung es sehr wohl darauf ankommt, an welcher Stelle die spiegelnden und brechenden Flächen von den Strahlenbüscheln getroffen werden, sowie welche Neigungen zur optischen Axe und welche Oeffnungen diese Büschel haben. Der Giltigkeitsbereich einer Abbildung, sowohl als die Möglichkeit und die Mittel zu seiner Erweiterung erwiesen sich als wesentlich durch die genannten Momente mit bedingt.

Für andere bald zu erwähnende Eigenschaften der optischen Bilder würden dieselben aber selbst dann eine Rolle spielen, wenn die Abbildung jene ideal vollkommene eines unendlichen Raumes in einen anderen eben solchen wäre. Wir werden im Folgenden meist stillschweigend die Voraussetzung gelten lassen, dass die Abbildung zwar nicht jene geometrisch aber doch eine dioptrisch vollkommene sei, welche den Bedingungen und Einschränkungen unterliegt, die wir in dem betreffenden Abschnitt dieser Darstellung statuirt haben; also wenn sie mittels weiter Büschel erfolgt, dass in diesen die sphärischen und chromatischen Aberrationen aufgehoben und das Sinusgesetz erfüllt sei; wenn mittelst enger Büschel, dass diese frei von Astigmatismus seien, und dass ihre Axen im Objekt- und Bildraum constantes Tangentenverhältniss besitzen; dass ebenen Objekten ebene Bilder entsprechen u. s. w. Die Einschränkungen, welche die unter diesen Voraussetzungen abgeleiteten Beziehungen durch die in Wirklichkeit stets vorhandenen Unvollkommenheiten der Abbildung erfahren, sind — für die Praxis zwar oft wichtig genug — doch zu specieller Natur, um sie in dieser allgemeinen Uebersicht näher zu berücksichtigen.

---

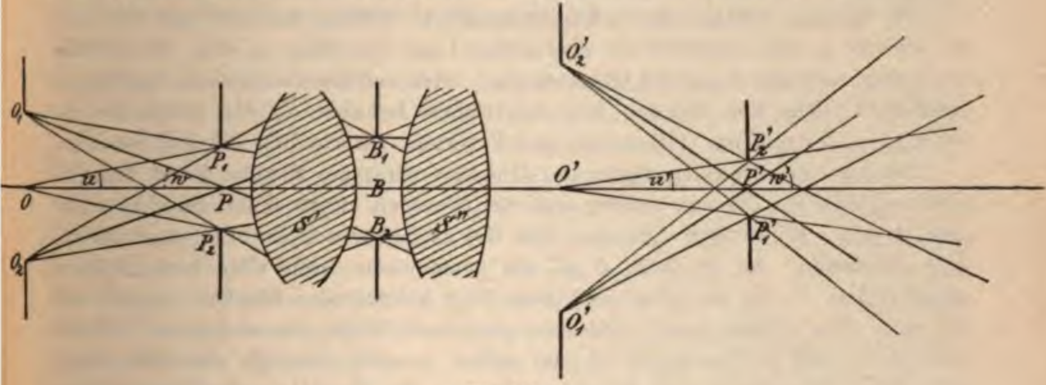
[1]) Zeitschr. f. Instrkde. 1, pag. 353. 1881. S. auch ZENGER, ibib., pag. 263. THOLLON, Compt. rend. 86, pag. 329, 395. 1878. Journ. de phys. 8, pag. 73. 1879.

In Wirklichkeit ist nun der Raum, innerhalb dessen ein optisches Instrument von Strahlen durchsetzt werden kann, immer beschränkt. Schon die Oeffnungen der Linsen sind selbstverständlich stets begrenzte, endliche, und bei den zu subjektivem Gebrauche bestimmten Instrumenten wird oft durch die Pupille des Beobachters eine weitere Begrenzung eingeführt. Statt dieser, sozusagen natürlichen Begrenzungen werden aber meistens — mit Rücksicht auf die oben erwähnten und die unten näher zu beschreibenden Wirkungen derselben — noch andere eigens vorgesehen, um die Leistung des Instrumentes nach dieser oder jener Richtung zu beeinflussen. Wir wollen vor der Hand diese Begrenzungen (Blenden, Diaphragmen) als kreisförmig und concentrisch zur Axe des Instrumentes annehmen.

Der nächste und unmittelbare Effekt aller Blendungen ist der doppelte, erstens die Oeffnungen der abbildenden Büschel und zweitens die Ausdehnung des zur Abbildung gelangenden Objekttheils einzuschränken. Die Art und das Maass dieser Beschränkungen hängen von der Anordnung und Grösse der Blenden und von der Beschaffenheit des optischen Apparates ab.

Feststellung der wirksamen Blenden.

Begrenzung der Oeffnung. Oeffnungswinkel. Sei ein Objekt $O_1 O O_2$ (Fig. 44) in bestimmter Lage gegeben, so findet man zunächst diejenige von den



(Fig. 44.)

vorhandenen Blenden, welche die Oeffnung der abbildenden Büschel am meisten einschränkt, folgendermaassen: Die Blenden B mögen irgendwo zwischen den Linsen des Systems S liegen, im speciellen Falle auch ganz vor oder ganz hinter dem System; der irgend einer von ihnen nach dem Objekte zu vorangehende Theil des Systems sei S', der ihr nach dem Bilde hin folgende S''. Ich denke mir nun jede vorhandene Blende durch das ihr zugehörige S' nach der Objektseite hin abgebildet — was sowohl theoretisch als experimentell ohne weiteres ausführbar ist — nach $P_1 P P_2$. Dann ist die für die Oeffnung der abbildenden Büschel bezw. des Systems maassgebende Blende diejenige[1]), deren Bild $P_1 P_2$ von O aus unter dem

[1]) Da das vom Objektpunkt 0 ausgegangene Büschel in den Medien bis zum Bildraum im Allgemeinen mit sphärischer Aberration behaftet ist, so kann auch der Fall eintreten, dass ein in einem solchen Medium gelegenes Diaphragma Strahlen von einer gewissen Convergenz abblendet, ohne zugleich die stärker geneigten auszuschliessen. Man betrachte daraufhin z. B. Fig. 6, pag. 19. Das Büschel wird durch ein solches Diaphragma gewissermaassen zerklüftet, indem dann eine oder mehrere Zonen in ihm fehlen. Die Oeffnung des Büschels wollen wir jedoch auch in solchen Fällen bis zu derjenigen Zone rechnen, von welcher aus alle stärker geneigten abgeblendet sind und wollen das für sie maassgebende Diaphragma entsprechend bestimmen.

kleinsten Sehwinkel erscheint. Dieser Winkel selbst $= 2u$ heisst der Oeffnungswinkel des Systems. (Wenn das Objekt im Unendlichen liegt, so tritt an die Stelle der angularen Oeffnung des Systems dessen lineare.) Denn durch aplanatische Brechung bezw. Bilderzeugung wird niemals das Nebeneinander, die Reihenfolge der Strahlen eines Büschels geändert; also ist derjenige Strahl OP_1, welcher im Objektraum nach dem Rande des Bildes irgend einer Blende hinzielt derselbe, welcher den Rand B_1 der Blende selbst passirt. Das Bild der nämlichen Blende B, durch den ihr nachfolgenden Theil S'' des Systems in den Bildraum projicirt, nach $P_1'P'P_2'$, erscheint dann aus demselben Grunde von dem centralen Bildpunkte O' aus ebenfalls unter kleinerem Sehwinkel als jede andere.

Offenbar ist $P_1'P_2''$ nach Lage und Grösse gleich dem Bild, welches das ganze System S von einem mit P_1P_2 identischen Objekt entwerfen würde. Wegen des eindeutigen Zusammenhanges zwischen den Punkten eines Objektes und seines Bildes muss jeder Strahl, der beim Austritt aus dem System durch ein Bild geht, vor der Brechung durch die conjugirte Stelle von dessen Objekt gegangen sein und umgekehrt. In so weit also in dem System S nur regelmässige Brechungen und Spiegelungen in Frage stehen, leistet für die Begrenzung der nach dem Bilde zielenden Büschel eine Blende an der Stelle und von der Grösse P_1P_2 genau dasselbe, wie eine solche von der Grösse und an der Stelle von $P_1'P_2'$ und beide eben soviel als die thatsächliche Blende B_1B_2.

Die Blende, welche für ein Objekt in einer Stellung auf der Axe wirksam ist, braucht es nicht zugleich für eine andere Lage desselben zu sein; wir denken uns daher stets die Lage des Objektes fixirt oder auf einen so kleinen Spielraum beschränkt, dass die Blenden ihre Funktionen behalten — wie es ja für die wichtigsten Instrumente (Mikroskop und Fernrohr) thatsächlich der Fall ist.

Die für den centralen Punkt des Objektes wirksame Blende ferner braucht nicht zugleich für die von dessen seitlichen Punkten ausgehenden Büschel wirksam zu sein. Wir wollen dies aber hier der einfacheren Uebersicht wegen ebenfalls annehmen. Es ist dann P_1P_2 die gemeinsame Basis aller vom Objekte ausgehenden, $P_1'P_2'$ die aller nach dem Bilde hinzielenden Büschel. ABBE[1]) hat die nach dem Objekt bezw. Bildraum projicirten Bilder der wirksamen Blende Oeffnung und Oeffnungsbild und später — nach Analogie der beim Auge geltenden Verhältnisse und Bezeichnungen — die Pupillen des Instrumentes genannt und zwar die erstere Eintritts-, die letztere Austrittspupille. Die physische Blende selbst bezeichnete er später oft als die Iris[2]).

Bei Objekten, welche nicht von selbst innerhalb des ganzen wie oben bestimmten Oeffnungswinkels des Instrumentes Licht ausstrahlen, sondern von einer anderen begrenzten Lichtquelle beleuchtet werden, kann es vorkommen, dass statt der im Instrumente vorhandenen Blenden die Lage und Grösse jener Lichtquelle maassgebend wird für die Oeffnung der abbildenden Strahlenbüschel. Es ist dies, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, immer dann der Fall, wenn die Lichtquelle bezw. ihr durch ein Beleuchtungssystem und das Objekt selbst modificirtes Bild vom Objekt aus unter kleinerem Sehwinkel erscheint als die Eintrittspupille. Die Lichtquelle vicarirt dann ihrer Lage und Grösse nach für die Eintrittspupille.

---

[1]) Beiträge zur Theorie des Mikroskops etc. MAX SCHULTZE's Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 419. 1873.

[2]) Letztere Bezeichnung kann heute leicht zu Missverständnissen Anlass geben, da gegenwärtig in optischen Instrumenten vielfach Blenden von variabler Oeffnung gebraucht und als »Irisblenden« bezeichnet werden.

Begrenzung des Objekts. Gesichtsfeld. Die Ausdehnung des zur Abbildung gelangenden Theiles des Objekts ist im allgemeinen ebenfalls durch irgend welche Blenden begrenzt. Man findet diejenige, welche hierfür wirksam ist, indem man sich wie vorher alle vorhandenen Blenden nach dem Objektraum hin durch den ihnen voranstehenden Theil S' des System proicirt denkt. Diejenige, deren so construirtes Bild von dem Mittelpunkt der Eintrittspupille, P, aus unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint, ist dann die hier maassgebende. Dieser Sehwinkel selbst $= 2w$ heisst der Gesichtsfeldwinkel des Systems. Das Bild derselben Blende, durch den ihr nachfolgenden Theil des Systems nach dem Bildraum hin projicirt, erscheint dann von dem Mittelpunkt der Austrittspupille, P', aus ebenfalls unter kleinerem Sehwinkel, als alle anderen.

Wenn diese Blende in dem Raum, in welchen sie projicirt ist, nicht mit dem in diesem Raum erzeugten Bilde — also im Objektraum mit dem Objekte — zusammenfällt, so erfahren Objekt bezw. Bild statt einer scharfen eine allmähliche Begrenzung, indem dann ein immer grösserer Theil der von den seitlichen Punkten ausgehenden Büschel abgeblendet wird. Wiewohl dieser Fall in mehreren optischen Instrumenten vorliegt, wollen wir doch hier zunächst den einfacheren betrachten, dass die Begrenzung des Bildes durch eine in ihm selbst oder in der Ebene eines ihm vorangehenden Zwischenbildes (also event. im Objekt selbst) liegende Blendung stattfinde. Wenn das Objekt von selbst nur eine geringe Ausdehnung besitzt, so ersetzt es seinerseits die Gesichtsfeldblende im Objektraum.

Man kann nach diesen Festsetzungen die Gesammtheit aller durch das System tretenden Büschel in jedem Raume mit ganz gleichem Rechte auf zwei Arten zusammenfassen (vergl. Fig. 44): ein Mal als solche, welche ihre gemeinsame Basis in einer der Pupillen und ihre Spitzen in der Objekt- bezw. Bildebene haben, und das andere Mal als solche, welche umgekehrt ihre gemeinsame Basis im Objekt bezw. Bild (oder irgend einem Zwischenbild) und ihre Spitzen in der zugehörigen Pupille haben. M. a. W.: Für ein nach Lage und Ausdehnung der Eintrittspupille gleiches Objekt ist — vermöge der im Systeme vorhandenen Blenden — das ursprüngliche Objekt als Eintrittspupille, dessen Bild als Austrittspupille wirksam. Dieselbe Blende, welche in dem einen Fall die Oeffnungen der wirksamen Büschel begrenzt, ist im anderen Falle für die Ausdehnung des zur Abbildung gelangenden Objektes maassgebend; Oeffnungswinkel und Gesichtsfeldwinkel vertauschen also in den beiden Fällen ihre Functionen.

Durch die gegenseitige Entfernung zweier Paare von conjugirten Ebenen und die Vergrösserung in ihnen ist eine Abbildung vollständig bestimmt. Wenn daher Ein- und Austrittspupille, sowie die Bilder der Gesichtsfeldblende in Objekt- und Bildraum gegeben sind, so kann durch Rechnung oder Construction zu jedem Strahl der conjugirte gefunden werden, ohne dass man das System selbst weiter zu berücksichtigen hätte.

Hauptstrahlen. Strahlengang.

Die Strahlen, welche von dem Objekte nach dem Mittelpunkte P der Pupille gehen — und deren conjugirte im Bild- und allen Zwischenräumen — sind bei der angenommenen kreisförmigen Gestalt der Blenden, also der Büschelbasis, die Symmetrieaxen der von den betreffenden Objektpunkten ausgehenden Büschel. Sie sind daher sozusagen auch die »optischen Schwerpunktslinien« dieser Büschel und in mehreren Beziehungen die Repräsentanten der Büschel als Ganzes, z. B.

für deren Richtungen. Wir wollen sie als die Hauptstrahlen bezeichnen[1]). Die nach einer Bildebene hin convergirenden Büschel werden von jeder ihr parallelen Ebene je in einem Kreise geschnitten, dessen Mittelpunkt auf dem Hauptstrahl liegt und auf der Schnittebene den Ort des — unscharfen oder »Zerstreuungs-« — Bildes vorstellt. Der Verlauf der Hauptstrahlen im Instrument bildet das, was man des näheren als Strahlengang bezeichnet. Der Winkel, den die äussersten Hauptstrahlen mit einander einschliessen, ist also der Gesichtsfeldwinkel, und wir wollen das Gesichtsfeld in gleicher Weise auch in den Fällen bestimmt sein lassen, wo eine allmähliche Abblendung der seitlichen Büschel stattfindet (wie beim Galiläi'schen Fernrohr, bei den Lupen und dergl.)

Bei der Betrachtung der Abbildungsfehler war stillschweigend stets eine gewisse Begrenzung, sowohl der Apertur, als des Gesichtsfeldes vorausgesetzt und von dem Maasse dieser Begrenzung zeigten sich die Bildfehler stets abhängig. So die Aberrationen in der Axe von der Apertur (dem Oeffnungswinkel) allein, die Aberrationen für seitliche Punkte — Astigmatismus, Coma, — sowie Distortion, und Wölbung auch vom Gesichtsfeldwinkel und dem Orte der Pupillen.

Die von der Pupillenlage und dem Strahlengang abhängigen Eigenschaften der Instrumente.

1) Bei Instrumenten, welche zur subjektiven Beobachtung dienen, ist die Lage der Pupillen maassgebend für den Umfang der Sichtbarkeit des Bildes. Die Pupille des Auges muss zusammenfallen mit der Austrittspupille des Instrumentes, damit das ganze von dem Instrumente entworfene Bild auf ein Mal übersehen werde, und sie muss jener an Grösse mindestens gleich sein, damit alle von den Bildpunkten ausgehenden Strahlen ins Auge gelangen können. Nur wenn die Pupille des Auges sich an dieser Stelle befindet, wirkt dieselbe sicher nicht ihrerseits als Gesichtsfeldblende. Hingegen hängt es dann immer noch von ihrer Grösse ab, ob sie nicht als Aperturblende maassgebend wird. Da letzteres, wie wir sehen werden, niemals schadet, so bleibt allein der erstere Moment zu berücksichtigen. Die Austrittspupille wird daher auch oft als Augenkreis, ihr Mittelpunkt als Augenort bezeichnet. (Daneben sind noch die Benennungen Ramsden'scher und Biot'scher Kreis in Gebrauch.)

2) Die Pupillen sind ferner die Centren der Perspective, unter welcher Objekt und Bild dem Instrument dargeboten bezw. von ihm abgebildet werden. Denn Punkte des Objektraumes, welche auf einer durch die Mitte der Eintrittspupille gehenden Geraden, d. h. auf einem Hauptstrahl des Objektraumes liegen, werden im Bilde dargestellt als Punkte, die auf dem conjugirten Hauptstrahl des Bildraumes liegen, erscheinen also von der Austrittspupille aus aufeinanderliegend. Sie erscheinen ebenso auch bei objektiver Darstellung der Bilder durch Projection auf einen Schirm. Denn dieser letztere kann zwar immer nur einer zur Axe senkrechten Ebene des Objektraumes conjugirt sein; Punkte, die in anderen Ebenen liegen, erscheinen daher als Zerstreuungskreise. Aber wegen der oben erwähnten Eigenschaft der Hauptstrahlen als optische Schwerpunktslinien der Büschel liegen die Mitten jener Zerstreuungskreise, welche in solchem Falle als Bildorte aufgefasst werden, immer auf diesen Hauptstrahlen.

Aus diesem Grunde müssen die Pupillen die orthoskopischen Punkte

---

[1]) Als Hauptstrahlen werden manchmal auch solche bezeichnet, welche nach bezw. von den Hauptpunkten gehen. Diese haben aber natürlich eine Bedeutung nur für graphisch-construktive Behandlung optischer Probleme — was angesichts häufiger Missverständnisse dieses Sachverhalts hervorgehoben zu werden verdient.

des Systems sein, wenn das Bild dem Objekte ähnlich, unverzerrt, sich darstellen soll.

Der Gegensatz zwischen den orthoskopischen und den früher betrachteten aplanatischen Punkten eines Linsensystems, sowie die Bedeutung des Strahlenganges überhaupt, das Verhältniss der Pupillen zu dem Objekt und Bild, für welches sie wirksam sind und die oben ausgesprochene Reciprocität dieses Verhältnisses treten ganz besonders auffallend in Erscheinung bei dem früher (pag. 102) erwähnten Experiment, mittelst dessen ABBE[1]) das charakteristische Convergenzverhältniss der Strahlen in aplanatischen Punkten beobachtet und die Allgemeinheit seines Bestandes in allen Systemen grösserer Apertur constatirt hat. Da nämlich die aplanatischen Punkte kraft der Bedingung des Aplanatismus (constantes Sinusverhältniss der in ihnen sich kreuzenden Büschelstrahlen) dem specifischen Merkmal orthoskopischer Punkte (constantes Tangentenverhältniss der in ihnen sich kreuzenden Hauptstrahlen) widersprechen, so muss ein aplanatisches System eine, diesem ihm eigenthümlichen Convergenzverhältniss gemäss voraus zu bestimmende, Verzerrung des Bildes ergeben, sobald es eine von dem aplanatischen Punkte entfernte Ebene durch Strahlenkegel abbildet, deren Hauptstrahlen sich in diesem aplanatischen Punkte kreuzen.

Die specifische Art dieser Verzerrung lässt sich genügend kennzeichnen, indem man die Umgestaltung bestimmt, die ein System paralleler Gerader bei einer derartigen Abbildung erleidet, oder indem man umgekehrt die Gestalt derjenigen Curven aufsucht, welche sich im Bilde als parallele Gerade darstellen. Eine leicht auszuführende Rechnung, auf die hier vorliegenden Voraussetzungen angewandt, ergiebt das Resultat: Irgend eine Schaar paralleler Geraden in einer zur optischen Axe senkrechten Ebene bildet sich durch ein aplanatisches System als eine Schaar von Ellipsen über derselben Hauptaxe, aber mit verschiedenen Nebenaxen ab (die unendlich entfernte Gerade als einschliessender Halbkreis) und eine bestimmte Schaar von Hyperbeln mit gleichem Mittelpunkte und gleichen Nebenaxen, aber verschieden grosser Hauptaxe wird im Bild als ein System von parallelen Geraden wiedergegeben. Hierbei ist der Vereinfachung wegen angenommen, dass der Convergenzwinkel der Strahlen im aplanatischen Punkte auf der Bildseite als verschwindend klein angesehen, hier also der Sinus der Tangente gleichgesetzt werden könne. Die für das Gesetz des Aplanatismus am meisten charakteristische Erscheinung erhält man, wenn als Objektfiguren zwei Schaaren von Hyperbeln mit gemeinsamen Mittelpunkten und senkrecht sich schneidenden Hauptaxen genommen werden, beide entworfen nach der Gleichung

$$y = \frac{e}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2},$$

wo e — die gemeinsame Nebenaxe in beiden Schaaren — den Abstand der Objektebene von dem betreffenden aplanatischen Focus darstellt, und wenn zugleich die Werthe von a in beiden Schaaren nach der Formel

$$a = \frac{e \cdot u}{\sqrt{l - u^2}}$$

gleichen Zunahmen des u entsprechend — z. B. für die Beträge $u = 0$; 0·2; 0·4; 0·6; 0·8 etc. gewählt werden. Diese Figur (siehe Fig. 45 auf Taf. I.) ergiebt, nachdem der gemeinsame Mittelpunkt aller Curven in die Axe, die Ebene der Zeichnung senkrecht zur Axe und in den richtigen Abstand e vom aplanatischen Focus gebracht ist, als Bild 2 Schaaren von äquidistanten Parallelen, die sich rechtwinklig schneiden. Die krummlinig begrenzten, nach aussen hin immer weiter sich ausdehnenden und immer stärker deformirten Felder der Objektfigur stellen sich im Bild sämmtlich als congruente quadratische Felder dar; die Kreuzung der Hyperbeln, die nach aussen hin unter immer spitzer bezw. stumpfer werdenden Winkeln erfolgt, wird allenthalben als eine rechtwinklige Kreuzung wiedergegeben, und auch die entfernteren Curven beider Hyperbelsysteme, deren Aeste in der Figur überhaupt keinen Durchschnitt ergeben, vielmehr sichtlich divergent verlaufen (z. B. die beiden für $u = 0·8$) erscheinen im Bild unter rechtwinkliger Kreuzung, ihre Durchschnittspunkte aber freilich — entsprechend dem mathematischen Imaginären — in einem Abstand von der Mitte des Bildes, zu welchem kein vom Luftraum ausgehender Lichtstrahl mehr gelangen kann.

---

[1]) CARLS, Repert. 16, pag. 303. 1881.

Die Beobachtung dieser Erscheinung kann mit Mikroskop-Objektiven von nicht allzu kurzer Brennweite — bis zu etwa 3 *mm* — herab und genügender Apertur hinreichend deutlich mit blossem Auge erfolgen, indem man die Figur gut gerändert (auf ein Brettchen geklebt) auf den Tisch des Mikroskops legt, den Mittelpunkt der Curven in die Axe rückt und den Tubus mit dem zu erprobenden Objektiv so weit hebt, dass der Einstellungspunkt des letzteren den richtigen Abstand e von der Zeichnung erhält (beistehende Figur ist für einen Abstand $e = 12{\cdot}5$ *mm* entworfen). Damit dann noch der wesentlichen Bedingung genügt werde, dass die aplanatischen Punkte für die Abbildung der Zeichnung Pupillenmittelpunkte werden, ist nichts weiter nöthig, als dass die Pupille des Auges, mit welchem die Erscheinung beobachtet wird, annähernd an die Stelle des aplanatischen Bildpunktes gebracht werde. Dies ist genügend nahe der Fall, wenn man nach Entfernung des Oculars aus dem Tubus des Mikroskops vom offenen Ende desselben her mit blossem Auge auf das dann über dem Objektiv schwebend erscheinende Luftbildchen der Zeichnung herabsieht. Bei Objektiven mit sehr kurzer Brennweite, welche dieses Bildchen zu klein werden lassen, muss man zur Beobachtung ein schwach vergrösserndes Hilfsmikroskop benützen, welches in den Haupttubus eingeschoben und auf das Bild eingestellt wird. Es muss dann allerdings besonders darauf Bedacht genommen werden, dass eine den Strahlengang begrenzende Blende in diesem Hilfsmikroskop wenigstens annähernd an einer solchen Stelle sich befindet, an welcher ihr Ort dem aplanatischen Focus des zu beobachtenden Objektivs conjugirt ist.

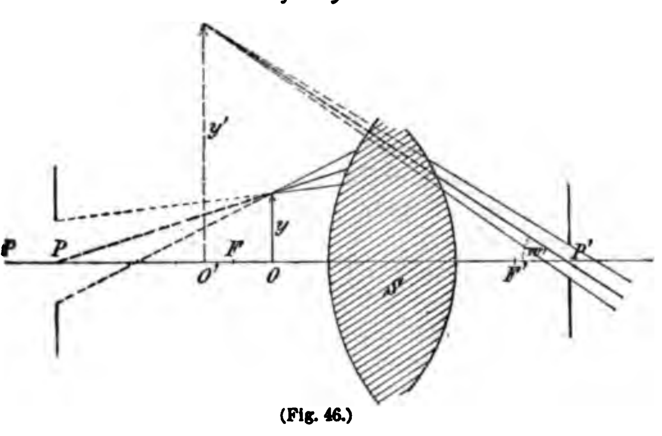
3) Der Oeffnungswinkel oder die angulare Apertur im Objekt- und ebenso im Bildraum hängt nach dem oben gesagten nur von dem Gesichtswinkel ab, unter welchem die Ein- bezw. Austrittspupille vom Objekt bezw. Bild aus erscheint. Wenn aber in einem Instrument die Möglichkeit vorliegt, dass das Objekt eine variable Lage auf der Axe einnehme, — und diese Möglichkeit ist natürlich niemals ganz ausgeschlossen — so ist die Lage der Pupillen auf der Axe maassgebend dafür, ob, in welchem Maasse und in welchem Sinne sich dabei die Oeffnungen der abbildenden Büschel verändern. Denn da die Pupille nach Lage und Grösse die Basis der Strahlenbüschel in dem betreffenden Raume ist so wird offenbar bei einer gewissen Annäherung, z. B. des Objektes an die Eintrittspupille, der Oeffnungswinkel unter sonst gleichen Umständen desto stärker sich ändern, je näher bereits die Pupille am Objekt liegt. Da ausserdem die Pupille im Sinne des Lichteinfalls sowohl vor als hinter dem Objekt liegen kann — dies hängt ganz von der Lage der Aperturblende und des Objektes zu dem Vordertheil S' des Systems ab — so kann einer Bewegung der Objektes im Sinne des Lichteinfalles ebensowohl eine Vergrösserung als eine Verminderung der Büschelöffnungen entsprechen.

4) Vergrösserungskraft. An und für sich kann, wie wir früher (pag. 34) gesehen haben, jedes optische System, jede Vergrösserung β (und jeden Werth des Convergenzverhältnisses γ) in conjugirten Punkten hervorbringen. Nur die Lage der physischen Bestandtheile des Systems könnte hierin eine Beschränkung verursachen, indem sie etwa die Annäherung des Objektes an den vorderen Brennpunkt verhinderte. Diese durch das Verhältniss der wirklichen Bild- und Objektdimensionen definirte aktuelle oder objektive Vergrösserung spielt unmittelbar überall da eine Rolle, wo das Bild auf einen Schirm projicirt wird (Photographische Objektive, Projectionsmikroskop etc.), oder wo die linearen Dimensionen des in Luft projicirten Bildes eines endlich entfernten Gegenstandes einer Ausmessung unterworfen werden sollen (das vom Objektiv allein entworfene Bild bei allen optischen Messinstrumenten, Mikrometermikroskop, mit Messvorrichtung versehenes Fernrohr etc.).

In den zur Unterstützung des Sehens bei subjektiver Beobachtung bestimmten Instrumenten jedoch bildet den Maassstab für die Leistung eines Instrumentes

in Bezug auf vergrössernde Wirkung offenbar nicht die lineare Grösse des Bildes selbst, sondern seine Grösse auf der Netzhaut des beobachtenden Auges oder was auf dasselbe hinauskommt, der Sehwinkel, unter dem es von der *A.-P.*[1]) des Instrumentes — und der mit dieser in Coincidenz zu bringenden *E.-P.* des Auges — aus erscheint. Insofern ist also der Strahlengang im Instrument — mag er durch die zu diesem gehörigen Blenden oder, wie bei der einfachen Lupe durch die Stellung des Auges selbst bestimmt sein — mit maassgebend für die (subjektive) Vergrösserung, die dasselbe leistet.

Der Sehwinkel w', unter welchem das Objekt y von der *A.-P.* des Instrumentes aus erscheint, lässt sich aus der Lage der Pupillen und Bilder gegen einander ohne weiteres berechnen. Sind die Entfernungen des Objektes von der *E.-P.* $PO = \xi$, die des Bildes von der *A.-P.* $P'O' = \xi'$, die derselben von den Brennpunkten der entsprechenden Räume $FO = x$, $F'O' = x'$, endlich die Abstände der Pupillen von denselben Brennpunkten $FP = X$, $F'P' = X'$, so ist (Fig. 46)



(Fig. 46.)

$$tang\, w' = \frac{y'}{\xi'} \quad \text{und} \quad tang\, w = \frac{y}{\xi},$$

daher

$$\frac{y'}{y} = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{tang\, w'}{tang\, w} = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \Gamma. \tag{1}$$

Wenn das System in Bezug auf die Pupillen orthoskopisch ist, so ist Γ eine Constante und gleich dem Werth, den es für paraxiale Strahlen hat, d. i.

$$\Gamma_0 = -\frac{X}{f'};$$

daher

$$tang\, w' = \frac{y'}{\xi'} = \frac{y}{\xi}\Gamma = -\frac{y}{\xi}\frac{X}{f'}. \tag{2}$$

Nun ist $\xi = x - X$; tragen wir diesen Werth ein und berücksichtigen wir, dass $x \cdot x' = f \cdot f' = X \cdot X'$ ist, also

$$\frac{x}{X} = \frac{X'}{x'},$$

so wird

$$\frac{tang\, w'}{y} = \frac{1}{f'} \frac{1}{1 - \frac{X'}{x'}} \tag{3}$$

und weiter, wenn X' klein ist gegen x'

$$\frac{tang\, w'}{y} = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{x'}\right). \tag{3a}$$

[1]) Wir schreiben im folgenden der Kürze wegen die sehr häufig vorkommenden Worte »Eintrittspupille« mit *E.-P.* und »Austrittspupille« mit *A.-P.*

Das Verhältniss des Sehwinkels, unter welchem ein Objekt von der *A.-P.* aus durch das Instrument erscheint, zur Grösse dieses Objektes ist nach Abbe[1]) das richtige Maass für dessen Vergrösserungswirkung. Diese Vergrösserung stellt sich hier dar als bestimmt durch ein Hauptglied, die reciproke hintere Brennweite des Systems, welche wir früher bereits als die »Stärke« des Systems ($1/f' = \varphi'$) bezeichneten. In zweiter Linie sind auf die Vergrösserung von Einfluss der Abstand der *A.-P.* vom hinteren Brennpunkt, und die Entfernung des Bildes von demselben. Mit Ausnahme einiger besonderer Fälle wird ersterer Abstand stets sehr klein oder ganz Null sein. Letztere Entfernung ist dann identisch mit der Entfernung des Bildes vom Auge, hängt also von dem Accomodationszustande (der Sehweite) dieses ab. Diese Sehweite aber ist gegenüber der Entfernung $F'P' = X'$ stets sehr beträchtlich; daher ist das Correctionsglied $\frac{X'}{x'}$ in den meisten Fällen ein sehr kleiner echter Bruch. Die reciproke Brennweite des Systems allein bildet also im Wesentlichen das Maass für den Sehwinkel, unter welchem die Längeneinheit durch das System hindurch erscheint, d. h. für das Vergrösserungsvermögen V des Systems. Sie bildet denjenigen Theil des Vergrösserungsvermögens, welcher von den rein zufälligen Umständen — Lage der *A.-P.* zur hinteren Brennebene, Sehweite des Beobachters — unabhängig ist. Wenn die *A.-P.* des Systems in dessen hinterer Brennebene liegt, so ist für jede Sehweite bezw. Bildentfernung die Grösse $\varphi' = 1/f'$ das genaue Maass der Vergrösserung; ebenso ist es dies bei jeder Lage der *A.-P.* gegen F' für einen weitsichtigen Beobachter. In jedem Falle aber ist der Einfluss dieser beiden Faktoren ein sehr kleiner. Der Winkel, unter welchem ein Instrument die Längeneinheit erscheinen lässt, hängt daher im wesentlichen nur von dem Instrument und nicht von dem Beobachter ab.

Im Allgemeinen ist es üblich, die Vergrösserung eines Instrumentes anders zu bestimmen, und zwar in einer Art, bei welcher die Sehweite des Beobachters wesentlicher Faktor ihres Maasses wird. Wir geben von den verschiedenen, hierfür vorgeschlagenen — und im Endresultat auf dasselbe hinauskommenden Definitionen diejenige, welche dem Sinne des Wortes »Vergrösserung« am getreuesten ist. Danach ist die Vergrösserung eines — nach Art der Mikroskope wirkenden — Instrumentes zu bemessen nach dem Verhältniss der Sehwinkel (bezw. deren trigonometrischer Tangenten), unter welchen ein Mal das Bild des Gegenstandes im Instrument, und dann der Gegenstand selbst dem unbewaffneten Auge erscheint, wenn beide sich in der gleichen Entfernung l vom Auge befinden, oder was dasselbe ist, nach dem Verhältniss der Netzhautbilder in beiden Fällen. Bezeichnen wir die so definirte Vergrösserung mit N, so ist

$$N = \frac{y'}{l} : \frac{y}{l} = \left(\frac{y'}{y}\right)_l = (\beta)_{\xi'=l}. \tag{4}$$

Hiernach ist diese Vergrösserung auch das Grössenverhältniss des in der Entfernung l von der *A.-P.* liegenden (oder auf diese Entfernung proicirten) Bildes zu dem Objekte, also ein Sonderfall der linearen (objektiven) Vergrösserung.

Um vergleichbare Werthe zu erhalten, musste man eine gewisse gemeinsame Normalentfernung l annehmen, wofür man die sogen. »Weite des deutlichen Sehens« $l = 250$ *mm* gewählt hat. Es ist das diejenige Entfernung vom Auge, in welche etwa Normalsichtige kleine Gegenstände zu bringen pflegen, wenn sie

[1]) Note on the proper definition of the amplifying power of a lens or lens system. Journ. R. Micr. Soc. (2) 4, pag. 348. 1884.

dieselben längere Zeit zu betrachten haben; eine Entfernung, in welcher solche Gegenstände unter einem nicht allzu kleinen Sehwinkel erscheinen, auf welche aber von einem normalen Auge längere Zeit ohne erhebliche Anstrengung accomodirt werden kann.

Diese Definition, welche auch noch auf verschiedene andere Ausdrucksweisen gebracht werden kann, hat zweifellos den Vorzug grosser Anschaulichkeit für sich. Da Jeder eine Vorstellung davon hat, in welcher Grösse ihm z. B. 1 *mm* in der Entfernung von 250 *mm* erscheint, so gewinnen auch die so bemessenen Vergrösserungsziffern, 100, 200, 1000, sofort eine anschauliche Bedeutung. Wiewohl daher für den praktischen Gebrauch mit Vortheil an dieser Bestimmungsweise festgehalten werden kann, so verdient vom wissenschaftlichen Standpunkte aus doch jedenfalls die von ABBE den Vorzug. Da nämlich, wie wir eben gesehen haben, der Sehwinkel, unter welchem das Bild im Instrument erscheint, von der Accomodationsweite so gut wie unabhängig ist, so kann man N auch bezeichnen als das Verhältniss dieses constanten Sehwinkels zu demjenigen, unter welchem das Objekt aus der Entfernung l erscheint. Also ist

$$N = \frac{tg\,w'}{y/l} = \frac{tg\,w'}{y} \cdot l = \frac{l}{f'} = l\,V. \tag{5}$$

Nach der üblichen Definition ist also die Vergrösserung das l-fache der nach ABBE bestimmten. Insofern die Sehweite verschiedener Beobachter (Kurz- und Weitsichtiger) verschieden ist, der Werth von l also im gleichen Maasse variirt, bringt die übliche Definition die Thatsache zum Ausdruck, dass der subjektive Nutzen, den ein Vergrösserungsinstrument einem Beobachter gewährt, proportional ist der Mindestentfernung, auf welche er accomodiren kann — für Weitsichtige also grösser ist als für Kurzsichtige. In der ABBE'schen Definition hingegen ist unter Vergrösserung nur derjenige Theil der Wirkung ausgedrückt, welcher von dem Instrument als solchem abhängt. Es verhalten sich daher beide Bestimmungsweisen zu einander wie die nach dem conventionellen und die nach dem absoluten Maasssystem geschehenden in anderen Gebieten der Physik.

Beide Definitionen fallen zusammen, wenn das Objekt sich in unendlicher Entfernung befindet. Alsdann kann die Grösse des Objektes nicht anders bemessen werden, als nach dem Sehwinkel, unter welchem es erscheint, und zwar von der *E.-P.* aus, falls diese nicht etwa selbst im Unendlichen liegt. Die (angulare) Vergrösserung von Teleskopen ist, wie wir früher bereits hervorgehoben haben, identisch mit dem Convergenzverhältniss des Systems in den Pupillen $= \Gamma$.

Das eigentliche Gegenstück zu dem was man als Vergrösserung auffasst in den nach Art eines Mikroskops wirkenden Apparaten bildet die Vergrösserung, in welcher Projectionssysteme sehr entfernte Gegenstände abbilden, z. B. das Objectiv eines Fernrohrs, dieses für sich betrachtet. Hier ist von Interesse das Verhältniss der linearen Bildgrösse zu dem Sehwinkel, unter welchem von der *E.-P.* des Instrumentes aus das Objekt erscheint, also das Verhältniss $y'/tg\,w$.

Bei den früheren Bezeichnungen ist

$$\frac{y'}{tg\,w} = f\left(1 - \frac{x'}{X'}\right) = f\left(1 - \frac{X}{x}\right). \tag{6}$$

Liegt die *E.-P.* in der vorderen Brennebene, so wird $X = 0$, also $\frac{y'}{tg\,w} = f$; ebenso, wenn das Objekt sehr entfernt wird, in welchem Falle die Bildebene

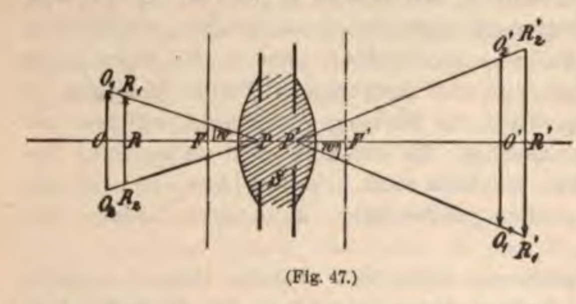
sich ja mehr und mehr der hinteren Brennebene nähert, und obige Beziehung mit der Definition der vorderen Brennweite zusammenfällt.

Bei geodätischen Messungen will man oft aus der Grösse des Bildes eines bekannten Gegenstandes (Messlatte) auf die Entfernung des letzteren einen Schluss ziehen. Diese Entfernung ξ, gemessen von der Eintrittspupille des Systems, ist

$$\xi = \frac{y}{tg\, w}.$$

In solchen Fällen ist es vortheilhaft, zur Bestimmung von $tg\, w$ sich der einfacheren Formel $tg\, w = y'/f$ bedienen zu können; zu diesem Zwecke muss man also die *E.-P.* des Instruments in dessen vorderen Brennpunkt verlegen.

5) Der Strahlengang ist endlich von grosser Wichtigkeit in den zahlreichen Fällen, in denen optische Instrumente dazu dienen, um aus den Grössen der Bilder, die sie entwerfen, die Grösse von deren Objekten zu ermitteln, also zu Messungen. Da die Bilder niemals wirklich dioptrisch vollkommen sind, da ferner das Auge des Beobachters die Fähigkeit der Accommodation für verschiedene Entfernungen besitzt, und da dasselbe endlich eine beschränkte Sehschärfe hat, so wird die Einstellung auf das Bild immer einer gewissen Unsicherheit unterliegen. Mit anderen Worten es wird im Allgemeinen die Ebene, welche der Netzhaut des beobachtenden Auges bei dessen momentanem Accommodationszustand conjugirt ist, die Pointirungsebene, mehr oder minder weit entfernt sein von der Ebene, in welcher das schärfste Bild des anvisirten Objektes liegt, der Bildebene. Der Messung — mag dieselbe mittelst körperlicher Marken (Fäden oder dergl.) oder mittelst der Bilder selbst (Heliometer) erfolgen — wird daher im Allgemeinen nicht das wahre, sondern das Zerstreuungsbild des gemessenen Gegenstandes in der Pointirungsebene unterworfen. Die Grösse desselben ist nach dem oben Ausgeführten bestimmt durch den Gang der Hauptstrahlen. Denn da auf diesen die Mitten der Zerstreuungskreise unscharfer Bildpunkte liegen, so bestimmen die Durchstossungspunkte der Hauptstrahlen mit der Pointirungsebene unmittelbar die Bildgrösse. In der Pointirungsebene $O_1'O_2'$ (Fig. 47) wird O_1' als Bild jedes Punktes O_1, R_1 aufgefasst, welcher auf dem zu $O_1'P'$ im Objektraum conjugirten Hauptstrahle liegt, somit $O_1'O_2'$ als Bild von O_1O_2 oder auch von R_1R_2. Umgekehrt wird das Bild desselben Punktes O_1 in O_1' oder R_1' und das Bild von O_1O_2 in $O_1'O_2'$ oder $R_1'R_2'$ aufgefasst, je nachdem die Pointirungsebene sich in O' oder R' befindet.



(Fig. 47.)

Nun ist (Fig. 47)

$$y' = \xi' \cdot tg\, w'; \quad y = \xi \cdot tg\, w,$$

wenn y die Ordinate des Objektes, ξ sein Abstand von der Eintrittspupille P und w die Neigung des Hauptstrahles gegen die Axe ist; analog y' die in der Pointirungsebene aufgefasste Bildgrösse, ξ' der Abstand der Pointirungsebene von der Austrittspupille P' und w' der zu w conjugirte Winkel. Daher wird die in der Pointirungsebene gemessene Vergrösserung

$$[\beta] = \frac{y'}{y} = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{tg\, \omega'}{tg\, \omega}. \tag{1}$$

Nehmen wir das Tangentenverhältniss in den Pupillen als constant, d. h.

orthoskopische Abbildung an, so ist $tg\, w'/tg\, w = \Gamma$ auch das Convergenzverhältniss der Paraxialstrahlen in P und P' und dies $\Gamma_0 = \frac{n}{n'} \frac{1}{B}$. Also

$$[\beta] = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \Gamma = \frac{n}{n'} \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{1}{B}. \tag{2}$$

Diese Formel zeigt, dass und wie die beobachtete Vergrösserung abhängt von der Lage der Pupillen zu Objekt- und Messungsebene, sowie von der Vergrösserung in ersteren — und nur von diesen Faktoren.

Es können nun in der Praxis zwei Fälle vorkommen: erstens der, dass die Entfernung der Pointirungsebene von der Austrittspupille — bezw. dem abbildenden System überhaupt — fixirt ist; alsdann sind Schwankungen der Objektentfernung möglich, welche auf die Bestimmung von β einwirken. Dies ist z. B. beim Mikrometermikroskop der Fall. Oder umgekehrt, die Entfernung des Objektes vom System ist als unveränderlich anzusehen, die der Pointirungsebene aber ist Variationen unterworfen (z. B. beim Fernrohr durch den Einfluss der Temperaturschwankungen auf das Objektiv und Tubusrohr, durch veränderte Oculareinstellung u. dergl.). Je nachdem der eine oder der andere dieser beiden Fälle vorliegt, wird man suchen, die Einrichtung des Instruments so zu treffen, dass die Entfernung des Objektes von der Eintritts- oder die der Pointirungsebene von der Austrittspupille ihren Einfluss auf die Messung von β verliert. Und dies ist, wie ABBE[1]) gezeigt hat, in der That möglich.

Führen wir noch die Entfernungen der Pupillen und Objekt- bezw. Bildebenen von den Brennebenen der betreffenden Räume ein, X, X' und x, x', so haben wir

$$\xi' = x' - X'; \quad \xi = x - X$$

und nach den Fundamentalformeln

$$\Gamma = -\frac{f}{X'} = -\frac{X}{f'};$$

daher

$$[\beta] = \frac{x' - X'}{x - X}\, \Gamma = -\frac{(x' - X')}{f'\left(\frac{x}{X} - 1\right)} = -\frac{\frac{x'}{X'} - 1}{x - X} f. \tag{3}$$

Je nachdem also die Eintritts- oder die Austrittspupille in unendliche Entfernung verlegt, d. h. X oder $X' = \infty$ — je nachdem das System nach der Bezeichnung ABBE's nach der Objekt- oder Bildseite »telecentrisch« gemacht — wird, ist

$$[\beta] = \frac{\xi'}{f'} \tag{4a}$$

unabhängig von der Objektentfernung, oder

$$[\beta] = \frac{f}{\xi} \tag{4b}$$

unabhängig von der Lage der Pointirungsebene.

(Fig. 48.)

Dies ergiebt sich auch, wie ein Blick auf die vorstehende Figur (Fig. 48) zeigt, unmittelbar daraus, dass die Hauptstrahlen im ersteren Falle im Objektraum, im letzteren im Bildraum parallel zur Axe verlaufen.

Bei der gewöhnlichen Einrichtung der zu Messungen dienenden optischen Instrumente liegen die Pupillen nahe deren Hauptebenen oder Knotenebenen.

[1]) Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1878.

Alsdann ist Γ oder $B = 1$ und $[\beta] = \frac{\xi'}{\xi}$. Bei der hier betrachteten singulären Art von Strahlenbegrenzung wird $\Gamma = \infty$ bezw. $= 0$; β wird ganz unabhängig von J bezw. B und tritt dafür in unmittelbare Abhängigkeit von der Brennweite des abbildenden Systems.

Verwirklicht aber wird diese Art des Strahlenganges einfach dadurch, dass die Aperturblende im ersteren Falle in die hintere, im letzteren Falle in die vordere Brennebene gesetzt wird, oder wenn zwischen die Linsen des Systems dann an eine Stelle, die jenen Ebenen conjugirt ist in Bezug auf den zwischen beiden befindlichen Theil des Systems. Wie dies in den einzelnen Arten optischer Instrumente am zweckmässigsten einzurichten ist, kann erst erörtert werden, wenn wir die Construction derselben des näheren besprochen haben.

Metrische Beziehungen zwischen Pupillen und Bildern.

Die pag. 44 entwickelten Abbildungsgleichungen, bezogen auf conjugirte Punkte, enthalten alle hier in Frage kommenden Beziehungen im Keime. Insbesondere geben die Gleichung II* die Beziehungen zwischen der Vergrösserung β_0, welche in dem einen Paar von conjugirten Punkten, z. B. in den Pupillen, besteht und den Abscissen, der Vergrösserung und dem Convergenzverhältniss in dem anderen Paare, also in Objekt- und Bildpunkt. Aus diesen Gleichungen folgt u. a. eine direkte Beziehung zwischen der linearen Vergrösserung β in Objekt- und Bildpunkt, derjenigen B in den Pupillen und den Abscissen der ersteren bezogen auf die letzteren ξ, ξ', nämlich

$$\frac{\xi_0'}{\xi_0'} = \frac{n'}{n} \cdot \beta_0 B_0. \tag{1}$$

Diese Gleichung bezieht sich zunächst nur auf die für paraxiale Strahlen geltenden Bildorte und Bildgrössen, was durch die Indices angedeutet ist. Es kann nun entweder, wie wir gesehen haben (pag. 98 ff.), das Bild ausgedehnt und die Pupillen — wenigstens im Verhältniss zu ihren Abständen ξ, ξ' — klein sein oder umgekehrt letztere erhebliche Grösse haben und Bild und Objekt entsprechend kleiner sein.

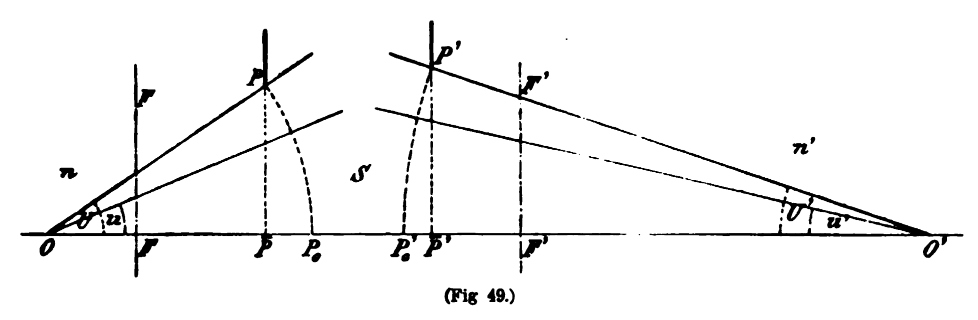
Im ersteren Falle wird bei einem möglichst vollkommen wirkenden System das Bild eines ebenen Objektes selber eben, d. h. $\xi' = \xi_0'$, und die Vergrösserung in Objekt und Bild $\beta = y'/y$ constant, also auch $= \beta_0$ sein. In den Pupillen kommt dann aber von selbst nur der Grenzwerth von B oder doch ein ihm sehr nahe liegender in Betracht. Die Gleichung (1) bleibt daher hier ohne weiteres in der Form bestehen

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{n'}{n} \beta \cdot B. \tag{1a}$$

In dem anderen Falle — Abbildung kleiner Objektflächen durch weitgeöffnete Büschel — kann man nicht ebenso einfach aus der Grösse der vorliegenden endlichen Maassstücke auf die in Gleichung (1) eintretenden Grenzwerthe oder auf ihre gegenseitigen Beziehungen einen Schluss ziehen. In Objekt und Bild zwar wird bei sehr geringer Ausdehnung derselben eine erhebliche Verzerrung und Krümmung kaum eintreten können. In den Pupillen aber besteht erstere gerade vermöge der Bedingung des Aplanatismus (s. oben pag. 159) in beträchtlichem Maasse und eine starke Krümmung ist erfahrungsmässig ebenfalls stets vorhanden. In Folge dessen variiren ξ', ξ und B mit dem Divergenzwinkel u der vom Objekt ausgehenden Büschel. In dem allgemeinsten Fall, dass *E.-P.* und *A.-P.* beides Bilder einer zwischen den Bestandtheilen des Systems gelegenen physischen Blende sind, sind beide als gekrümmte (Rotations-) Flächen anzunehmen, für deren Gestalt keinerlei An-

haltspunkte vorhanden sind. Ihre Orte und Grössen sind also nur durch die Grenzwerthe, d. h. die Ränder definirt.

Bezeichnen wir mit p, p' die sich allein der Messung unmittelbar darbietenden Halbmesser der ganzen *E.-P.* und *A.-P.*, mit B ihr Verhältniss p'/p, mit ξ_U, ξ_U' die Länge der von Objekt- und Bildpunkt nach den Rändern der



(Fig 49.)

Pupillen gezogenen Strahlen, mit $[\xi_0]$, $[\xi_0']$ aber die (messbaren) Entfernungen der durch die Pupillenränder gehenden Ebenen von Objekt und Bild, so haben wir (Fig. 49)

$$\xi_U = p/\sin U; \qquad \xi_u' = p'/\sin U',$$

also

$$\frac{\xi_U'}{\xi_U} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{\sin U}{\sin U'}.$$

Wenn O und O' aplanatische Punkte sind, so ist das Verhältniss der Grenzwinkelsinus — wie das der Sinus irgend welcher anderen einander congugirten Winkel —

$$\frac{\sin U}{\sin U'} = \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n}\beta.$$

Also wird

$$\frac{\xi_U'}{\xi_U} = \frac{n'}{n}\beta B_U = \frac{n'y'p'}{nyp} \tag{2}$$

für die Entfernungen der Pupillen**ränder** von Objekt und Bild.

Wenn die Pupillen als Kugelflächen angenommen werden, so würde dieselbe Beziehung innerhalb der ganzen Ausdehnung derselben, d. h. für jedes u und p gelten. Messen wir aber in den durch die Pupillenränder definirten Ebenen, deren Entfernungen von Objekt und Bild bezw.

$$[\xi_0] = p/tg\, U \quad \text{und} \quad [\xi_0'] = p'/tg\, U'$$

sind, so wird das Verhältniss dieser

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{p'}{p}\frac{tg\, U}{tg\, U'}$$

und dies vermöge des Sinussatzes

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'p_U'}{np_U}\beta\frac{\cos U'}{\cos U} = \frac{n'}{n}\beta B_U\frac{\cos U'}{\cos U}. \tag{3}$$

Dieselbe Beziehung gilt *mutatis mutandis*, wenn man statt der Gesammtgrössen der Pupillen in den durch ihre Ränder definirten Ebenen die Axenentfernungen entsprechender, d. h. auf conjugirten Strahlen liegender Punkte misst, p_u, p'_u; nämlich

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'}{n}\frac{p_u'}{p_u}\beta\frac{\cos u'}{\cos u} = \frac{n'}{n}\beta[B_u]\frac{\cos u'}{\cos u}. \tag{3a}$$

Für den Grenzwerth $[B_0]$ endlich von $[B_u]$ bestimmt sich das Verhältniss der Cosinus als $= 1$ und es wird

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'}{n} \beta [B_0],$$

d. h. dieselbe Gleichung, welche auch in jeder anderen Schirm- oder Pointirungsebene gilt (vergl. pag. 165).

Wir untersuchen noch die Verhältnisse in einigen besonderen Fällen.

Teleskopische Systeme. Hier ist für paraxiale Strahlen die lineare sowohl als die angulare Vergrösserung dieselbe für alle Stellen der Axe; also $\beta_0 = B_0 = const$ und $\gamma_0 = \Gamma_0 = const$. Wenn ein solches teleskopisches System aplanatisch ist für die unendlich fernen Punkte, so wird der Ausdruck der Sinusbedingung bei ihm der, dass

$$\frac{h'}{h} = const$$

sein muss, wo h' die Höhe über der Axe ist, in welcher ein Strahl aus dem System austritt, dessen conjugirter in der Höhe h in das System eintrat. Diese parallel der Axe ein- und austretenden Strahlen sind die Hauptstrahlen für die Abbildung der Pupillen; sonach ist

$$\frac{h'}{h} = \frac{p'}{p} = B$$

ebenfalls constant, d. h. unabhängig von dem Werthe von p innerhalb der ganzen aplanatisch abbildenden Oeffnung des Systems. Bei unendlich fernen Objekten ist, wie oben ausgeführt, die Vergrösserung identisch mit dem Convergenzverhältniss der Hauptstrahlen in den Pupillen, Γ. Diese wird somit aus dem linearen Vergrösserungsverhältniss in den Pupillen, B, gemäss dem Helmholtz-Lagrange-schen Satze berechnet zu

$$\Gamma = \frac{n}{n'} \frac{1}{B} = \frac{n}{n'} \frac{p}{p'} \text{[1]}, \tag{4}$$

wo für p und p' beliebige zusammengehörige Werthe genommen werden können, die Messung von p und p' aber bei telecentrischem Strahlengange ausgeführt werden muss.

Systeme mit endlicher Brennweite. Bei diesen sind von Interesse die beiden besonderen Fälle, dass entweder die bildformirenden Büschel eng und die vom Objekt divergirenden relativ weit sind (Mikroskop) oder umgekehrt die ersteren weit und die letzteren eng (lichtstärkere photographische Objektive). Es ist oft wünschenswerth, im ersteren Falle die numerische Apertur der vom Objekt ausgehenden Büschel aus der Lage und Grösse der *A.-P.*, im anderen Falle die der bildformirenden aus der Lage und Grösse der *E.-P.* zu ermitteln, da beim Gebrauche dieser Systeme das eine Mal die *A.-P.*, das andere Mal die *E.-P.* bequem zugänglich ist. Nehmen wir in dem beim Mikroskop verwirklichten Falle die Convergenz der bildseitigen Büschel als so gering an, dass die Sinus für die Tangenten gesetzt werden können, so ist (Fig. 49)

$$p' = [\xi_0'] \sin U' = [\xi_0'] \frac{n \sin U}{n'} \frac{1}{\beta} = [\xi_0'] \frac{a}{n'} \frac{1}{\beta}.$$

Ist nun die Ebene der *A.-P.* von der hinteren Brennebene des Systems um X' entfernt, d. h. $F'P' = X'$, der Bildpunkt O' von derselben um x', $F'O' = x'$, also $[\xi_0'] = x' - X'$, so wird unter Berücksichtigung, dass $\beta = \frac{x'}{f'}$,

---

[1] Diese Beziehung wurde für paraxiale Strahlen schon von Lagrange aufgestellt und ihre Benutzung zu dem hier erwähnten Zwecke empfohlen. Mém. Acad. Berlin 1803, pag. 3.

$$p' = \frac{x' - X'}{x'} \frac{a}{n'} f' = a \cdot \frac{f'}{n'} \left(1 - \frac{X'}{x'}\right),$$

folglich, wenn n', wie es fast stets der Fall ist, $= 1$ angenommen wird

$$a = \frac{p'}{f'} \frac{1}{1 - \frac{X'}{x'}}. \tag{5}$$

Wenn x' gross ist gegen X', insbesondere wenn die *A.-P.* geradezu in der hinteren Brennebene liegt, also $X' = 0$ ist, wird einfach

$$a = \frac{p'}{f'}. \tag{5a}$$

Dies gilt natürlich ebenso in Bezug auf das ganze Mikroskop, wie für das Objektiv eines solchen allein, wofern nur die Divergenzwinkel nach dem Bilde zu klein genug sind, um deren Sinus für die Tangenten setzen zu können.

Für den anderen Fall, wo die Projection des Bildes wie bei photographischen Objektiven stattfindet, hat man ganz entsprechend bei analoger Bezeichnung

$$p = [\xi_0] \frac{n' \sin U'}{n} \beta = \frac{[\xi_0]}{x} \frac{f}{n} a' = \left(1 - \frac{X}{x}\right) \frac{f}{n} a',$$

also

$$a' = \frac{n}{1 - \frac{X}{x}} \frac{p}{f}. \tag{6}$$

Hier ist n stets $= 1$ und wenn nun wieder X sehr klein ist gegen x, so wird einfach

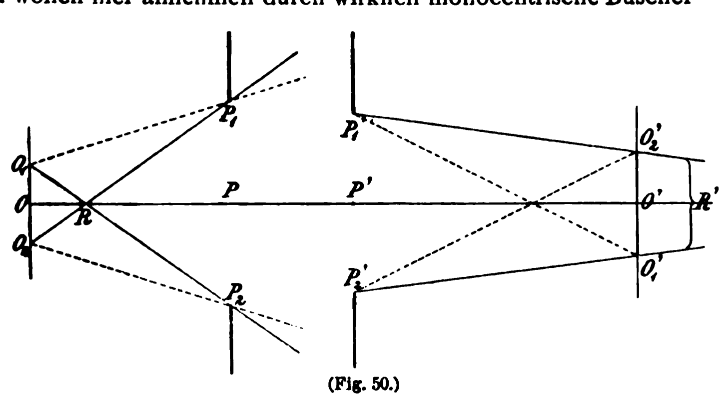
$$a' = \frac{p}{f}. \tag{6a}$$

Die von der Apertur der Systeme abhängigen Eigenschaften.

1) Penetrationsvermögen. Tiefe der Bilder.

Wir haben bei demselben die beiden Fälle zu unterscheiden, dass das Bild auf einen physischen Schirm — z. B. einer photographischen Platte — entworfen und auf diesem betrachtet wird, oder ob das Instrument subjektiver Beobachtung dient. Im letzteren Falle spielt die Accommodationsfähigkeit des Auges mit eine Rolle, im ersteren kommen nur die geometrischen und dioptrischen Verhältnisse in Betracht. Den von ihnen abhängigen Theil des Penetrationsvermögens bezeichnet man als Focustiefe. Wir betrachten zuerst diese.

Focustiefe. Auf dem Schirm S kann nur eine Ebene des Objektes möglichst scharf — wir wollen hier annehmen durch wirklich monocentrische Büschel — abgebildet sein. Den in anderen Ebenen des Objektraums gelegenen Punkten R (Fig. 50) entsprechen, wie wir früher gesehen haben, bei einem aplanatischen System grösserer Oeffnung überhaupt keine Bildpunkte mehr, sondern die von ihnen ausgehenden Büschel sind im Bildraum mit sphärischer Aberration behaftet und zwar die vom vorderen Brennpunkt des



(Fig. 50.)

Systems entfernteren mit Unter-, die näheren mit Uebercorrection. Trotzdem ist auch in den extremsten Fällen — bei beliebig grosser Apertur der einfallenden Büschel — der Zerstreuungskreis, in welchem das Büschel die Bildebene schneidet, völlig bestimmt.

Ist nämlich $z = O_1 O_2$ die — ganz gleich ob reelle oder virtuelle — Projection der *E.-P.*, $P_1 P_2$, auf die Objektebene von R aus, so ist der dem Punkte R entsprechende Zerstreuungskreis in der Bildebene, $O_1' O_2' = z'$ das Bild von z, welches gemäss der in den Ebenen O' und O bestehenden Vergrösserung zu berechnen ist, also $z' = \beta \cdot z$. Denn laut Annahme werden die Punkte der Ebene O durch Büschel welche innerhalb der gegebenen Apertur liegen in Punkte der Ebene O' abgebildet. Die von R nach der *E.-P.* zielenden Strahlen sind zugleich Strahlen dieser von Punkten der Ebene O ausgehenden weitgeöffneten Büschel; wir können sie als Axen von unendlich dünnen Büscheln gelten lassen, welche ihre Spitzen in den betreffenden Punkten von O haben. Die Spitzen der conjugirten Büschel, d. h. die Durchstossungspunkte der conjugirten Strahlen mit der Ebene O' sind daher identisch mit den nach den Abbildungsgesetzen den Punkten des Kreises $O_1 O_2$ entsprechenden Bildpunkten. Es folgt hieraus u. a., dass, wie auch der Charakter und Grad der sphärischen Ueber- oder Untercorrection in den Büscheln des Bildraums in der Nachbarschaft aplanatischer Stellen sein mag, doch jedenfalls die Durchstossungspunkte der von je einem Punkte R ausgehenden Strahlen mit der Objekt- und Bildebene in diesen dieselbe Reihenfolge und sogar proportionale Abstände von einander haben.

Nun ist, wenn wir wie früher $PO = \xi$, $P'O' = \xi'$, den Winkel $P_1 O P = u$ setzen und OR, die Focusdifferenz im Objektraum, mit $\Delta\xi$ bezeichnen

$$O O_1 = \frac{1}{2} z = \Delta\xi \cdot tg\, P_1 R P = \Delta\xi \cdot \frac{\xi}{\xi + \Delta\xi} tg\, u. \qquad (1)$$

Für einen in demselben Abstand $\Delta\xi$ auf der anderen Seite der Objektebene gelegenen Punkt haben wir ganz entsprechend

$$\frac{1}{2} z = \Delta\xi \frac{\xi}{\xi - \Delta\xi} \cdot tg\, u \qquad (2)$$

— abgesehen von dem hier nicht in Betracht kommenden Vorzeichen.

Daher ist

$$z' = 2\beta \cdot \Delta\xi \frac{\xi}{\xi \pm \Delta\xi} \cdot tg\, u, \qquad (3)$$

der einem Objektabstand $\pm \Delta\xi$ entsprechende Zerstreuungskreis im Bildraum.[1])

Wenn $\Delta\xi$ gegen ξ nicht zu vernachlässigen ist, so hängt die Grösse des Zerstreuungskreises nicht nur von dem Oeffnungswinkel, d. h. der scheinbaren Grösse der *E.-P.* gesehen vom Objekt aus ab, sondern auch von ihrer Lage. Je nachdem dann die *E.-P.* hinter oder vor dem Objekte liegt ist der Zerstreuungskreis eines seinerseits in gewisser Entfernung $\Delta\xi$ hinter der Objektebene ge-

---

[1]) Diese Formel weicht von derjenigen, die von Abbe (s. z. B. Beschreibung eines neuen stereoskop. Oculars. Carl's Repert. 17, pag. 220. 1880) angegeben und nach ihm von den meisten anderen Schriftstellern über diesen Gegenstand wiederholt worden ist darin ab, dass hier die trigonometrische Tangente auftritt, wo in jenen der Sinus. Die Differenz erklärt sich aus einer strengeren Rücksichtnahme auf die Voraussetzung des Aplanatismus für die scharf eingestellte Ebene. Macht man diese Voraussetzung nicht, so lässt sich über den Zerstreuungskreis überhaupt nichts mehr feststellen — ausser wenn der Winkel u so klein ist, dass *sin* und *tang* nahezu gleich gross sind.

legenen Punktes im Bilde grösser oder kleiner als der eines ebenso weit vor dem Objekt liegenden — entsprechend der Zu- oder Abnahme der wirksamen Apertur, die dann bei Annäherung oder Entfernung des Objektpunktes vom System eintritt. Unter sonst gleichen Umständen, z. B. bei zwei Systemen gleicher Constructionsart (diese nur in Bezug auf die relative Lage der Blenden nöthig), welche mit gleichen Oeffnungswinkeln ein Objekt in gleicher Vergrösserung abbilden, aber verschiedene Brennweite, — d. h. verschiedenes ξ — besitzen, ist jener Einfluss des Blendenortes grösser bei dem Systeme kleinerer Dimension (von kürzerem ξ). Bei einem solchen wächst also die Unschärfe der von der scharf eingestellten Ebene aus nach vorn gelegenen Objekte schneller als die der nach rückwärts gelegenen, (vorn und hinten immer im Vergleich zur Richtung des einfallenden Lichts zu verstehen).

Während die lineare Grösse des Zerstreuungskreises das Maass für die absolute Unschärfe im Bilde ist, kann man als Maass der durch ihn hervorgerufenen Verundeutlichung des Bildes (Unlesbarmachung einer Schrift oder dergl.) sein Verhältniss zu der Vergrösserung ansehen, in welcher die betreffende Objektebene auf die wahre Bildebene projicirt wird. Die Bildgrösse ist hierbei natürlich von Mitte zu Mitte entsprechender Zerstreuungskreise zu rechnen. Da diese Mitten auf den Hauptstrahlen liegen, so entspricht zwei Punkten die auf demselben durch P gehenden Hauptstrahl liegen derselbe Bildpunkt in der Ebene O'. Hieraus folgt, dass die Vergrösserung, mit der die durch R gehende Ebene in O' unscharf abgebildet wird, $[\beta]$, sich zu der von O, β, umgekehrt verhält, wie die Abstände der Punkte R und O von der Pupille, also

$$\frac{[\beta]}{\beta} = \frac{\xi}{\xi \pm \Delta\xi} \tag{4}$$

und

$$\frac{z'}{[\beta]} = 2\Delta\xi \cdot tang\, u. \tag{5}$$

Die durch Focusdifferenz bewirkte Verundeutlichung des Bildes hängt also weder von der Vergrösserung noch von der Lage der *E.-P.* noch endlich von dem Sinne der objektseitigen Focusdifferenz ab, sondern nur von der absoluten Grösse der letzteren und von dem Oeffnungswinkel des abbildenden Systems.

Wenn die Focusdifferenz klein ist gegen die Entfernung der *E.-P.* vom Objekte so wird einfacher

$$z' = 2\beta \cdot \Delta\xi \cdot tang\, u \tag{6}$$

Wenn das betreffende System nicht zur Darstellung objektiver Bilder (auf einem Schirm) benützt wird, sondern als Hilfsmittel des Sehens, subjektiv, so ist auch nicht mehr die absolute lineare Grösse des Zerstreuungskreises maassgebend für die Unschärfe im Bilde, sondern sein scheinbarer, angularer Werth. Dieser ist $\varepsilon' = z'/\xi'$, wenn ξ' die Entfernung des Bildes von der *A.-P* ist. Da β die auf die gleiche Entfernung bezogene lineare Vergrösserung ist, so ist $\xi/\beta = V = tg\, w'/y$ die Vergrösserung des Systems im subjektiven Gebrauch, somit wird

$$\varepsilon' = \frac{z'}{\xi'} = 2\, V \cdot \Delta\xi \cdot tang\, u \tag{7}$$

und die Tiefe im Objekt, welcher ein Zerstreuungskreis von der maximalen Grösse ε' im Bilde entspricht, d. h. die Focustiefe ist

$$2\Delta\xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{V \cdot tang\, u} \tag{8}$$

oder $= \Delta\xi_\varepsilon$ beiderseits von der scharf eingestellten Objektebene.

Die Tiefe hängt also wesentlich mit von ε' ab, d. h. davon, welche Zerstreuungskreise das Auge des Beobachters verträgt, oder wie gross diese sein dürfen, ehe das Auge den Eindruck der Unschärfe erhält. Diese Sehschärfe ist

individuell verschieden und hängt von mehreren Momenten physikalischer und physiologischer Natur ab (Intensität des Bildes, Farbe, Erregungszustand, Stelle der Netzhaut etc.), auch von der Beschaffenheit des beobachteten Bildes, seiner Struktur, Intensitätsdifferenzen u. s. w. Mittleren Verhältnissen entsprechen Sehschärfen von 1′ bis 5′. Im übrigen aber hängt die Focustiefe nur ab von seinem Vergrösserungsvermögen (Brennweite) und Oeffnungswinkel. Der Constructionstypus, die Zusammensetzung des Systems aus Objektiv und Ocular und die Vertheilung der Functionen auf diese sind völlig ohne Einfluss auf sie.

Das Reciproke der Focustiefe ist das Maass für die Einstellungsgenauigkeit (Focussirungsempfindlichkeit) eines Systems. Denn offenbar ist man desto besser im Stande, die richtige Lage eines Systems gegen Objekt und Bild zu finden (d. h. diejenige Lage, bei welcher es ein gegebenes Objekt an bestimmter Stelle abbildet) je grösser der Zerstreuungskreis ist, welcher bei einer bestimmten Verschiebung des Objekts gegen das System — oder umgekehrt — entsteht.

Accommodationstiefe. Bei den zu subjektiver Beobachtung benutzten Instrumenten, in welchen das Bild nicht auf einem physischen Schirm sondern in der Luft schwebend beobachtet wird kommt bei der Betrachtung dieses Bildes, ebenso wie bei der eines körperlichen Objektes, die Accommodation des Auges der Auffassung der Tiefe noch zu Hilfe. An den Bereich, welcher vermöge der Accommodation scharf übersehen werden kann, gliedert sich dann beiderseits derjenige, in welchem trotz der Focusdifferenz die Zerstreuungskreise noch unter der Grenze der Sichtbarkeit bleiben. Die gesammte Sehtiefe ist also die Summe der Accommodations- und der Focustiefe.

Bei Systemen grösserer Apertur wird jedoch, wie wir wiederholt hervorgehoben haben, streng genommen überhaupt nur eine einzige Ebene scharf abgebildet, d. h. mit wachsender Apertur beschränkt sich der Bildraum in Folge der ausserhalb der aplanatischen Punkte von selbst nothwendig eintretenden Aberrationen immer mehr, so dass im Bilde immer weniger Spielraum für die Accommodation bleibt. Durch diesen Umstand wird die Accommodationstiefe — welche ohnehin mit wachsender Vergrösserung in immer geringerem Maasse zur Tiefenwahrnehmung beiträgt — in noch höherem Grade als es die betreffenden Formeln ausdrücken, verringert[1]).

Wir können nun diejenige Tiefe des Objektraums berechnen, welche durch Accommodation bei ungeänderter Einstellung sichtbar gemacht würde, wenn den Punkten jenes Objektraumtheils scharfe Bildpunkte entsprächen. Ist diese Tiefe geringer als diejenige, innerhalb welcher die Zerstreuungskreise durch Aberration das zulässige Maass erreichen, so ist sie in der oben angegebenen Weise als wirksam anzusehen; ist sie aber grösser als jene, so ist die Gesammttiefe derjenige Raum, innerhalb dessen die Summe der durch Aberration und Focusdifferenz herbeigeführten Zerstreuungskreise den festgesetzten Grenzwerth erreicht.

Ist ξ_N' die Entfernung des sogen. »Nahepunkts« vom Auge, d. h. die kleinste Entfernung, auf welche dieses scharf accommodiren kann, ξ_F' der Abstand des

---

[1]) Auf diesen Umstand und nicht auf einen solchen physiologischer oder psychischer Natur ist wohl auch die neuerdings von NELSON statuirte »Paralysirung der Accommodation« zurückzuführen. S. Journ. R. Soc. (2), pag. 331. 1892.

Fernpunkts von demselben, so ist nach DONDERS das rationelle Maass für das Accommodationsvermögen[1]) des Auges die Grösse

$$A = \frac{1}{\xi_N'} - \frac{1}{\xi_F'}. \tag{9}$$

Folglich ist der Spielraum der Accommodation im Bildraum

$$\xi_F' - \xi_N' = \Delta\xi_A' = A \cdot \xi_N' \cdot \xi_F'. \tag{10}$$

Insoweit die Bilder der paraxialen Strahlen mit denen der stärker geneigten zusammenfallen, entspricht der Entfernung $\Delta\xi'$ zweier Bilder der Abstand $\Delta\xi$ ihrer Objekte gemäss

$$\frac{\Delta\xi'}{\Delta\xi} = \frac{n'}{n}\beta_N \cdot \beta_F, \tag{11}$$

wo β_N, β_F die linearen Vergrösserungen sind, welche in den Entfernungen ξ_F', ξ_N' bestehen. Daher ist die objektseitige Accommodationstiefe

$$\Delta\xi_A = \frac{n}{n'} A \cdot \frac{\xi_N'}{\beta_N} \cdot \frac{\xi_F'}{\beta_F}. \tag{12}$$

Wenn β_N und β_F nicht viel von einander unterschieden sind, so kann man für jedes von ihnen einen Mittelwerth β_M setzen, der genau genommen $= \sqrt{\beta_N \cdot \beta_F}$ ist und ebenso für ξ_N' und ξ_F' den Mittelwerth ξ_M', der genau genommen $= \sqrt{\xi_N' \cdot \xi_F'}$ ist, so dass

$$\Delta\xi_A = \frac{n}{n'} A \left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_M^2. \tag{13}$$

Bei Instrumenten, deren *A.-P.* sehr nahe am hinteren Brennpunkt liegt, ist auch sehr nahe $\xi' = x'$, daher $\xi'/\beta = \frac{1}{V} = f'$ und es wird

$$\Delta\xi = \frac{n}{n'} A \cdot f'^2 = \frac{n}{n'} \frac{A}{V^2}. \tag{14}$$

Bei Instrumenten für subjektive Beobachtung ist also die gesammte Sehtiefe, auch das Penetrationsvermögen des Systems genannt, gleich der Summe der Focustiefe $\Delta\xi_\varepsilon$ und der Accommodationstiefe $\delta\xi_A$. In welchem Maasse diese beiden Momente zur Wahrnehmung der Tiefendimensionen beitragen, wird am besten durch eine tabellarische Uebersicht erläutert[2]), in welcher für ein System (Mikroskop) von der numerischen Apertur $n \sin u = 0{\cdot}5$ und trocken liegendes Objekt d. h. für einen Oeffnungswinkel von 100° in Luft die Werthe von $\Delta\xi_\varepsilon$, $\Delta\xi_A$, die Grösse des auf einmal übersehbaren Objektfeldes $2y$ und das Verhältniss dieses zu $\Delta\xi_\varepsilon$ und $\Delta\xi_A$ aufgeführt sind bei verschiedenen Vergrösserungen und unter den Annahmen, dass $\varepsilon = 5'$, $A = \frac{1}{300}$, $\xi_M = 250$ *mm* ($\xi_N = 166$; $\xi_F = 375$) und dass das angulare Sehfeld im Bilde $tg\, w' = 0{\cdot}5$ ist

β	$2\Delta\xi_\varepsilon = \frac{1}{tang\, u} \frac{\xi'}{\beta} \cdot \xi$	$\Delta\xi_A = \frac{n}{n'} A \left(\frac{\xi'}{\beta}\right)^2$	$y = 2 \frac{\xi'}{\beta} tg\, \omega'$	$\frac{\Delta\xi_\varepsilon}{y}$	$\frac{\Delta\xi_A}{y}$
10	0·0617	2·08	25 *mm*		$\frac{1}{12}$
30	0·0206	0·231	8·3 „		$\frac{1}{12}$
100	0·0062	0·021	2·5 „		$\frac{1}{120}$
300	0·0021	0·0023	0·83 „	$\frac{1}{405}$ (für alle Zeilen)	$\frac{1}{360}$
1000	0·00062	0·00021	0·25 „		$\frac{1}{1200}$
3000	0·00021	0·00002	0·083 „		$\frac{1}{3600}$

[1]) S. die Lehrbücher der physiologischen Optik, z. B. v. HELMHOLTZ, pag. 121.

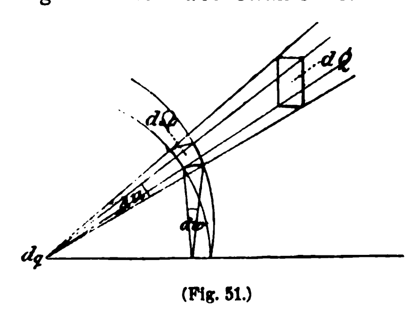
[2]) ABBE, Beschreibung eines neuen stereoskopischen Oculars. CARL's Rep. f. Exper. Physik 17, pag. 216. 1880.

Bei den Vergrösserungen unter 100 würde allerdings die Pupille des Auges einen Theil der *A.-P.* abblenden und damit die wirksame Apertur des Systems verringern, seine Focustiefe im subjektiven Gebrauch also für diesen Fall entsprechend erhöhen. Die betreffenden Zahlen haben daher nur schematischen Werth.

»Die der optischen Abbildung inhärente Uebervergrösserung der Tiefendimension bringt also ein mit wachsender Vergrösserung immer ungünstiger werdendes Verhältniss zwischen Tiefe und Breite des der Accommodation zugänglichen Objektraums hervor; während dieser bei 10facher Vergrösserung ungefähr die Verhältnisse eines ziemlich dicken Buches zeigt, gleicht es schon bei 500facher Vergrösserung nur noch dem einzelnen Blatt aus diesem Buch. — Der andere Bestandtheil der Sehtiefe zeigt hingegen ein wesentlich abweichendes Verhalten, weil in Bezug auf ihn der Effekt der Uebervergrösserung gerade compensirt wird durch die der Vergrösserung des Mikroskopes proportional gehende Verengerung der Strahlenkegel, welche aus dem Ocular zum Auge gelangen. Für die Grenzen des vollkommen scharfen Sehens, durch wechselnde Accommodation, ist es offenbar gleichgültig, ob die Pupille enge oder breite Strahlenbüschel empfängt; das Anwachsen der Zerstreuungskreise beim Ueberschreiten des Nahpunktes oder Fernpunktes erfolgt aber proportional dem Durchmesser der abbildenden Strahlenbüschel. In Folge dieses Umstandes bewahrt, trotz der Uebervergrösserung der Tiefendimension, der kraft Focustiefe erkennbare Körperraum ein ganz constantes Verhältniss zwischen Breite und Dicke, so lange derselbe Oeffnungswinkel in Betracht ist und so lange eine bestimmte Grenze der zulässigen Undeutlichkeitskreise festgehalten wird. — Aus dem angeführten Beispiel ist ersichtlich, dass bei den geringen Vergrösserungen die Focustiefe auf alle Fälle sehr zurücktritt gegenüber der Accommodationstiefe; während umgekehrt unter sehr hohen Vergrösserungen die Wirksamkeit der Accommodation mehr und mehr zurückbleibt hinter dem zwar kleinen aber sich constant erhaltenden Effekt der Focustiefe.«

2) Die Helligkeit der Bilder in optischen Instrumenten.

Alle bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf die geometrischen Eigenschaften des Strahlenverlaufs in den optischen Instrumenten. Wir wollen nunmehr die Intensitätsverhältnisse der Wirkungen, welche optische Apparate vermitteln, ins Auge fassen. Wir erinnern zu diesem Zwecke an die Grundbegriffe, welche in der Lehre von der Intensität der Lichtwirkungen, der Photometrie, überhaupt in Geltung stehen.



(Fig. 51.)

Photometrische Grundbegriffe. Nach dem sogen. photometrischen Grundgesetz ist die Lichtmenge dL, welche ein leuchtendes Flächenelement dq einem anderen in der Entfernung r befindlichen dQ in der Zeiteinheit zusendet

$$dL = k \cdot dq \cdot dQ \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\Theta}{r^2}, \tag{1}$$

wenn ϑ, Θ die Winkel sind, welche die Normalen der Flächenelemente dq, dQ (Fig. 51) mit der Richtung r einschliessen und k ein Faktor, welcher die specifische Intensität der von dq ausgehenden Lichtwirkung bemisst. Die Definition dieses Faktors ist aus obiger Gleichung (1) oder einer der folgenden ihr äqui-

valenten zu entnehmen, wenn rechter Hand alle Grössen = 1 gesetzt werden. Man kann in dieser Gleichung die Grössen

$$\frac{dq \cos\vartheta}{r^2} = d\omega \quad \text{oder} \quad \frac{dQ \cos\theta}{r^2} = d\Omega$$

aussondern, welches die Projectionen des Elements dq auf eine mit dem Radius 1 um dQ geschlagene Kugel bezw. die des Elements dQ auf eine um dq geschlagene sind, d. h. die Raumwinkel, unter welchen dq vom Orte von dQ aus bezw. dQ von dq aus erscheinen. Dann wird Gleichung (1)

$$dL = k \cdot dq \cdot \cos\vartheta \cdot d\Omega = k \cdot dQ \cdot \cos\theta \cdot d\omega. \tag{1a}$$

Man sieht also, dass die Gestalt, Lage und Entfernung des leuchtenden Elements dq für die von ihm ausgehende Lichtwirkung nur insofern von Einfluss ist, als dieselbe den Sehwinkel verändert, unter welchem das Element dq von dem Orte der Wirkung aus erscheint, und ebenso ist Gestalt, Lage und Entfernung des beleuchteten Elements nur nach Verhältniss des Sehwinkels, unter dem es vom lichtstrahlenden Elemente aus erscheint, maassgebend für die Strahlungswirkung, die es erfährt.

Von der Beleuchtung, die ein Element dQ von einer ausgedehnten leuchtenden Fläche erfährt, nehmen wir an, dass es die einfache Summe der Lichtwirkungen sei, die jedes Element jener Fläche für sich auf dQ ausüben würde. Aus dieser Annahme und dem photometrischen Grundgesetz können wir den Satz folgern, dass zwei verschiedene Lichtquellen von ungleicher Grösse, Gestalt und Lage an einem Orte O genau dieselbe Wirkung hervorbringen, von dem aus gesehen sie sich so auf einander projiciren, dass jede von O nach ihnen hingezogene Richtungslinie beide in Punkten gleicher Leuchtkraft trifft.

Diese Leuchtkraft k ist nach Gleichung (1a) diejenige Lichtmenge, welche eine gleichförmig leuchtende Fläche von der Grösse Eins auf eine andere von ihr aus sich unter dem körperlichen Sehwinkel Eins darbietende bei senkrechter Incidenz strahlen würde, oder umgekehrt diejenige, welche auf eine Fläche von der Grösse Eins von einer andern sich dieser unter dem Sehwinkel Eins darbietenden gestrahlt würde. Sie hängt von der physischen Beschaffenheit des strahlenden Körpers (Oberflächenbeschaffenheit, Temperatur etc.) ab und, wenn dies ein nur mittelbar lichtstrahlender Körper ist, auch von der Beleuchtung, unter der er selbst sich befindet. Bei glühenden festen Körpern scheint k nahezu eine Constante in Bezug auf ϑ zu sein. Bei anderen aber und namentlich bei den mittelbar — durch diffuse Reflexion, Difffaction oder dergl. — strahlenden wird k im allgemeinen jede beliebige Function des Ausstrahlungswinkels sein können, also sowohl von seiner Grösse, als dem Azimut der Strahlungsrichtung abhängen[1]).

Man hat zu unterscheiden zwischen der (objektiven) Beleuchtungsstärke, welche von einer leuchtenden Fläche an einem Orte O hervorgebracht wird, und der (scheinbaren) Helligkeit, mit welcher eine solche Fläche von einem Beobachter gesehen wird. Unter ersterer versteht man die Lichtmenge, welche unter den gegebenen Umständen die Flächeneinheit erhalten würde, wenn bei der Strahlung auf deren verschiedene Theile die Verhältnisse genau dieselben wären wie bei der Bestrahlung des betrachteten Elements dQ; mit anderen Worten,

[1]) Wir haben von dieser Function den Faktor $\cos\vartheta$ getrennt, um die folgende Beweisführung zu erleichtern. Dies ist im gegebenen Falle wohl zu berücksichtigen.

die vom Element dQ im Verhältniss zu seiner Fläche erhaltene Lichtmenge. Die von dq in dQ bewirkte Beleuchtungsstärke ist also einfach

$$dB = k \cdot \cos\theta \cdot d\omega. \qquad (2)$$

Die Helligkeit des Lichteindrucks, den ein Beobachter in seinem Auge von einer Fläche erhält denkt man sich, gemäss der allgemeinen angenommenen Ansicht wonach dieser durch die Reizung getrennter und einzeln zu erregender Elemente des Sehnervs vermittelt wird, entsprechend dem Grade der Erregung der percipirenden Elemente. Wir setzen diese Erregung einfach proportional der Lichtmenge, welche je einem derselben durch den optischen Apparat des Auges zugeführt wird, wobei wir die Möglichkeit der thatsächlich bestehenden ungleichen Empfindung der Netzhaut an verschiedenen Stellen und in verschiedenen Zuständen sowie der Diproportionalität zwischen Reizstärke und Empfindungsgrösse überhaupt gänzlich offen lassen, da die Berücksichtigung dieser Momente nur für gegebene individuelle Fälle erfolgen könnte und überdies in das physiologische Gebiet gehört. Bei einem flächenhaft ausgedehnten Bilde des betrachteten Gegenstandes auf der Netzhaut ist hiernach das Maass der Helligkeit, in welcher der Gegenstand dem Beobachter erscheint, die auf der Netzhaut bewirkte Beleuchtungsstärke.

Hieraus folgt u. a., dass eine selbstleuchtende Fläche (deren $k = const$) in jeder Entfernung gleich hell erscheint, in welcher sie überhaupt noch eine endliche Flächenausdehnung besitzt. Denn da die Grösse des Netzhautbildes proportional ist dem körperlichen Sehwinkel ω, unter welchem der Gegenstand — genau genommen vom vorderen Knotenpunkte des Auges, bei einigermaassen erheblichen Entfernungen aber mit genügender Annäherung von seiner Pupille aus — erscheint, so können wir die Helligkeit H, in der eine Fläche gesehen wird, gleich dem Quotienten aus jenem Sehwinkel in die auf die Pupille gestrahlte gesammte Lichtmenge L setzen, also $H = L/\omega$.

Diese Lichtmenge ist aber nach Gleichung (1 a) bei einer in ihren verschiedenen Theilen und in verschiedenen Richtungen gleichmässig leuchtenden Fläche ebensowohl das Produkt aus Flächengrösse und räumlichem Sehwinkel der Pupille von der Fläche aus, als das Produkt aus Pupillengrösse und räumlichem Sehwinkel der Fläche von der Pupille aus — beide Produkte noch mit dem Faktor k multiplicirt. Folglich ist

$$L = kp_0^2\pi \cdot \omega \text{ und } H = kp_0^2\pi,$$

wo p_0 der Halbmesser der Augenpupille ist. Also ist H unabhängig von der Entfernung der Fläche.

Bei verschiedener Pupillenöffnung ist die nach der Netzhaut übergeführte Lichtmenge *caet. par.* dieser Oeffnung, also dem Quadrate ihres Durchmessers proportional.

In den verschiedenen Theilen der lichtstrahlenden Fläche kann, damit obige Betrachtung Geltung behält, k beliebig verschiedene Werthe besitzen; nur muss es für jede Stelle der Fläche constanten Werth haben innerhalb derjenigen Sehwinkel, unter denen die Pupille des Beobachters von der Fläche aus in den verschiedenen Entfernungen erscheint. Diese Voraussetzung wird im allgemeinen auch bei nichtleuchtenden Flächen erfüllt sein, so dass obiger Satz eine ziemlich weitgehende Giltigkeit besitzt. Vorausgesetzt ist bei seiner Ableitung ferner, dass die Pupillenöffnung bei Betrachtung der Fläche in der Nähe dieselbe sei, als wenn dieselbe fern ist, und es ist die Absorption des Lichtes durch das zwischen Fläche und Auge befindliche Medium vernachlässigt.

Wenn aber ein Objekt sich dem Auge unter einem Sehwinkel darbietet, bei welchem dieses Grösse und Gestalt desselben nicht mehr unterscheiden kann, bei welchem das Objekt also in physiologischer Beziehung einem Punkte gleich ist, so verliert die obige Bestimmungsweise der Helligkeit ihre natürlichen Unterlagen und ihren Sinn. Man nimmt in solchem Falle an, dass nur ein Nervenelement oder die Mindestzahl der getrennt erregbaren gereizt werde. So lange dies Verhältniss gewahrt bleibt, ist der Reiz, d. h. die Helligkeit des Bildes, der gesammten auf die Netzhaut bezw. die Pupille des Auges gelangenden Lichtmenge proportional zu setzen. Die Helligkeit eines unter so kleinem Sehwinkel erscheinenden Gegenstandes ist also bei verschiedener Entfernung desselben vom Auge umgekehrt proportional dieser Entfernung und ausserdem natürlich proportional der Pupillenöffnung.

Die scheinbare Helligkeit der Bilder bei subjektiver Beobachtung. Wir können uns nach diesen Vorbemerkungen zur Bestimmung der photometrischen Verhältnisse der von optischen Instrumenten entworfenen Bilder wenden. Dieselben Normen, nach welchen die Intensität der Wirkung realer Körper im Objektraum bemessen wird, sind anzuwenden für die Bestimmung derselben im Bildraum. Hier wie dort wird diese Wirkung — dieselbe mag nun in der Erregung eines Sehorgans oder in der Beleuchtung anderer Objekte bestehen — völlig und in gleicher Weise bestimmt sein durch die geometrischen Bedingungen (Ausdehnung, Lage etc. der strahlenden und bestrahlten Flächen) einerseits und durch die specifische Intensität der Strahlung andererseits.

Die Aenderung in den geometrischen Verhältnissen, welche bei der Abbildung eintritt, ist in den voranstehenden Abschnitten erschöpfend behandelt. Wenn das Objekt nach seiner Grösse und Lage zum Linsensysteme und der Bereich, innerhalb dessen es Licht aussendet, gegeben ist — letzteres durch Lage und Grösse der *E.-P.* — so ist bei einem gegebenen System auch Lage und Gestalt des Bildes bestimmt, sowie der Bereich, innerhalb dessen dieses seinerseits Licht ausstrahlt oder empfängt — letzteres durch die *A.-P.* nach ihrer Grösse und ihrer Lage zu jenem Bilde.

Um die Lichtwirkung des Bildes in Vergleich zu setzen mit der des Objektes bleibt also nur noch zu untersuchen, welche Modifikation die specifische Intensität der strahlenden Elemente bei der Abbildung erfährt.

Wir behandeln zuerst den Fall, dass das Bild subjektiv betrachtet wird, dass es also vor der *A.-P.* des Instruments liegt und von dieser aus angesehen wird. Die Intensität der vom Objekt ausgehenden Strahlung nehmen wir für dessen verschiedene Elemente und innerhalb des wirksamen Oeffnungswinkels als bekannt an. (Wie sich dieselbe bestimmt, wenn das Objekt nicht selbstleuchtend ist, sondern von einer anderen Lichtquelle — sei es direkt, sei es mit Hilfe von hierzu dienenden besonderen optischen Vorrichtungen — bestrahlt wird, ergiebt sich zum Theil aus dem Nachfolgenden.) Wir setzen ferner voraus, dass das abbildende System aplanatisch sei für die betrachteten conjugirten Flächen in O und O'.

Sei dq (Fig. 51) ein der Axe bei O sehr nahes Element des Objektes, k die Intensität der von ihm ausgehenden Strahlung in einem beliebigen Azimut v und in einer Richtung, welche mit der Axe des Systems den Winkel u einschliesst. Die Lichtmenge, welche dq nach einem in dieser Richtung gelegenen Element dQ der *E.-P.* sendet, ist dann gemäss dem photometrischen Grundgesetz Gleichung 1a)

$$dL = k \cdot dq \cdot \cos u \cdot d\Omega, \tag{3}$$

wo $d\Omega$ der körperliche Sehwinkel ist, unter welchem das betreffende Element der Eintrittspupille von dq aus erscheint. Ich begrenze dieses Element nun in der Weise, dass seine Projection auf die um dq geschlagene Kugel vom Radius Eins zwischen zwei unendlich benachbarte Meridiane und zwei benachbarte Breitenkreise fällt — die Axe des optischen Systems hierbei als die Axe jener Kugel gedacht. Dann ist

$$d\Omega = \sin u \cdot du \cdot dv,$$

somit

$$dL = k \cdot dq \cdot \cos u \cdot \sin u \cdot du \cdot dv \ldots \tag{4}$$

Von dem zu dq der Lage und Grösse nach conjugirten Bildelemente dq' wird dem entsprechenden Elemente der *A.-P.* eine Lichtmenge dL' zugestrahlt, welche der Form nach durch einen ganz analogen Ausdruck gegeben ist, nämlich

$$dL' = k' \cdot dq' \cdot \cos u' \cdot \sin u' \cdot du' \cdot dv' \;.\;. \tag{5}$$

Hierin ist $dv' = dv$ zu setzen; denn bei allen Brechungen bleiben die Strahlen innerhalb der Meridiane, in welchen sie sich einmal befinden. Der Winkel u' ist bestimmt als der zu u conjugirte; dq' ist das nach Maassgabe der in O und O' bestehenden Linearvergrösserung β entworfene Bild von dq, also

$$dq' = \beta^2 \cdot dq.$$

Um nun dL' in Beziehung zu dL zu setzen, wollen wir zunächst einmal die — von der Wirklichkeit abweichende — Annahme machen, dass die im Systeme zum Bilde mitwirkenden Flächen ausschliesslich diejenige Wirkung ausüben, welche zur Bilderzeugung beiträgt, dass also die durch Spiegelung hierzu beitragenden nur spiegeln und weder durch Brechung noch durch Absorption einen Theil des Lichts in sich aufnehmen und hierdurch für das Bild verloren gehen lassen. Ebenso dass bei allen mitwirkenden Brechungen keinerlei Lichtverlust durch regelmässige und diffuse Reflexion erfolge und endlich, dass bei dem Durchgange des Lichtes durch die verschiedenen Medien keine Absorptionen stattfinden. Alsdann wird das gesammte von dq zu dem Pupillenelement gestrahlte Licht dL unverändert von dem Bildelement dq' nach der *A.-P.* übergeführt, d. h. es ist dann

$$dL' = dL; \tag{6}$$

somit

$$k \cdot dq \cdot \cos u \cdot \sin u \cdot du \cdot dv = k' \cdot dq' \cdot \cos u' \cdot \sin u' \cdot du' \cdot dv$$

oder

$$k \cdot dq \cdot d(\sin^2 u) = k' \cdot \beta^2 dq \cdot d(\sin^2 u') \tag{6a}$$

Bei einem aplanatischen System ist aber nach Gleichung (4), pag. 102

$$d(\sin^2 u) = \beta^2 \left(\frac{n'}{n}\right)^2 d(\sin^2 u'),$$

worin β dieselbe Constante ist wie oben; folglich bestimmt sich

$$\frac{k'}{k} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2. \tag{7}$$

Wie also auch k und k' einzeln innerhalb des gegebenen Oeffnungswinkels variiren mögen, ihr Verhältniss ist in jeder Richtung dasselbe und dieses Verhältniss ist gänzlich unabhängig von allen Momenten, welche für das abbildende System oder das von ihm entworfene Bild sonst bestimmend sind; es hängt vielmehr allein ab von den Brechungsexponenten der Medien, innerhalb welcher sich Objekt und Bild befinden[1]).

[1]) In dem obigen ist der Beweis für die Gültigkeit einer Beziehung in dem engeren hier betrachteten Gebiete gegeben, welche von Kirchhoff und Clausius für einen allgemeineren Fall nachgewiesen ist. Helmholtz (Pogg. Ann. Jubelbd., pag. 557. 1874) geht davon aus, dass $k' : k = n'^2 : n^2$ sei und beweist hieraus den Sinussatz als Bedingung des Aplanatismus.

Die Intensität der Strahlung irgend eines Bildelementes in irgend einer Richtung ist also überall proportional der Strahlungsintensität des correspondirenden Objektelements in der conjugirten Richtung und zwar stets im Verhältniss des Quadrats des relativen Brechungsexponenten des Bildmediums zum Objektmedium. Da der Bereich, innerhalb dessen eine Strahlung überhaupt stattfindet durch die *A.-P.* bestimmt ist — und zwar durch diese genau ebenso wie die Strahlung einer selbständig leuchtenden Fläche durch ein physisches Diaphragma — so sind nunmehr alle Elemente gegeben, um die Strahlungswirkung des Bildes an irgend einer Stelle zu berechnen.

Die für die Ableitung der Intensitätsbezeichnung gemachte, der Wirklichkeit widersprechende Annahme (6) ist auf das Resultat ohne wesentlichen Einfluss; sie diente nur dazu, die Uebersicht der Verhältnisse zu erleichtern. In Wirklichkeit wird mit jeder zur Bilderzeugung mitwirkenden Reflexion und Brechung, sowie mit jedem Durchtritt der Strahlen durch ein Medium ein Lichtverlust verbunden sein, welcher von der Beschaffenheit der betreffenden Substanzen und den geometrischen Verhältnissen (Einfallswinkel bezw. Länge des vom Strahl in jedem Medium zurückgelegten Weges) abhängt. Dieser Lichtverlust wird also im allgemeinen auch eine Function des Winkels u sein. Er lässt sich aber nicht allgemein angeben, sondern ist in jedem einzelnen Falle und für jede einzelne Strahlungsrichtung aus den Constructionsdaten des Systems zu berechnen. Denken wir uns diese Function μ, welche denjenigen Bruchtheil des einfallenden Lichtes angiebt, welcher in einem gegebenen System zwischen Objekt und Bild für letzteres verloren gegangen ist, den Verlustfaktor, irgendwie bestimmt, so hat man statt $L' = L$ vielmehr $L' = (1 - \mu) \cdot L$ zu setzen, und hieraus folgt durch dieselben Schlüsse wie oben

$$\frac{k'}{k} = (1-\mu)\left(\frac{n'}{n}\right)^2. \tag{7a}$$

Man wird bei subjectiver Beobachtung schwerlich einen Fall realisiren können, in welchem $n' > n$ ist, man hat vielmehr meistens $n' = n = 1$ oder in den sogen. Immersionssystemen sogar $n' < n$. Da μ natürlich ein echter Bruch ist, so folgt aus der letzten Gleichung, dass die Intensität der Strahlung im Bilde auch im günstigsten Falle der entsprechenden des Objektes nicht einmal gleich sein könne, sondern auch dann noch durch die sozusagen zufälligen aber unvermeidlichen Lichtverluste beim Durchgange durch das System vermindert ist.

Mit Rücksicht hierauf müsste man sagen, dass durch optische Systeme — welcher Art auch immer — niemals eine Condensation des Lichtes in Bezug auf die specifische Intensität hervorgebracht wird, sondern im Gegentheil stets eine Verdünnung, Attenuation, desselben.

Für die Berechnung der Helligkeit, in welcher das Bild von der *A.-P.* aus erscheint und ihr Verhältniss zu der Helligkeit, in welcher etwa das Objekt unter den gegebenen Umständen der Beleuchtung etc. dem unbewaffneten Auge erscheinen würde, sind in den oben abgeleiteten Beziehungen alle nöthigen Bestimmungsstücke enthalten. Weitere Folgerungen lassen sich in Bezug auf sie jedoch nur ziehen, wenn gewisse vereinfachende Annahmen gemacht werden.

Wenn die specifische Intensität k innerhalb des ganzen Oeffnungswinkels u constant ist — wie bei selbstleuchtenden festen Körpern sehr nahe der Fall — so ist auch k' eine Constante innerhalb des Winkels u'. Die Helligkeit des Bildes ist dann, wie wir oben gesehen haben, einfach proportional der Fläche der Austrittspupille, mit welcher die Augen-

pupille in Coincidenz gebracht ist — jedoch nur so lange, als letztere grösser ist wie erstere. Wenn hingegen die Augenpupille die kleinere ist, so blendet sie den überschiessenden Theil der *A.-P.* ab und wirkt selbst als *A.-P.* des Instruments.

Bezeichnet also H_0 die Helligkeit, mit welcher das unbewaffnete Auge das Objekt sieht — oder in welcher ihm ein an Leuchtkraft völlig gleiches und nur in allen Theilen proportional vergrössertes Bild erscheinen würde — und H die Helligkeit des durch das Instrument gesehenen Bildes, so ist

$$\frac{H}{H_0} = \frac{p'^2}{p_0^2}, \tag{8}$$

wenn p' den Halbmesser der *A.-P.*, p_0 den der Augenpupille bezeichnet.

Bei den nach Art des Mikroskops wirkenden Systemen fanden wir den Halbmesser der *A.-P.*, p', sehr nahezu

$$p' = \frac{f'}{n'} a,$$

wo $a = n \cdot \sin u$ die Apertur des in das System eintretenden Büschels bezeichnet. Da wir stets $n' = 1$ setzen können, so haben wir $p' = a \cdot f'$. Also

$$H = H_0 \frac{a^2 \cdot f'^2}{p_0^2} = H_0 \frac{a^2}{V^2 p_0^2} = H_0 \frac{a^2 l^2}{N^2 p_0^2}, \tag{9}$$

wenn V die absolute, N die lineare auf die Entfernung l bezogene Vergrösserung des Systems ist.

Die »Normalvergrösserung« V_0 bezw. N_0, bei welcher das Bild in gleicher Helligkeit erscheint, wie das Objekt dem blossen Auge (natürlich in Luft) erscheinen würde, ist hiernach

$$V_0 = \frac{a}{p_0} \text{ bezw. } N_0 = \frac{a \cdot l}{p_0}. \tag{10}$$

Bei derselben Apertur a ist unter verschiedener Vergrösserung

$$H : H_0 = V_0^2 : V^2 = N_0^2 : N_0^2, \tag{11}$$

solange $V > V_0$ bezw. $N > N_0$; hingegen ist

$$H = H_0 \text{ wenn } V \leqq V_0 \text{ bezw. } N \leqq N_0. \tag{11a}$$

Die Helligkeit des Bildes im Mikroskop ist also höchstens gleich der des Sehens mit blossem Auge, und zwar dann, wenn die Vergrösserung gleich oder kleiner als die Normalvergrösserung ist.

Die Helligkeit des Bildes im Mikroskop ist bei ungeänderter Apertur umgekehrt proportional der Flächenvergrösserung, solange diese grösser als die Normalvergrösserung ist[1]).

Bei gegebener Vergrösserung ist die Helligkeit des Bildes proportional dem Quadrate der Apertur der einfallenden Büschel.

Man erhält hiernach folgende zusammengehörige Werthe der Apertur der (conventionellen) Vergrösserung und Helligkeit, wenn man den Radius der Augenpupille $p_0 = 1{\cdot}5\ mm$ annimmt

	$H = H_0$	$H = \frac{1}{4} H_0$	$H = \frac{1}{9} H_0$	$H = \frac{1}{16} H_0$
$a = 0{\cdot}5$	83·3	166·7	250·0	333·3
1·0	166·7	333·3	500·0	666·7
1·5	250·0	500·0	750·0	1000·0

Die Vergrösserungszahlen der zweiten Spalte ($H = \frac{1}{4} H_0$, also $p_0 = 0{\cdot}75\ mm$) kann man, wie wir später sehen werden, sehr annähernd als diejenigen der unverminderten Deutlichkeit des Bildes bezeichnen; sie sind beim Mikroskop,

1) Helmholtz, l. c., pag. 567. Abbé, M. Schultze's Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 438. 1873.

wo künstliche Beleuchtung anwendbar ist, von weit grösserer Bedeutung als diejenigen der unverminderten Objekt-Helligkeit.

Bei teleskopischen Systemen fanden wir (pag. 168) die angulare Vergrösserung gleich dem Reciproken der linearen Vergrösserung in den Pupillen

$$\Gamma = \frac{p}{p'} \quad \text{also} \quad p' = \frac{p}{\Gamma}.$$

Daher ist hier

$$H = H_0 \frac{p^2}{p_0^2} \frac{1}{\Gamma^2}, \tag{12}$$

d. h. es spielt hier die lineare Oeffnung genau dieselbe Rolle wie bei mikroskopischen Systemen die numerische Apertur. Die Normalvergrösserung Γ_0 ist $= p/p_0$. Somit kommen bei unverminderter Helligkeit des Bildes auf je 3 *mm*, behufs Einhaltung normaler Deutlichkeit auf je 1·5 *mm* Oeffnung eine Vergrösserungsziffer.

Wir können daher das allgemeine Resultat dieser Betrachtung dahin aussprechen: In so weit flächenhaft ausgedehnte Objekte in Frage stehen, ist die Leistung optischer Instrumente — von welcher Construction und welchen Anwendungsgebietes auch dieselben sein mögen — darauf gerichtet und zugleich beschränkt, die Objekte dem Auge im Bilde unter vergrössertem Sehwinkel darzubieten, aber in höchstens der gleichen Helligkeit.

Wird aber das System zur Beobachtung von Sternen benützt, welche wegen ihrer grossen Entfernung sich auch bei der von dem Teleskop gelieferten Vergrösserung wie leuchtende Punkte darstellen, so tritt für diese der andere Begriff der Helligkeit in Kraft, wonach dieselbe der gesammten zum Bildpunkte übergeführten Lichtmenge proportional ist. So lange also die Vergrösserung Γ des Teleskops kleiner ist als die Normalvergrösserung Γ_0 — die *A.-P.* grösser als die Augenpupille — reducirt sich die wirksame (Halb-) Oeffnung des Systems auf $\Gamma \cdot p_0$, und die Helligkeit des Sternbildes im Teleskop ist Γ^2 mal grösser als die des direkt gesehenen Sternes. Wenn die Vergrösserung den Werth Γ_0 oder einen grösseren hat, so ist die Helligkeit im Bilde dauernd $(p/p_0)^2$ mal grösser als mit freiem Auge. Man kann also, beide Fälle zusammenfassend, auch sagen, die Helligkeit des Sternbildes ist um so viel grösser als die des direkt gesehenen Sternes, wie die wirksame Oeffnung des Systems die der Augenpupille übertrifft[1]).

Da der Himmelsgrund, von welchem sich die beobachteten Sterne abheben, gemäss dem obigen durch das Teleskop höchstens in gleicher Helligkeit erscheinen kann als mit blossem Auge, so wird ausser der absoluten Helligkeit des Sternbildes auch der Helligkeitsunterschied zwischen dem Stern und dem Untergrund mit wachsender Vergrösserung immer grösser. In Folge dessen werden Sterne durch Teleskope proportional dem Quadrate ihrer wirksamen Oeffnung sichtbarer gemacht. Da die Helligkeit des Himmelsgrundes bei weiterer (Ueber-) Vergrösserung noch proportional dem Quadrate dieser abnimmt, die des Sternes aber hierbei constant bleibt, so ist bei Uebervergrösserung die Sichtbarkeit des Sternes noch vermehrt. Dies Verhältniss geht aber nicht ins Unbegrenzte weiter, da von einer gewissen Vergrösserung an das Sternbild — theils in Folge

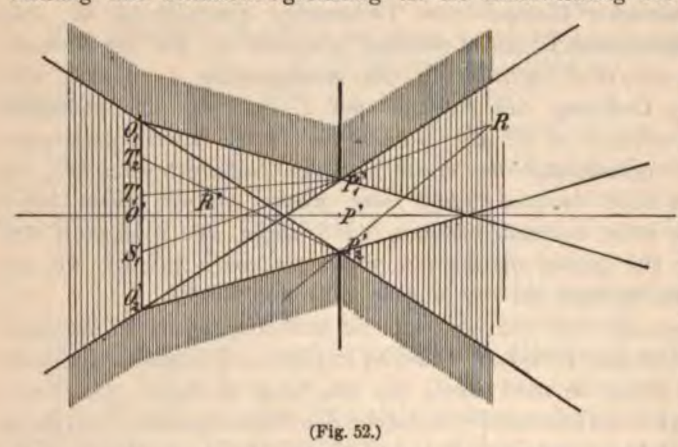
---

[1]) Hierbei ist vernachlässigt, dass sich in Wirklichkeit die Pupille bei Beobachtung des helleren Sternbildes zusammenzieht, beim Sehen mit blossem Auge aber in dunkler Nacht eine viel grössere Oeffnung als 3 *mm* annimmt.

der Aberrationsreste, theils unabhängig von solchen in Folge der Beugung — flächenhaft ausgedehnt wird. —

Wenn die Leuchtkraft des Objektes nicht nach einfachen Regeln bestimmt ist, so lassen sich, wie schon bemerkt, auch keine weiteren Beziehungen als die früher angegebenen zwischen der Helligkeit des direkt gesehenen Objektes bezw. eines bei unveränderter Leuchtkraft blos in seinen Dimensionen vergrösserten Bildes und der seines durch das Instrument beobachteten Bildes feststellen. Bei einer stetig von der Normalen an abnehmenden Strahlungsintensität des Objektes z. B. wird dieses dem blossen Auge in senkrechter Richtung gesehen heller erscheinen müssen als durch das Instrument bei der Normalvergrösserung; denn im ersteren Falle sind die Strahlen der nach der Pupille gelangenden Büschel durchaus von der maximalen Intensität; in den nach der *A.-P.* des Instrumentes zielenden Büscheln aber ist das gesammte einfallende Büschel sozusagen noch einmal in verkleinertem Maassstabe reproducirt, d. h. es enthält neben den centralen hellen Strahlen auch die peripheren mehr und mehr lichtschwachen. In Folge dessen ist die durch ein solches Büschel ausgestrahlte ins Auge gelangende Lichtmenge, und damit die Helligkeit des Bildes, auch bei der »Normalvergrösserung« kleiner als die des direkt gesehenen Objektes. Verglichen mit der Helligkeit des direkt, aber ganz schräg angesehenen Objektes wiederum würde sie grösser sein, und so kann bei entsprechenden Strahlungsgesetzen und entsprechenden Umständen jedes beliebige Verhältniss zwischen beiden Helligkeiten statt haben.

Beleuchtungswirkung des Bildes im übrigen Bildraum. Durch die Gleichung $k' = k\,n'/n^2$ in Verbindung mit den Gesetzen der Abbildung und Strahlenbegrenzung ist die Lichtwirkung des Bildes auch an jeder anderen Stelle als der *A.-P.* bezw. der Netzhaut des beobachtenden Auges völlig bestimmt.



(Fig. 52.)

Die Strahlung findet mit der in conjugirten Richtungen gemäss dem Quadrate des relativen Brechungsexponenten modificirten Leuchtkraft vom Bilde aus ganz ebenso statt, wie von einem nach entsprechendem Gesetze selbständig strahlenden Objekte und ist räumlich durch die im System stattfindende Strahlenbegrenzung genau ebenso beschränkt, wie die eines solchen Objektes durch eine der *A.-P.* nach Grösse und Lage gleiche Oeffnung in einer physischen für Licht undurchlässigen Wand. Vermöge einer Construktion, ganz gleichartig derjenigen, durch welche man Kernschatten, Halbschatten und Lichtraum eines leuchtenden Körpers findet, kann man in allen Fällen den ganzen Raum im Bereiche des letzten Mediums in drei von einander getrennte Abschnitte zerfällen[1]) (Fig. 52): erstens in einen

[1]) Vergl. E. Abbe, Lichtstärke in optischen Instrumenten. Jen. Zeitschr. f. Naturw. u. *Med. 6, pag. 263.* 1872.

solchen, in welchem alle Punkte des Bildes strahlend wirken, wozu auf alle Fälle die *A.-P.* $P_1' P_2'$ selbst gehört; zweitens in einen solchen, für welchen ein Theil des Bildes leuchtet, ein anderer unwirksam ist; endlich in einen dritten, für welchen alle Wirkung ausgeschlossen ist, d. h. das ganze Bild durch die undurchsichtige Wand des Diaphragmas verdeckt sind. (In der Figur sind diese Theile durch verschiedene Schraffirung unterschieden.) Der für irgend einen Punkt R wirksame Theil $S_1 O_2'$ des Bildes bestimmt sich, wegen der Geradlinigkeit der Strahlen, stets als die Projection der *A.-P.* von diesem Punkte auf das Licht ausstrahlende Bild, bezw. als der Theil des Bildes, welcher innerhalb dieser Projection gelegen ist. Hierbei ist es gleichgiltig, ob der Punkt R jenseits der *A.-P.* oder wie R' zwischen ihr und dem Bilde liegt. Im letzteren Falle ist die Projection $T_1 T_2$ eine virtuelle, durch Rückwärtsverlängerung der Strahlen von der *A.-P.* nach dem Punkte R' hin auszuführende. Ebenso ist es gleichgiltig, ob die *A.-P.* im Sinne der Lichtbewegung hinter dem Bilde liegt — wie bei Bestimmung der scheinbaren Helligkeit jedenfalls angenommen werden muss — oder vor demselben. Im letzteren Falle — man denke sich z. B., dass in Fig. 52 $O_1' O_2'$ die *A.-P.* und $P_1' P_2'$ das Bild sei — geht die Strahlung auf einen vor dem Bilde gelegenen Punkt zwar natürlich nicht von diesem, sondern in Wirklichkeit von der *A.-P.* aus. Die Art, wie wir die Lichtwirkung auf den Punkt R vorher bestimmten, kann aber trotzdem auch hier unverändert festgehalten werden.

Beleuchtungswirkung am Orte des Bildes. Lichtstärke proicirter Bilder. Man kann in solchen Fällen die Wirkung auch direkt als eine von der *A.-P.* ausgehende bestimmen, indem man auf den pag. 176 abgeleiteten Satz zurückgreift. Nach diesem ist die Beleuchtungswirkung an der Stelle R' von dem für sie wirksamen Theile $T_1 T_2$ des Bildes aus genau dieselbe, wie eine von der *A.-P.* ausgehende, wenn man jedem Punkte P_1' der letzteren die gleiche Leuchtkraft beilegt, als der auf dem Vektor $P_1' R'$ gelegene Bildpunkt T_1 in der Richtung des Vektors hat. Man kann daher das Gesetz der Lichtwirkung überhaupt auch in folgender Form aussprechen: Es ist die gesammte Strahlung an irgend einem Orte des letzten Mediums in allen Stücken identisch mit einer Strahlung aus der Fläche des Oeffnungsbildes, wofern man dieser jedesmal Punkt für Punkt eine Leuchtkraft beilegt, gleich oder proportional derjenigen welche die ursprüngliche Lichtquelle in dem Theile, dessen Bild sich von jenem Orte aus auf das Bild der Oeffnung projicirt und zwar in der betreffenden Projectionsrichtung besitzt[1]).

Diese Form des Gesetzes ist zwar im allgemeinen gegenüber der zuerst entwickelten für die Uebersicht der gesammten Wirkungen weniger bequem. Dagegen ist sie allein anwendbar und zugleich auch besonders einfach in dem speciellen Falle, dass die Lichtwirkung gesucht wird für einen Punkt, der in das Bild der Lichtquelle selbst fällt. Dieses Bild muss hierbei, sofern physisch realisirbare Verhältnisse ins Auge gefasst werden, natürlich ein reelles sein. Für diesen Fall — wie er bei jeder Sammellinse für ihren Focus, ebenso bei gewissen Beleuchtungsapparaten, beim Auge, photographischen Objectiv und Projectionsmikroskop sowie jeder anderen Projection des Bildes auf einen Schirm vorliegt — versagt die zuerst aufgestellte Regel ihren Dienst. Denn es würde dann der wirksame Theil des Bildes und zugleich sein Abstand vom Orte der Wirkung

[1]) Abbé, l. c., pag. 288. Wir folgen dieser Darstellung im nachstehenden zum Theil wörtlich.

gleich Null. Hingegen stellt sich dieser Fall für die zuletzt ausgesprochene Form des Gesetzes als ein einfacher Grenzfall dar. Denn je näher der Punkt R' an $O_1'O_2'$ rückt, desto kleiner wird der Theil T_1T_2, desto kleiner also auch der correspondirende Theil der Lichtquelle selbst, von welchem die *A.-P.* ihre Leuchtkraft entlehnt. Rückt R' schliesslich ganz in das Bild $O_1'O_2'$, so reducirt sich der Raum T_1T_2 auf einen einzigen Punkt, dessen Leuchtkraft folglich für alle Theile des Oeffnungsbildes zugleich maassgebend wird. Man erhält daher für den ins Auge gefassten Fall folgenden einfachen Satz:

Die Lichtwirkung, welche irgend ein optischer Apparat in einem beliebigen Punkte des Bildes einer gegebenen Lichtquelle vermittelt, ist stets äquivalent einer Lichtstrahlung aus der Fläche des Oeffnungsbildes, wenn dieser in allen Theilen die Leuchtkraft des zugehörigen Objektpunktes in der entsprechenden Richtung beigelegt wird — oder eine dieser im Verhältniss des Quadrates des Brechungsexponenten proportionale, falls das letzte Medium vom ersten verschieden ist.

Wir konnten dieses letztere Ergebniss auch unmittelbar aus den Grund-Gleichungen ableiten, indem wir berücksichtigten, dass die Grösse dL in Gl. (1) und (1a) wegen deren symmetrischer Form ebensogut auch als die Lichtmenge aufgefasst werden kann, welche das Element dQ der Pupille auf das Element dq des Objektes strahlt, wenn ersterem diejenige Leuchtkraft k beigelegt wird, welche dq in der betreffenden Richtung hat. Das gleiche Verhältniss gilt dann auch im Bildmedium. Dieselbe Strahlungswirkung, welche von einem Bildelement in irgend einer Richtung ausgeht, würde nach jenen Gleichungen von dem in dieser Richtung gelegenen Element der *A.-P.* ausgeübt werden, wenn dasselbe die gleiche Leuchtkraft k' besässe — und dies gilt dann ohne weiteres auch für Orte im Bilde selbst.

Besitzt wieder das Objekt eine innerhalb der wirksamen Apertur vom Strahlungswinkel unabhängige Leuchtkraft, so ist die Beleuchtungstärke, welche durch Projection seines Bildes auf einen Schirm in diesem hervorgebracht wird, genau dieselbe, als wenn die *A.-P.* gleichmässig mit der Intensität des Objektes — oder einer ihr im Verhältniss von $(n'/n)^2$ proportionalen — leuchtete. —

Mit dieser Ergänzung vermag die aufgestellte Theorie über alle Fragen Rechenschaft zu geben, welche sich auf dem Boden der ihr zu Grunde liegenden Voraussetzungen darbieten können. Uebrigens erkennt man, dass alle wesentlichen Ergebnisse dieser Betrachtungen, wenigstens als mehr oder minder zutreffende Näherungen oder mit leicht zu überschauenden Correctionen, auch dann noch in Geltung bleiben, wenn eine oder die andere jener Voraussetzungen im einzelnen Falle nicht vollständig erfüllt ist.

Wie der unvermeidlichen Verminderung der Leuchtkraft in Folge von Reflexionen und Absorptionen durch Einführung eines Verlustfaktors Rechnung getragen werden kann wurde oben schon erwähnt. Was ferner die chromatischen und sphärischen Abweichungen anlangt, so stellten erstere von vornherein kein Hinderniss für die Anwendung der entwickelten Sätze dar; denn diese kann auf die verschieden farbigen Bestandtheile des Lichtes einzeln erfolgen und liefert alsdann für jeden ein Resultat der gleichen Art, nur dass die geometrischen Bestimmungsstücke darin -- Grösse und Lage der maassgebenden Bilder — von einer Farbe zur anderen um ein weniges variiren. Die Gesammtwirkung lässt sich daher bestimmen durch Summation der Strahleneffekte, welche von den verschiedenen farbigen Bildern, jedes für sich genommen, ausgehen.

Das Auftreten sphärischer Aberrationen, und zwar solcher, welche den homocentrischen Verlauf der Strahlen beeinträchtigen, hebt allerdings den Begriff des optischen Bildes und damit auch die darauf gegründeten Schlüsse streng genommen auf. Daher erlauben die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung die Anwendung ohne weiteres nur in dem Falle, dass die Oeffnungswinkel der wirkenden Strahlenkegel verschwindend klein bleiben, oder es muss, wenn sie eine endliche Grösse besitzen, ausdrücklich die Annahme gemacht werden, die wir anfangs eingeführt haben, dass das optische System für die Orte der beiden maassgebenden Bilder aplanatisch sei. Wie man indess, auch wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, bei der Betrachtung der rein geometrischen Beziehungen den einfachen Begriff des optischen Bildes dennoch festhält, indem man die Abweichungen vom Strahlengang durch Einführung kleiner Zerstreuungskreise für die Bildpunkte in Anschlag bringt, so lassen sich in diesem Falle auch die photometrischen Gesetze in der entwickelten einfachen Form aufrecht erhalten, wofern bei ihrer Anwendung im Einzelnen auf diese Zerstreuungskreise in leicht ersichtlicher Art Bedacht genommen wird. — Aberrationen endlich, welche sich in anderer Art äussern, etwa in einer Krümmung der Bilder oder in ungleichförmiger Vergrösserung, sind für die in Rede stehenden Fragen völlig gleichgültig, da über die Gestalt des Bildes keinerlei Voraussetzung gemacht worden ist.

Wir wollen die Resultate der vorstehenden Betrachtungen nur noch auf einen praktisch wichtigen Fall anwenden: die sogen. Beleuchtungsysteme (Condensoren, Collektoren), welche man im Mikroskop oder bei Projectionsapparaten anwendet. Mit Bezug auf diese folgt aus obigen Sätzen: »dass keine noch so kunstreich erdachte Combination optischer Apparate in Hinsicht auf die Stärke des durch eine Lichtquelle in ihrem eigenen Medium zu erzielenden Beleuchtung jemals mehr leisten kann, als auch ohne alle Zwischenmittel erreichbar ist, wenn man entweder der Lichtquelle von gegebener Beschaffenheit (d. h. gegebener Leuchtkraft) eine beliebig grosse Flächenausdehnung zu geben vermag, oder aber die zur Verfügung stehende Lichtquelle dem Orte der Wirkung beliebig zu nähern im Stande ist. Denn die schliessliche Wirkung aller denkbaren Hilfsapparate reducirt sich immer auf die direkte Strahlung einer Fläche, welche zwar vom Orte der Wirkung aus unter Umständen einen sehr viel grösseren Winkelraum als die Lichtquelle selbst erfüllen kann, die jedoch an keiner Stelle eine höhere Leuchtkraft entwickelt als die Lichtquelle selbst, mindestens in einem ihrer Theile, faktisch besitzt — wenigstens insofern die Wirkung in demselben Medium erfolgt. Ist es daher möglich, die Lichtquelle dem Punkte der Wirkung so weit zu nähern, dass ihr am intensivsten leuchtender Theil unter einem eben so grossen Winkelraum erscheint als bei Anwendung des Beleuchtungssystems, so muss auch ihre Lichtwirkung ohne alle Hilfsapparate die gleiche werden wie mit deren Hilfe; in Wahrheit wird erstere sogar überwiegen um den Betrag der unvermeidlichen Lichtverluste, die wiederholte Spiegelungen und Brechungen nach sich ziehen. Alle Vorrichtungen zur Verstärkung einer Beleuchtung, zur sogen. Lichtconcentration, können daher niemals einen anderen Zweck haben — wenigstens niemals einen andern wirklich erfüllen — als den: mit Hilfe einer gegebenen Lichtquelle von beschränkten Dimensionen oder an einem entfernten Orte dennoch eine solche Wirkung zu erzielen, wie sie direkt nur durch eine sonst gleichartige, aber von anderer Ausdehnung oder in anderer Lage erreichbar

wäre«[1]). Nur in dem Falle, dass das Licht dem Objekte mittelst der Beleuchtungsvorrichtung in einem anderen Medium als Luft zugeführt wird — wie dies z. B. bei den sogen. Immersionscondensoren der Mikroskope der Fall ist — wird die Beleuchtung des Objektes bei gleicher Winkelausdehnung der Lichtquelle im Verhältniss von $n^2 : 1$ gesteigert.

3) Die Apertur der Systeme ist endlich noch maassgebend für die Beugungserscheinungen, welche die Abbildung begleiten oder vielmehr, vom Standpunkte der Undulationstheorie, deren eigentliches Wesen ausmachen.

Wenn das Objekt selbstleuchtend ist, also jeder Punkt desselben, unabhängig von den benachbarten, Centrum einer Wellenbewegung ist, so begrenzt die *E.-P.* bei nahen Objekten die angulare, bei unendlich entfernten die lineare Ausdehnung der in das System eintretenden, die *A.-P.* ebenso diejenige der zum Bilde übergeführten Wellenflächen. Die angulare Oeffnung der letzteren aber bestimmt die Grösse des Beugungsscheibchens, welches in der dem Objekt dioptrisch conjugirten Ebene nach den Gesetzen der Diffractionstheorie an Stelle eines Bildpunktes entsteht. Auf diese Weise wird die Apertur, und zwar wie eine nähere Betrachtung lehrt, in dem von uns stets benutzten Maasse als Produkt aus Brechungsexponent des Objektmedium und Sinus des halben Oeffnungswinkels in diesem Medium, bestimmend für die Feinheit des »Korns«, welches, auch bei der grössten dioptrischen Vollkommenheit des Systems, im Bilde stets vorhanden ist. Die Schärfe, in der sich die Conturen grösserer Objekte abbilden und das Auseinandertreten, die sichtbare Scheidung, sehr nahe benachbarter Objektelemente hängen also in diesem Falle unmittelbar und allein von der Apertur des Systems ab.

Wenn das Objekt nicht selbstleuchtend ist sondern von einer anderen Lichtquelle be- oder durchleuchtet wird, so findet der oben angedeutete Abbildungsvorgang nur in Bezug auf diese originäre Lichtquelle statt. Die Strahlen (Elementarwellen), die das Objekt von jedem Punkt der Lichtquelle erhält, stehen jedoch in diesem Falle mit einander in einer einfachen Phasenverknüpfung, die nur von der Neigung des Objekts gegen die Verbindungslinie mit der Lichtquelle abhängt und das gleiche ist dann, gemäss der physischen Beschaffenheit des Objekts (seiner Absorptions- und Verzögerungswirkung) mit den von diesem ausgehenden reflektirten oder durchgelassenen Elementarwellen der Fall. Diese sind nach Richtung, Intensität und Phase anzusehen als der Beugungseffekt, den das Objekt jedem Punkt der Lichtquelle gegenüber ausübt. Die angulare Ausdehnung des Beugungseffektes wie seine ganze innere Beschaffenheit hängen hier in erster Linie von der Natur des in Frage stehenden Objektes ab. Die Apertur, d. h. die *E.-P.* nach Lage, Grösse und Brechungsexponent des Objektmediums ist dann bestimmend für den Umfang, in welchem dies am Objekt gebeugte Licht Zugang zum System und Bilde hat.

Eine nähere Analyse des hier in Frage stehenden Vorgangs zeigt, dass die Lichtvertheilung in der dem Objekt dioptrisch conjugirten Ebene des Bildraums, das sogenannte Bild des Objektes, ganz und gar bestimmt ist durch die geometrische wie physische Beschaffenheit des in das System eingelassenen Theils jener Beugungserscheinung. Ueber den Zusammen-

[1]) ABBÉ, l. c., s. auch Beiträge zur Theorie etc. MAX SCHULTZE's Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 438. 1873, und Ueber einen neuen Beleuchtungsapparat am Mikroskop ibid. pag. 469.

hang zwischen dem, was man in solchen Fällen als Bild des Objektes auffasst, mit diesem selbst und den Bestimmungsstücken (Brennweite und Apertur) des Systems lassen sich dann mehrere Sätze von ziemlicher Allgemeinheit aufstellen, welche durch zahlreiche Erfahrungen als im wesentlichen sicher zutreffend erwiesen sind.

Doch wollen wir den physikalischen Charakter beider Arten von Abbildung, der direkten von selbstleuchtenden und der secundären von beleuchteten Objekten, hier nur erwähnt haben und an späterer Stelle eingehend betrachten.

Für eine Theorie der Strahlenbegrenzung in dem oben festgehaltenen Sinne habe ich nur in den früher bereits genannten Werken von BIOT, MOSSOTTI, FERRARIS und in einigen wenigen Specialabhandlungen, z. B. von LUBIMOFF flüchtige Ansätze und spärliche Beiträge gefunden. Ihre eigentliche Begründung und systematische Durchführung dürfte auf ABBE (in seinen oben citirten Abhandlungen und seinen Universitätsvorlesungen) zurückzuführen sein.

VIII. Die Hauptgattungen der optischen Instrumente.

I. Projectionssysteme.

I. Das Auge.

Trotzdem nicht nur die physikalischen, sondern auch die physiologischen Functionen des Auges von grösster Bedeutung sind für das Verständniss und den richtigen Gebrauch aller anderen optischen Instrumente, können wir hier — dem Plane dieser Darstellung gemäss — selbst auf die ersteren nicht näher eingehen und etwas wie eine »Dioptrik des Auges« liefern, sondern müssen uns auf eine allgemeine Charakteristik seiner Einrichtung und Wirkung und auf die blosse Subsumption dieses optischen Instruments unter das Schema der übrigen beschränken. Bezüglich der gesammten Physiologie des Auges verweisen wir auf deren bekannte und z. Th. klassische Darstellungen[1]. Die Dioptrik des Auges ist ausser in diesen noch in einer Reihe besonderer Werke behandelt, von denen wir nachstehend die wichtigsten namhaft machen[2].

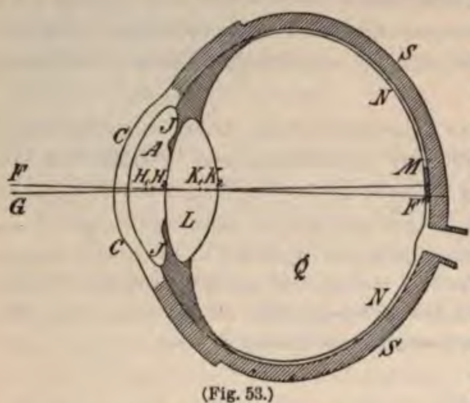
Das optische System im Auge besteht in der Reihenfolge von aussen nach innen aus a) der Hornhaut *(Cornea) C* (Fig. 351; rechtes Auge; Horizontalschnitt). Dieselbe bildet den vordersten, stärker gewölbten und durchsichtigen Theil der Sehnenhaut *(Sclerotica) S*, welche den gesammten Augapfel umschliesst. Sie ist ca. 1 Millim. dick, ellipsoidisch, im Scheitel aber sehr nahezu kugelig.

---

[1] In erster Linie v. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Optik. 1. Aufl. 1867. 2. Aufl. im Erscheinen begriffen. (Wir citiren im Folgenden stets nach der Paginirung der 1. Aufl.) Kürzer sind: H. AUBERT's Grundzüge d. physiol. Optik. Leipz. 1876.

[2] LISTING, Beitrag zur physiol. Optik. Göttingen 1845. Ders. Mathem. Discussion des Ganges der Lichtstrahlen im Auge. WAGNER's Handwörterb. d. Physiol. 4, pag. 451, 1851. v. ZEHENDER, Anleitg. z. Stud. d. Dioptrik d. menschl. Auges. Erlangen 1856. WÜLLNER, Einleitg. i. d. Dioptr. d. Auges. Leipz. 1866. STAMMESHAUS, Darst. d. Dioptr. d. norm. menschl. Auges. Leipzig 1877. L. MATTHIESSEN, Grundr. d. Dioptr. geschichteter Linsensysteme. etc. Leipzig 1877. A. FICK, Art. d. Dioptr. d. Auges in HERMANN's Handb. d. Physiologie. Bd. 3.

Der Radius der hinteren Fläche ist nicht genau bekannt, dieselbe ist aber jedenfalls nahe concentrisch der vorderen[1]).



(Fig. 53.)

Die Hornhaut ist die vordere Wand der Augenkammer, *A*, welche mit einer Flüssigkeit *(Humor aqueus)* vom Index $n_D = 1{\cdot}3365$ gefüllt ist. Die Hinterwand der Kammer wird von der Iris, *I*, gebildet, welche die Apertur-Blende des Auges ist (Oeffnung gewöhnlich zwischen 2 und 5 Millim.) und in deren mittlerem freien Theile von der sich an diese anlegenden Krystallinse *L*. Letztere ist biconvex, im Ruhezustande an der vorderen Fläche erheblich weniger gekrümmt als an der hinteren, im Accommodationszustande nahezu gleichschenklig (nähere Angaben s. in der unten folgenden Tabelle). Sie besteht zwiebelartig aus sehr dünnen Schichten, deren Indices von der Hülle nach innen, dem Kern hin, zunehmen; dieser Textur verdankt sie mehrere wichtige Eigenschaften. Die Linse begrenzt nach vorn zu den zweiten Hohlraum des Auges, welcher mit dem Glaskörper *(Humor vitreus) Q*, einer gallertartigen Masse von nahezu demselben Index wie das Kammerwasser, ausgefüllt ist. Die hintere Begrenzung dieses Raumes wird von der Netzhaut *(Retina) N*, gebildet, der innersten Auskleidung der Sehnenhaut. Diese ist der lichtempfindliche Schirm des Auges, auf welchem dessen optischer Apparat die Bilder der äusseren Gegenstände entwirft. Besonders empfindlich ist der nicht ganz in der Augenaxe, sondern etwas nach der Schläfe zu gelegene gelbe Fleck *(Macula lutea) M* mit einer dünnen, etwas vertieften Stelle, der Netzhautgrube *(Fovea centralis)*, in der Mitte. Auf dieser Stelle wird das Bild desjenigen Gegenstandes entworfen, den das Auge fixirt, d. h. den man besonders scharf zu sehen sucht.

Cardinalpunkte und Grundfaktoren der Abbildung im Auge.

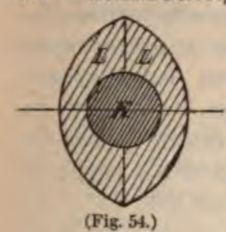
Da der Brechungsexponent des Kammerwassers wenig abweicht von dem der Hornhaut und letztere jedenfalls eine sehr grosse Brennweite besitzt, so vernachlässigt man gewöhnlich die an der Hinterfläche stattfindende Brechung und betrachtet die Vorderfläche der Hornhaut als die eines Mediums vom Index des Kammerwassers, das bis zur Krystalllinse reicht. Die so berechnete Brennweite der Hornhaut (s. die Tabelle unten) ist maassgebend für das Sehen aphakischer Augen, d. h. solcher, die durch Operation der Krystallinse beraubt sind, da das Kammerwasser auch nahe denselben Index hat wie der Glaskörper, welcher alsdann das ganze Augeninnere ausfüllt.

Die Krystalllinse hat infolge ihres geschichteten Baues, wie schon die älteren experimentellen Untersuchungen von Young, Listing, Senff, Helmholtz, Zehender erwiesen und die theoretischen Arbeiten namentlich von Hermann und Matthiessen erklärt haben eine kürzere Brennweite, als wenn sie bei gleicher äusserer Gestalt durchweg den grössten in ihr vorkommenden Brechungsindex, den des

[1]) Nach ganz neuen Messungen von Tscherning, Ztschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg. 3, pag. 429. 1892, hat die Hinterfläche einen um 2 Millim. kürzeren Radius als die Vorderfläche.

Kerns, besässe. Ihre Brennweiten (aber nicht genau auch ihre anderen Cardinalpunkte) sind die einer gleichgeformten homogenen Linse von noch höherem Index als dem des Kerns, dem sogenannten Totalindex.

L. HERMANN[1]) giebt hierfür folgende schematische Erklärung: Die Krümmung der aufeinanderfolgenden Schichten nimmt bis zum Kern natürlich immer zu.



(Fig. 54.)

Die Schichten bilden daher lauter convexconcave Menisken, welche in Luft negative (vordere) Brennweite haben würden. Denkt man sich im einfachsten Falle die Linse bestehend aus einem kugeligen Kern K. (Fig. 54) von hohem Index, der von zwei concavconvexen Zerstreuungslinsen L niederen Indicis schalenartig umgeben ist, so compensiren letztere einen Theil der positiven Brechungswirkung des Kerns. Diese Compensation ist um so stärker, je höher der Index der Schalen ist und umgekehrt. Folglich ist die Brennweite der ganzen Linse kleiner, wenn die Schalen geringeren Index haben als der Kern, wie wenn sie gleichen hätten. (Vergl. auch HELMHOLTZ pag. 94).

Systeme, in welchen der Brechungsexponent des Materials sich stetig ändert, bedürfen einer besonderen Betrachtung; sie geben Wirkungen, die wie die hier fragliche beim ersten Anblick etwas paradoxes haben. Z. B. wirkt ein Cylinder mit planen Endflächen durch diese hindurch als Convex- oder Concavlinse, je nachdem der Brechungsexponent im Cylinder von der Axe nach dem Mantel hin concentrisch abnimmt oder wächst.

L. MATTHIESSEN[2]) machte wahrscheinlich, dass die Brechungsindices n in den Schichten der Krystallinse das Gesetz befolgen:

$$n = N_1 \left(1 + \zeta \frac{b^2 - y^2}{b^2}\right), \tag{1}$$

wo N_1 der Index der äussersten (Cortical-)schicht ist, b ihre Entfernung vom Kern, y die Kerndistanz der Schicht vom Index n und ζ das »Increment« des Brechungsindex; nämlich wenn N_m der Index des Kerncentrums ist, wird N_1 definirt durch die Gleichung

$$N_m = N_1(1+\zeta) \tag{2}$$

Der Totalindex N ergiebt sich aus MATHIESSEN's Theorie zu

$$N = N_1 \left(1 + 2\zeta + \frac{4}{3}\zeta^2 \frac{b_1 + b_2}{r_1 + r_2}\right), \tag{3}$$

wo die Indices 1 und 2 sich auf Vorder- und Hinterfläche der Linse beziehen. Die Cardinalelemente des Auges werden unter dieser Annahme durch relativ einfache Ausdrücke dargestellt. Nach den sehr zuverlässigen Messungen von MÖNNICH ist beim Rinds-Auge $N_1 = 1{\cdot}387$, $\zeta = 0{\cdot}057$ zu setzen, beim Menschen nach MATTHIESSEN $N_1 = 1{\cdot}385$, $\zeta = 0{\cdot}0186$, wonach hier $N = 1{\cdot}4367$ würde.

Aus den Messungen verschiedener Beobachter hat HELMHOLTZ die in folgen-

---

[1]) Schiefer Durchgang von Strahlenbündeln. Gratul.-Schrift. Zürich 1874.

[2]) v. GRÄFE's Archiv f. Ophthalm. 22, pag. 131. 1876; 31, pag. 34. 1885; Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipz. 1877. PFLÜGER's Archiv 19, pag. 480. 1879; 36, pag. 79. 1885; SCHLÖMILCH's Ztschr. f. Math. u. Phys. 24, pag. 138. 1879; 26, pag. 179. 1881 EXNER's Repert. d. Phys. 22, pag. 333. 1886; 24, pag. 401. 1888; 25, pag. 663. 1889. Berlin-EVERSBUSCH's Ztschr. f. vergl. Augenheilk. 4, pag. 1. 1887. 5, pag. 1, pag. 97, 123. 1887; 6, pag. 103. 1889. Ueber gleichgerichtete Bestrebungen Anderer s. die Litteraturangaben in der 3. oben genannten Abhdlg. und die Referate v. M. in MICHEL's Jahresberichten der Ophtalmol. von Bd. 8. 1879 (für 1877) an.

der Tabelle zusammengestellten Mittelwerthe für die Dimensionen und Indices der brechenden Medien im Auge abgeleitet, aus denen sich dann die Cardinalelemente seiner Bestandtheile und des Ganzen berechnen liessen, wie nachstehend (Physiol. Optik, pag. 140). Wir bemerken zu dieser Tabelle, dass die Resultate der einzelnen Beobachter sowohl in ihren Durchschnittswerthen von einander ziemlich erheblich abweichen, als auch eine über Erwarten grosse individuelle Variabilität, namentlich in den Dimensionen verschiedener Augen erwiesen haben, wenn man in Betracht zieht, von wie vielen Faktoren die Gesammtwirkung des Auges abhängt, und dass diese doch trotz jener Variationen im Allgemeinen eine sehr gute ist. Wir setzen zur Illustration dessen neben die HELMHOLTZ'schen Durchschnittswerthe diejenigen, welche TSCHERNING (l. c. pag. 485) an einem Individuum durch sehr sorgfältige Messungen ermittelt hat.

Dimensionen und Constanten des menschlichen Auges.

	HELMHOLTZ Accom. f. Ferne	HELMHOLTZ Accom. f. Nähe	TSCHERNING
Gemessen.			
1. Brechungsvermögen der Hornhaut			1·377
2. Brechungsvermögen des Kammerwassers und Glaskörpers	1·3365	1·3365	1·3365
3. Totales Brechungsvermögen der Krystalllinse [1])	1·4371	1·4371	1·42
4. Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche	7·8 *mm*	7·8 *mm*	8·0 *mm*
5. Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche	10·0 „	6·0 „	10·2 „
6. Krümmungsradius der hinteren Linsenfläche .	6·0 „	5·5 „	6·2 „
7. Ort der vorderen Linsenfläche } gegenüber dem Hornhautscheitel	3·6 „	3·2 „	3·5 „
8. Ort der hinteren Linsenfläche } gegenüber dem Hornhautscheitel	7·2 „	7·2 „	7·6 „
Berechnet.			
9. Vordere Brennweite der Hornhaut	23·3 „	23·3 „	24·4 „
10. Hintere Brennweite der Hornhaut	31·1 „	31·1 „	32·6 „
11. Brennweite der Linse	50·6 „	39·1 „	62·5 „
12. Abstand des vorderen Hauptpunktes der Linse von ihrer Vorderfläche	2·1 „	2·0 „	2·4 „
13. Abstand des hinteren von der Hinterfläche .	— 1·3 „	— 1·8 „	— 1·5 „
14. Abstand der beiden Hauptpunkte der Linse von einander	0·2 „	0·2 „	0·2 „
15. Hintere Brennweite des Auges	20·7 „	18·7 „	22·9 „
16. Vordere Brennweite des Auges	15·5 „	14·0 „	17·1 „
17. Ort des ersten Hauptpunktes gegenüber dem Hornhautscheitel	1·75 „	1·9 „	1·5 „
18. Ort des zweiten Hauptpunktes	2·1 „	2·3 „	1·9 „
19. Ort des ersten Knotenpunktes	7·0 „	6·6 „	7·3 „
20. Ort des zweiten Knotenpunktes	7·3 „	7·0 „	7·6 „
21. Ort des vorderen Brennpunktes	— 13·7 „	— 12·1 „	— 15·6 „
22. Ort des hinteren Brennpunktes	22·8 „	21·0 „	24·75 „
23. Fernpunkt des aphakischen Auges	— 63·5 „		— 73·9 „

Da sowohl die Hauptpunkte als die Knotenpunkte des Auges einander sehr nahe liegen, so begnügt man sich für die meisten Fälle der Anwendung nach dem Vorschlag LISTING's [1]) mit der Annahme eines einfacheren Baues des Auges, mit dem sogenannten reducirten Auge. LISTING lässt die Entfernung zwischen

[1]) Beitr. z. physiol. Optik. Göttinger Studien 1848.

den beiden Brennpunkten ungeändert, vereinigt das Paar der Haupt- und Knotenpunkte in je einen mittleren Punkt und nimmt das ganze Auge als aus einem Medium vom Index des Glaskörpers bestehend an. Diesem Schema entspricht eine brechende Oberfläche, welche die Axe im vereinigten Haupptunkte schneidet, und deren Centrum im Knotenpunkte liegt. In runden Zahlen würde der Krümmungsradius dieser Fläche = 5 Millim., der Abstand ihres Mittelpunkts von dem zweiten Brennpunkt (Netzhaut) = 15 Millim.

Accommodation.

Das Auge ist nach den obigen Ergebnissen ein collektives System von etwas variabler Brennweite. Vermöge dieser Variabilität kann es (N. B. nacheinander!) auf der Netzhaut scharfe (umgekehrte, verkleinerte) Bilder von Gegenständen entwerfen, die sich in verschiedener Entfernung von ihm befinden. Wir beriefen uns auf diese Fähigkeit der Accommodation schon früher, pag. 172, und bezeichneten nach DONDERS[1]) den dem Auge nächsten Punkt, für den eine vollständige Accommodation ausgeführt werden kann, als Nahepunkt, den entferntesten als Fernpunkt der Accomodation. Augen, deren Fernpunkt im Unendlichen liegt, bezeichnet DONDERS als emmetropische, solche bei denen er eine andere Lage hat, als ametropische. Und zwar nannte er ein Auge, dessen Fernpunkt vor ihm, aber in endlicher Entfernung, liegt myopisch, ein solches in welchem er hinter ihm liegt, hypermetropisch; letzteres vereinigt also auch noch convergirende Büschel auf der Netzhaut. (Der Grund dieser Anomalien beruht meistens in einer verschiedenen Länge der Augenaxen.)

Der Grad der Myopie oder Hypermetropie wird durch die reciproke Brennweite (Stärke) der vor das Auge zu setzenden dünnen Hilfslinse (Brille) bemessen, welche den Fehler corrigirt, diese Stärke in Metern gerechnet (Dioptrien).

Das Maass für das Accommodationsvermögen ist die Stärke $1/A$ einer an Stelle des Auges zu bringenden unendlich dünnen Linse, für die dessen Fern- und Nahepunkt conjugirte Punkte sind.

Sind also die Entfernungen der letzteren bezw. F und N, so ist nach DONDERS

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{N}-\frac{1}{F} \tag{4}$$

das Maass der Accommodationsbreite, ebenfalls nach Metern gerechnet. Es kann dann A auch aufgefasst werden als die Entfernung des nächsten Punktes, für den das mit einer Linse von der negativen Brennweite F versehene Auge noch zu accommodiren vermag.

Den — mit zunehmendem Alter immer stärker werdenden — Mangel an Accommodationsfähigkeit bezeichnet DONDERS als Presbyopie. Im zehnten Lebensjahre beträgt die Accommodationsbreite im Mittel 13·5 Dioptrieen.

Strahlenbegrenzung.

Dieselbe ist in Bezug auf die Weite der abbildenden Büschel gegeben durch die Iris; in Bezug auf das Gesichtsfeld liegt keine Begrenzung vor, da die optischen Medien (Hornhaut, Linse) des Auges auch die senkrecht zur Axe einfallenden Strahlenbüschel noch hindurchlassen, und z. B. auch die Linsenränder keine Abblendung des Sehfelds herbeiführen. Die Eintrittspupille — hier schlechthin

---

[1]) Anomalies of accomodation and refraction. London 1864.

Pupille genannt — ist das von dem System Hornhaut-Kammerwasser in Luft entworfene Bild der Iris. Sein Mittelpunkt liegt nach HELMHOLTZ 0·6 Millim. vor der Iris und ist um $\frac{1}{7}$ vergrössert. Die *A.-P.* des Auges ist das von der Krystalllinse im Medium des Glaskörpers entworfene Bild der Iris; sie ist um 0·1 Millim. der Netzhaut näher gerückt als diese und etwa um $\frac{1}{18}$ vergrössert.

Die *E.-P.* ist der Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen, hier Visirlinien genannt, d. h. sie ist der Punkt, von welchem aus das Auge die scheinbare Grösse der Gegenstände bemisst. Seine Kenntniss ist also nothwendig, wo es sich darum handelt, die Stellen im Raume zu finden, deren gleichzeitige Bilder auf der Netzhaut Zerstreuungskreise mit coincidirenden Mittelpunkten sind. In den Fällen, wo man weiss, dass das Bild auf der Netzhaut ein scharfes ist, genügt die Kenntniss der Knotenpunkte. Je eine nach dem vorderen Knotenpunkt gezogene Linie im Objektmedium und die ihr parallele vom zweiten Knotenpunkt nach der Netzhaut heissen Richtungslinien des Sehens. Diejenige Richtungslinie, welche die Stelle des direkten Sehens trifft, d. h. im Glaskörper vom 2. Knotenpunkt nach der Netzhautgrube geht, nannte HELMHOLTZ die Gesichtslinie; dieselbe ist verschieden von der optischen Axe des Auges und ist in Fig. 53 mit GK_1K_2M bezeichnet und in ihrem Verhältniss zur Axe des Auges FF' dargestellt.

Die Apertur der abbildenden Strahlen im Auge ist bei einem Pupillendurchmesser von 4 Millim. = 0·15. Die der objektseitigen Büschel variirt natürlich mit dem Objektabstand innerhalb weiter Grenzen.

Die Focustiefe des Auges. Unter der Annahme einer gewissen Grenze für das räumliche Unterscheidungsvermögen von Lichteindrücken auf der Netzhaut — welche mindestens bei 0·003 Millim. zu setzen sein dürfte — und der einer gewissen Pupillengrösse, z. B. 4 Millim., berechnet sich die Focustiefe — hier Accommodationslinie genannt — als von ca. 23 Meter bis ∞ oder von 12 bis 23 Meter oder von 370 Millim. bis 380 Millim. etc. reichend.

Das Gesichtsfeld des Auges ist grösser als das irgend eines anderen optischen Instruments. In Folge des Hervorstehens der Hornhaut und ihrer collectiven Brechung können noch Strahlen ins Auge gelangen, die senkrecht zu dessen Axe eintreten. Im lebenden Auge wird ein Theil des Gesichtsfeldes durch Nase, Augenbrauen und Wangen verdeckt, sodass nur etwa 150° frei bleiben; doch beherrschen beide Augen zusammen in jeder Stellung immer noch ein Feld von 180°. Da für das Gesichtsfeld, wie bemerkt, eine besondere Blende im Auge nicht vorhanden ist, so ist dasselbe nicht scharf begrenzt, sondern geht allmählich in Dunkelheit über. Denn je schiefer ein Büschel auf das Auge fällt, desto schmäler ist die Projektion der Pupille auf seinen Querschnitt, welche die Basis des abbildenden Büschels bildet, desto lichtschwächer also die betreffende Stelle des Sehfeldes. Ausserdem aber besitzt die Netzhaut schon in geringer Entfernung von der Grube eine viel geringere Empfindlichkeit gegen Intensität wie Qualität von Lichtreizen, die noch viel bedeutender ist als die objektive Undeutlichkeit der Netzhautbilder. »Das Auge stellt daher«, wie HELMHOLTZ sagt (l. c. pag. 87) »ein optisches Werkzeug von sehr grossem Gesichtsfelde dar, aber nur in einer kleinen, sehr eng begrenzten Stelle dieses Gesichtsfeldes sind die Bilder deutlich. Das ganze Bild entspricht einer Zeichnung, in der zwar der wichtigste Theil des Ganzen sorgfältig ausgeführt, die Umgebungen aber nur skizzirt, und zwar desto roher skizzirt sind, je weiter sie von dem Hauptgegenstande abstehen. Durch die Beweglichkeit des Auges wird es aber möglich, nacheinander jeden einzelnen Punkt des Gesichtsfeldes genau zu betrachten.«

Die dioptrischen Fehler des Auges.

a) Die von der Form und Lage der brechenden Flächen herrührenden Abbildungsfehler. Keine der brechenden Flächen im Auge ist im Allgemeinen eine Kugel- oder auch nur eine Rotationsfläche. Speciell von der Hornhaut, welche der Untersuchung im lebenden Zustande am zugänglichsten ist und einen Hauptantheil der Brechung im Auge hat, zeigen die Messungen[1]), dass sie sich ziemlich nahe einem dreiaxigen Ellipsoid anschmiegt, dessen längste Axe mit der des Auges zusammenfällt, und dessen beide Hauptschnitte meist horizontal und vertikal sind. Diese Form muss von vornherein eine astigmatische Modification der einfallenden Büschel bedingen[2]). Ausserdem trifft aber die Gesichtslinie nicht den Hornhautscheitel, sodass die vom fixirten Punkte ausgehenden Büschel jedenfalls eine unsymmetrische Brechung an ihr erfahren Endlich besitzt auch die Linse keine vollkommenen Rotationsflächen, und diese Flächen sind weder gegeneinander, noch ist die Linse als Ganzes gegen die Hornhaut centrirt[3]).

Die nächste Folge dieser Form- und Centrirungsfehler muss, wie bemerkt, ein Astigmatismus der Büschel auch in der Axe und in der Gesichtlinie des Auges sein[4]).

Derselbe ist daher in fast allen menschlichen Augen, in geringem Grade wenigstens, vorhanden. Seine Grösse misst HELMHOLTZ nach demselben Principe wie die Accommodationsbreite. Astigmatische Augen haben verschiedene Sehweite für Linien verschiedener Richtung im Sehfeld. Ist die grösste dieser Sehweiten P, die kleinste für eine andere (zur ersteren senkrechte) Richtung bei demselben Accommodationszustande p, so gilt ihm

$$As = \frac{1}{p} - \frac{1}{P}$$

als Maass des Astigmatismus. Derselbe kann nach AIRY compensirt werden durch eine vor das Auge gehaltene Cylinderlinse.

Die im Allgemeinen unsymmetrische Gestalt und Anordnung der brechenden Flächen im Auge, sowie auch deren besondere unregelmässige Beschaffenheit bedingen ausser diesem regulären Astigmatismus noch andere Störungen der Bildschärfe, wie die des sogen. Haarstrahlenkranzes, der monocularen Polyopie und Andere, die DONDERS unter der Bezeichnung irregulärer Astigmatismus zusammenfasste und wegen deren hier auf die Darstellung von HELMHOLTZ und die dort citirten Werke verwiesen werden muss. Diese Abweichungen sind so stark, dass ihnen gegenüber eine etwa vorhandene reguläre sphärische Aberration in der Axe bei normaler Pupillenweite jedenfalls nicht in Betracht kommt[5]).

---

[1]) Für das menschliche Auge s. HELMHOLTZ, pag. 10—22 und TSCHERNING l. c. pag. 459. Für die Augen anderer Wirbelthiere L. MATTHIESSEN. Die neueren Fortschritte in unserer Kenntniss v. opt. Bau des Auges der Wirbelthiere. Gratul.-Schrift zu HELMHOLTZ's 70. Gebtg. Hamburg u. Leipz. 1891, pag. 7 ff.

[2]) TSCHERNING findet die Brennweiten der Vorderfläche der Hornhaut in den beiden Hauptmeridianen

	f	f'
Horizontaler Meridian	21·17	29·15
Vertikaler „	20·16	27·76

[3]) Vergl. HELMHOLTZ pag. 108. TSCHERNING l. c. pag. 469.

[4]) HELMHOLTZ l. c. § 14.

[5]) MATTHIESSEN (Grundriss pag. 221) berechnet, dass sowohl die Gestalt der Hornhaut als die Textur der Krystalllinse der Aufhebung bezw. Verminderung der sphärischen Aberration möglichst günstig sei.

Bilder seitlicher Objekte. Wegen des grossen Gesichtsfeldes des Auges ist die Frage nach der Beschaffenheit dieser Bilder von besonderem Interesse. Dieselben sind daher namentlich in neuerer Zeit Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen[1]. Als allgemeines Resultat derselben kann ausgesprochen werden, dass namentlich der Schichtenbau der Krystalllinse einer Verminderung des Astigmatismus schiefer Büschel ganz besonders günstig ist. Dieser Astigmatismus ist zwar im Auge nicht aufgehoben, aber er ist erheblich geringer, als er bei homogener Linse wäre. Es scheint ausserdem, dass die Netzhaut gerade zwischen den Bildflächen sagittaler und meridionaler Strahlen (1. u. 2. Bildfläche) hindurchgeht, sodass sie den Effekt des Astigmatismus und der gleichzeitig vorhandenen starken Bildkrümmung möglichst reducirt.

Chromatische Abweichungen. Das Auge ist nicht achromatisch, und zwar in keinem Sinne: weder die Orte noch die Grössen der verschiedenfarbigen Bilder sind identisch. Man kann sich hiervon auf mehreren Wegen überzeugen, welche wir später zur Prüfung und Messung der Farbencorrection in optischen Instrumenten angeben werden. FRAUNHOFER[2], HELMHOLTZ[3] und A. MATTHIESSEN[4] maassen die Differenz der Sehweiten für Objekte in verschiedenfarbiger monochromatischer Beleuchtung und berechneten aus diesen Versuchen, dass die Focusdifferenz des Auges für rothes und violettes Licht noch grösser sei als diejenige in LISTING's reducirtem Auge, wenn man dessen Medium die Dispersion des Wassers zuertheilt. (0·58 bis 0·62 Millim. gegen 0·43 bei diesem).

In der That wies schon DOLLOND[5] darauf hin, dass im Auge eine Compensation der Farbenabweichungen nicht statthaben könne, da alle Brechungen nach der Axe des Systems hin geschähen, wobei jedesmal die Ablenkung der violetten Strahlen stärker sei als die der rothen, was für die damals bekannten bezw. untersuchten Medien zutreffend ist. Die Thatsache der Farbenzerstreuung im Auge war schon NEWTON[6] bekannt.

Einer solchen Längsabweichung im Auge entspricht bei einem Pupillendurchmesser von 4 Millim. ein Zerstreuungskreis von linear ca. 0·04 Millim., angular 8·8'. Einen ebenso grossen Zerstreuungskreis würde ein auf unendlich accommodirtes Auge von einem in 1·5 Meter befindlichen monochromatisch leuchtenden Punkte — in Folge von Focusdifferenz — erhalten. Dass man ersteren gewöhnlich nicht wahrnimmt, während der letztere sehr wohl merklich ist, rührt hauptsächlich daher, dass das Auge für die verschiedenen Wellenlängen sehr ungleich empfindlich ist, und zwar ist es dies desto weniger, je mehr sich die

---

[1] L. HERMANN. Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbüscheln und eine darauf bezügliche Eigenschaft der Krystallinse. Zürich 1874. POGG. Ann. 153, pag. 470. 1874, u. PFLÜGER's Arch. f. d. ges. Physiol. 18, pag. 443, 1878. STAMMESHAUS. Ueber die Lage der Netzhautschale zur Brennfläche des dioptr. Systems d. menschl. Auges. Arch. f. Ophthalm. 20, pag. 147. 1874. SCHÖN. Brechg. seitl. einfall. Strahlen in d. Linse. Sitzber. Heidelb. ophtalm. Ges. in Klin. Monatsber. f. Augenheilk. 1877, pag. 178. Arch. f. Anat. u. Physiol. pag. 146. 1877. A. FICK, Zur Periskopie des Auges PFLÜGER's Arch. f. d. ges. Physiol. 19, pag. 145. 1879. W. RASMUS u. A. WAUER. Math. Theorie der Periskopie d. menschl. Auges. Arch. f. d. ges. Physiol. 20, pag. 264. L. MATTHIESSEN, Geometr. Gestalt d. theoret. Retina des periskop. schem. Auges. v. GRÄFE's Arch. f. Ophth. 25, pag. 257. 1879.

[2] Denkschr. Münch. Akad. für 1814/15, pag. 216.

[3] Physiol. Optik § 13.

[4] Compt. rend. 24, pag. 874. 1847. Vergl. L. MATTHIESSEN, Grundriss, pag. 234.

[5] Phil. Trans. 79, pag. 256. 1789.

[6] Optice Lib. I. pars II, prop. VIII.

Wellenlänge nach beiden Seiten des Spectrums hin von einem gewissen Maximum nach den Messungen von A. König ($\lambda = 0{\cdot}53\ \mu$) entfernt. In Folge dessen werden die den rothen und violetten Wellenlängen entsprechenden grösseren Zerstreuungskreise nicht wahrgenommen gegenüber den sehr viel intensiveren, aber kleineren gelben und grünen, die schliesslich allein maassgebend werden.

Am auffallendsten werden diese Erscheinungen, auch in weisser Beleuchtung, bei halbverdeckter Pupille [1]). Für die Chromasie der Brennweiten (Differenz der Vergrösserungen für verschiedene Farben) gaben Versuche an v. Bezold [2]), O. Tumlirz [3]) u. a.

II. Die künstlichen Projectionssysteme, insbesondere die zur Photographie dienenden.

Es kann zwar auch jedes der zur subjektiven Beobachtung dienenden, unten näher besprochenen Instrumente (Lupe, Fernrohr, Mikroskop) durch eine geringe relative Lagenänderung seiner Theile in ein Projektionssystem umgestaltet werden — gerade die letzten Jahre haben durch die Verbreitung und den Ausbau der »Mikrophotographie« und ganz neuerdings auch der »Telephotographie« die Unterschiede zwischen beiden Gattungen von Systemen mehr und mehr verwischt — trotzdem bleibt aber eine gesonderte Betrachtung wenigstens für diejenigen Instrumente stets erforderlich, die nicht umgekehrt durch eine geringe Modifikation ihrer Zusammensetzung in solche zur Unterstützung des Sehens (Auges) verwandelt werden können. Es sind dies vornehmlich die zur Landschafts-, Architektur- und Porträtphotographie benützten Objektive sowie die mit ihnen auf genau derselben Stufe stehenden »Projektionsköpfe«, welche man bei Demonstrationen in Hörsälen benützt (letzere natürlich nur insoweit sie nicht ihrem Bau und der resultirenden Vergrösserung nach vollständige Mikroskope vorstellen). Ferner gehören zu den Projektionssystemen die Objektive der Mikroskope und Fernrohre, wenn sie reelle Bilder zu Stande kommen lassen und sie sind als solche in der That besonders zu betrachten, wenn z. B. in ihren Bildebenen Messungen vorgenommen werden.

Die Projektionssysteme gehören in den allgemeinen Grundzügen ihrer Construction zu den einfachsten und ebenso auch in den wesentlichen Momenten ihrer Wirkungsweise zu den am leichtesten zu übersehenden optischen Instrumenten. Der allgemeine Typus aller bis in die neueste Zeit benützten photographischen Systeme war der der einfachen Sammellinse. Nur der Aufhebung der verschiedenen Aberrationen wegen wurde die Form allmählich complicirter gewählt. In den Einzelheiten ihrer Construction aber stellen sie in Folge der Verschiedenheit der an ihre Leistung gestellten Anforderungen und des verschiedenen Gewichts, das auf diese je nach den Erfordernissen des Gebrauchs gelegt wird, vielleicht die variabelste und darum in speciell dioptrischer Hinsicht auch interessanteste Instrumentengattung vor. Die Vervollkommnung, welche ihre Construction, d. h. Leistungsfähigkeit, namentlich im letzten Jahrzehnt durch die Bemühungen einiger Optiker erfahren hat, ist zugleich wohl Grundlage und Folge der mannigfachen Fortschritte gewesen, welche die Kunst ihrer Anwendung, die Photographie, auf mehreren Gebieten der Kunst und der Wissenschaft in dieser Zeit zu verzeichnen hat. —

[1]) Mollweide, Gilb. Ann. 17, pag. 328. 1804; 30, pag. 220. 1808.
[2]) Gräfe's Arch. f. Ophthalm. 14 (2), pag. 1.
[3]) Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. 40, pag. 394. 1887.

Damit ein dioptrisches System zur Projection geeignet sei, d. h. damit es von reellen Objekten reelle, auffangbare Bilder entwerfe, muss dessen (im Sinne des Lichteinfalls) vordere Brennebene vor, die hintere hinter den Linsen liegen. Andernfalls wäre zum mindesten das Gebiet des abbildbaren Raumes beschränkt[1]). Da bei einer einfachen dünnen Linse diese Bedingung stets erfüllt ist, wenn dieselbe collektiv ist, einfache Linsen aber historisch überall der Ausgangspunkt für die Construction der zusammengesetzten Systeme gewesen sind — und auch bei letzteren die hier nothwendige Lage der Brennebenen besondere Schwierigkeiten verursachen würde, wenn sie dispansiv sein sollten —, so hat man sich (mit Ausnahme des zur Projection benützten Mikroskops) stets collektiver Systeme für die Projection bedient.

Diese bilden, wie wir früher allgemein bewiesen haben (pag. 36) die linke Hälfte des Objektraums umgekehrt in die rechte des Bildraums ab. Bei Photographien, welche nach der Aufnahme aus der Camera entfernt und wieder umgedreht werden können, verursacht dieser Umstand keinerlei Unbequemlichkeit, wohl aber bei Projectionen auf Schirme in Hörsälen, für welche die Construction eines bildaufrichtenden (negativen) Projektionssystems einem offenbaren Bedürfniss nachkommen würde.

Die dioptrische Wirkung von Projektionssystemen ist im wesentlichen charakterisirt durch die Vergrösserung, mit welcher sie das Objekt bei scharfer Einstellung des Schirms in diesem wiedergeben, und zwar kommt hier unmittelbar die lineare laterale Vergrösserung, β, in Betracht, d. i. das Verhältniss der linearen Dimensionen von Bild und Objekt (y'/y). Diese Vergrösserung ist nach den Fundamentalgleichungen (I) pag. 41

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}.$$

Im Allgemeinen wird also bei gegebenem Objektabstand die Vergrösserung mit der Brennweite zugleich wachsen. Nur bei unendlich entfertem Objekt ist das lineare Vergrösserungsverhältniss durch das der linearen Bilddimensionen zur angularen Objektdimension zu ersetzen gemäss pag. 163 (unten).

Der Zusammenhang zwischen der Lage von Objekt und Bild gegen das System ist dabei durch die Fundamentalformel

$$xx' = -f^2$$

oder

$$\frac{1}{\xi'} - \frac{1}{\xi} = \frac{1}{f}$$

bestimmt.

Der Fall, dass vordere und hintere Brennweite (Objekt- und Bildmedium) verschieden sind, ist bisher meines Wissens nicht realisirt worden und bietet auch anscheinend keine besonderen Vortheile. Wir wollen daher im folgenden beide Medien stets als gleich annehmen.

Die Ansprüche, welche man an die quantitativen und qualitativen Eigenschaften der von photographischen Systemen gelieferten Bilder stellt variiren wie oben bemerkt innerhalb weiter Grenzen, je nach dem Gebrauche, welchem die Systeme dienen sollen und je nach den mit diesem Gebrauch verknüpften anderweitigen Umständen, technischen Hilfsmitteln, ästhetischen Fak-

[1]) Wenn z. B. ein System so beschaffen ist, dass seine Vorderfläche conjugirt ist der Hinterfläche — was involvirt, dass die Brennebenen beide innerhalb des Systems liegen — so giebt dasselbe von keinem ausserhalb gelegenen Objekte ein auffangbares Bild.

toren etc. Da, wie wir früher bewiesen haben, ein dioptrisches System nicht gleichzeitig sehr weitgehenden heterogenen Ansprüchen genügen (z. B. ein grosses Gesichtsfeld mit Strahlen von grossem Oeffnungswinkel abbilden) kann, so ist man immer darauf angewiesen, bei derartig verschiedenen Ansprüchen einen passenden Mittelweg zu wählen. Man wird es unter diesen Umständen als eine anerkennenswerthe Leistung der praktischen Optik bezeichnen müssen, dass sie Systeme hervorgebracht hat, — welche, wenn auch nicht gleichzeitig, so doch in demselben Exemplare — der einen und der andern Anforderung genügen, welche also ein kleineres Sehfeld mit relativ grosser Apertur und dann, auf geringere Apertur abgeblendet, mit engeren Büscheln ein entsprechend grösseres Bildfeld genügend scharf zeichnen.

Ansprüche an die quantitativen Eigenschaften der Bilder.

Durch die Apertur der abbildenden Büschel ist, wie wir früher gesehen haben, in erster Linie die Lichtstärke eines Systems bedingt. Man wird auf dieselbe daher besonderen Werth legen in denjenigen Fällen, in welchen lebendige, überhaupt bewegliche bezw. bewegte Gegenstände photographirt werden sollen, damit die chemische Wirkung des Lichtes auf die empfindliche Platte in so kurzer Zeit erfolge, dass eine merkliche Lagenänderung des Objektes während der Aufnahme nicht stattfinden könne. Für die Zwecke der sogenannten Porträtphotographie sind Systeme construirt worden, bei denen das Oeffnungsverhältniss, d. h. das Verhältniss des Durchmessers der Eintrittspupille zur Brennweite bis zu ein Drittel beträgt.

Die Anforderung möglichster Lichstärke hat es ferner mit sich gebracht, dass man sich bei der Construction von photographischen Systemen für dieses ebenso wie für die anderen Anwendungsgebiete auf deren Zusammensetzung aus 2, höchstens 3 durch Luft isolirte Elemente beschränkt hat (welche aber ihrerseits wieder je aus 2—3 durch Balsam miteinander verkitteten Linsen bestehen können); denn — um diesen Punkt gleich hier zu erwähnen — es geht nicht nur durch die (primäre) Reflexion des Lichtes nach der Objektseite hin, durch eine ungerade Anzahl von Reflexionen und eine gerade Zahl von Brechungen, solches Licht für das Hauptbild verloren (und zwar in einem Betrage, welcher bekanntlich mit der Indexdifferenz an den wirksamen Trennungsflächen wächst) sondern es lagern sich auch über jenes von einem dioptrischen System entworfenes Haupt-Bild noch die — im besten Falle unscharfen, d. h. von ihm weit abliegenden — katadioptrischen Nebenbilder, welche durch eine gerade Anzahl von Brechungen und Reflexionen nach dieser Bildseite hin entworfen werden. Diese ganz unvermeidlichen und, wie bemerkt, durch den Construkteur höchstens von dem Hauptbilde recht weit zu entfernenden Nebenbilder bewirken eine allgemeine Erhellung des Bildes und mindern hierdurch natürlich die in demselben vorhandenen Contraste[1]).

Die grossen Fortschritte, welche in den letzten Jahrzehnten in der Herstellung von photographischen Platten hoher Lichtempfindlichkeit gemacht worden sind ermöglichen in andern Gebieten, als den oben bezeichneten — und auch in diesen bei günstigen Beleuchtungsverhältnissen — die Anwendung von Systemen

[1]) Wenn solche katadioptrische Bilder nicht weit genug vom Hauptbilde entfernt sind, um dasselbe in seiner ganzen Ausdehnung nahezu gleichmässig zu überdecken, sondern sich in diesem an mehr oder minder scharf umschriebenen Stellen bemerklich machen, bezeichnet man sie nach der üblichen Terminologie als »Lichtflecke« bezw. »Blendenflecke«.

mit erheblich niedrigerem Oeffnungsverhältniss, welche dann ein entsprechend grösseres Bildfeld scharf wiedergeben. Während man daher für Porträt- und sonstige Momentaufnahmen ein Oeffnungsverhältniss von $\frac{1}{3}$—$\frac{1}{7}$ wünscht, begnügt man sich zur Wiedergabe von Landschaften und Gruppen mit Systemen welche bei Oeffnungsverhältnissen von ca. $\frac{1}{7}$—$\frac{1}{18}$ scharfe Bilder geben, während man für die Reproduction von Architekturwerken, Zeichnungen, Landkarten, Bildern etc. die Systeme mit Oeffnungswinkeln bis zu $\frac{1}{70}$ herunter benützt. (»Weitwinkel«.)

Umgekehrt porportional den Ansprüchen an die Lichtstärke, d. h. an das Oeffnungsverhältniss, gehen diejenigen an das Sehfeld. Es muss nun als ein glücklicher Umstand bezeichnet werden, dass diese verschiedenartige Verknüpfung der Ansprüche durch die Natur der aufzunehmenden, in ihren Hauptgattungen eben bezeichneten, Objekte, von selbst dargeboten oder wenigstens zugelassen wird. Dies gilt sogar für diejenige Combination jener beiden Hauptansprüche, welche in der Forderung besteht, dass für das ganze Sehfeld die gleiche — oder doch eine möglichst wenig vaiirende — Apertur wirksam sei. Denn aus ästhetischen Gründen ist bei Porträts eine beträchtliche Abnahme der Apertur, d. h. der Lichtstärke nach dem Rande des Bildes zu durchaus nicht schädlich, wird vielmehr durch anderweitige Manipulationen des Photographen gewöhnlich noch verstärkt (Vignettiren), während man natürlich bei der Wiedergabe eines Gebäudes, einer Landkarte, eines Kupferstichs möglichst gleichmässige Helligkeit bis an den äusseren Rand des Bildes wünscht.

Vollständig ist dieser letzteren Anforderung natürlich nicht zu genügen; denn die Blende, durch welche ihrer Grösse und Stellung zum Linsensystem nach die Apertur der Büschel bestimmt wird und ihre Bilder nach der Objekt-, wie Bildseite hin (*E.-P.—A-.P.*) wirken dem von dem Axenpunkt und den ihm benachbarten ausgehenden Strahlenkegeln gegenüber bei centraler Lage stets mit ihrer wahren Grösse als Basis; von den seitlichen Punkten des Objektes und Bildes aber erscheinen Eintritts- wie Austrittspupille in der einen Richtung perspectivisch verkürzt. Ihre Fläche, welche als Basis auch für diese Büschel wirksam ist, erscheint daher unter einem räumlichen Winkel, welcher im Verhältniss von $\cos w : 1$ bezw. $\cos w' : 1$ geringer ist als der der axialen Büschel. Der Einfluss dieses Umstandes würde sich nur dadurch beseitigen lassen, dass man die *E.-P.* in das Unendliche verlegte, d. h. die Blende in den gemeinsamen Brennpunkt des Vorder- und Hintertheils des Systems stellte, welch letzteres dann ein teleskopisches wäre[1]. Einer solchen Anordnung, welche an sich durchaus nicht unmöglich wäre, steht jedoch das Bedenken entgegen, dass dann die Grösse des Sehfeldes selbt gering, bezw. die zur Erzielung eines grösseren Sehfeldes erforderlichen Linsendimensionen sehr beträchtlich wären. Denn in den photographischen Systemen wird allgemein die Begrenzung des Sehfeldes durch die Fassungsränder der das System constituirenden Linsen oder

[1]) Ein geistreicher Vorschlag, um diesen Mangel auf einem ganz anderen Wege zu heben, rührt von A. MIETHE her; Er stellt vor das Objektiv eine Linse, welche (verkittet) zusammengesetzt ist aus einer Planconvex- und einer Planconcavlinse von gleicher Innenkrümmung und gleichem Brechungsindex, welche also in dioptrischer Beziehung wie eine einfache Planparallelplatte wirkt. Die Sammellinse jedoch besteht aus absorbirendem (gefärbtem) z. B. Rauch-Glas, und ihre Krümmung ist so bemessen, dass sie die ihren centralen (dicken) Theil passirenden Büschel im Verhältniss von $1 : \cos^2 w$ — oder einem anderen Verhältniss — stärker schwächt als die unter dem Winkel w geneigt einfallenden. (Das Verhältniss $1 : \cos^2 w$ statt $1 : \cos w$ ist gewählt, um zugleich auch der geringeren photochemischen Wirkung auf die Platte Rechnung zu tragen, welche ein auf dieselbe schief einfallendes Büschel ausübt).

doch einer von ihnen bewirkt. Das objektseitige Sehfeld ist dann also nach unserer früheren Definition gleich dem Sehwinkel, unter welchem der Fassungsrand jener Linsen, bezw. sein nach der Objektseite hin entworfenes Bild von der *E.-P.* aus erscheint, und entsprechend das bildseitige Sehfeld. Bei telecentrischer Einrichtung des Systems würden daher beide Sehfelder, angular gemessen = 0, in ihrem linearen Maasse aber den Dimensionen des Linsensystems gerade gleich.

Um ein grösseres Sehfeld unter Anwendung von möglischst kleinen Linsen zu erzielen, ist vielmehr umgekehrt nothwendig, dass die wirksame Blende möglichst nahe an der betreffenden Linse (Gesichtsfeldblende) liege; in Systemen also, welche aus zwei Linsen bestehen, dass diese möglichst nahe aneinander gerückt seien, und die Blende sich zwischen ihnen befinde. Bei solcher Anordnung tritt auch erst bei relativ grossem Bildwinkel der erwähnte Missstand einer Verringerung der Apertur für die seitlichen Bildpunkte infolge theilweiser Abblendung der Büschel durch den Fassungsrand der Linsen ein.

Bezüglich des Einflusses der Strahlenbegrenzung nach Lage und Grösse der Blenden und ihrer Bilder, der Pupillen, auf die übrigen Eigenschaften des Systems — insbesondere Perspective und Focustiefe der auf der Bildtafel entworfenen Zeichnungen — haben wir unseren früheren Ausführungen pag. 158 u. 169 hier nichts besonderes hinzuzufügen; wir verweisen daher auf diese.

Ansprüche an die qualitativen Eigenschaften der Bilder.

In Bezug auf diese begünstigen die der Photographie vornehmlich sich darbietenden Objekte einen gleichen Compromiss wie in Bezug auf die quantitativen Eigenschaften. Hierdurch ist es ermöglicht worden, mit Systemen aus 2, höchstens 3, getrennten Elementen auch den diesbezüglichen Anforderungen der Praxis hinreichend zu genügen. Bei den Systemen grösserer Apertur (den Porträtobjektiven) sind die Anforderungen, wie an die Ausdehnung des Sehfeldes, ebenso auch an die Schärfe der Bilder innerhalb derselben relativ geringe. Während die von Mikroskop- und Fernrohrobjektiven entworfenen Bilder nachheriger Betrachtung durch ein lupenartig wirkendes, jene Bilder sammt ihren Fehlern mehrfach vergrösserndes Ocular unterliegen, ist dies bei photographischen Systemen im Allgemeinen nicht der Fall. Das Bild braucht daher im Allgemeinen höchstens diejenige Schärfe zu haben, welche bei unmittelbarer Betrachtung mit blossem Auge genügt. Speciell bei den Porträtobjektiven wird manchmal aus ästhetischen Gründen sogar umgekehrt eine gewisse gleichmässige Unschärfe (Weichheit) vorgezogen. Infolgedessen braucht die Compensation der für einen Axenpunkt in Betracht kommenden verschiedenen Bildfehler — als axiale sphärische Aberration und deren Reste (Zonen), axiale chromatische Abweichung und die combinirte Wirkung dieser beiden: die chromatische Differenz der sphärischen Abweichung — in diesen Systemen keine sehr vollkommene zu sein. Bei den andern Systemen, welche von vornherein mit geringerer Oeffnung benutzt werden, ist es wiederum entsprechend leichter, innerhalb derselben eine genügende Compensation zu bewirken.

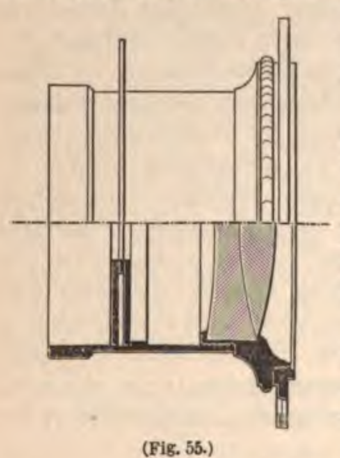
Ebenso sind die Anforderungen an die Eigenschaften der Bilder ausser der Axe desto grösser, mit je kleinerer Oeffnung die Systeme benützt werden, also grösser in den zu (Strich-) Reproductionen dienenden Systemen, als in den zur Aufnahme von Landschaften und Gruppen dienenden und in diesen wieder grösser als in den Porträt-Objektiven. Dies gilt sowohl von der Ebenheit der Bilder (Aufhebung der Bildwölbung) — welche hier wegen der Ebenheit der das

Bild aufnehmenden Platten eine ganz unerlässliche Forderung bildet — als von der Distortion (Verzerrung), als ferner von der Aufhebung des Astigmatismus der schiefen Büschel und der des Coma in ihnen. Von den chromatischen Abweichungen muss namentlich die Differenz der Vergrösserungen für verschiedene Farben gehoben sein, damit nicht jeder Punkt am Rande des Sehfeldes nach diesem hin in ein Spectrum ausgezogen erscheine.

Dass die Aufhebung dieser Fehler nur in denjenigen Büscheln stattzufinden hat, welche kraft der gegebenen Strahlenbegrenzung allein im Stande sind, zur Bildebene zu gelangen — in Büscheln also, deren Axen die Linsen des Systems je nach der Lage von *E.-P.* und *A.-P.* an verschiedenen Stellen treffen, wenn sie zu verschiedenen Bild- und Objektpunkten gehören — brauchte kaum besonders hervorgehoben zu werden, wenn dieser Sachverhalt nicht noch immer öfters verkannt würde.

Die hauptsächlichsten Constructions-Typen.

1) Einfache Linsen. Den Ausgangspunkt für die Construction der Projectionssysteme, wie für die der meisten andern optischen Instrumente, bildete die einfache dünne Linse. Man suchte bei derselben die Krümmungen auf ihre beiden Flächen möglichst so zu vertheilen und der Blende eine solche Lage zu geben, dass die wichtigsten Bildfehler einigermaassen compensirt würden. Natürlich verhinderte schon die mittelst einer solchen Linse nicht compensirbare sphärische und chromatische Aberration in der Achse die Anwendung von anderen, als sehr kleinen Aperturen (mindestens $\frac{1}{20}$ der Brennweite). Andererseits ist der Vortheil, dass nur 2 reflektirende Flächen in solchen Systemen vorkommen, für die »Brillianz« des Bildes ein so erheblicher und in kleinen Dimensionen die sphärischen und chromatischen Abweichungen so wenig auffallend, dass man sich gerade in neuerer Zeit der Anwendung solcher Linsen wieder mehr zugewandt hat. Die Form derselben pflegt dann die eines Meniskus zu sein, dessen convexe Fläche dem Bilde, die concave dem Objekte zugewandt ist. Die Blende wird ebenfalls nach der Objektseite hin angebracht. Ihre Lage beeinflusst, wie wir früher gesehen haben, die Eigenschaften der Bilder ausser der Axe, insbesondere die Orthoskopie.



(Fig. 55.)

Dies war die Construction der Objektive, welche zur Zeit der Entdeckung der Daguerreotypie i. J. 1839 benützt worden. »Mit einem Diaphragma $= f/30$ erschien ein Bild auf einer viereckigen Fläche scharf gezeichnet, deren Diagonale $= f/4$ war, wobei die Entfernung des Diaphragmas von der Linse $= f/5$ betrug« (Monchhoven).

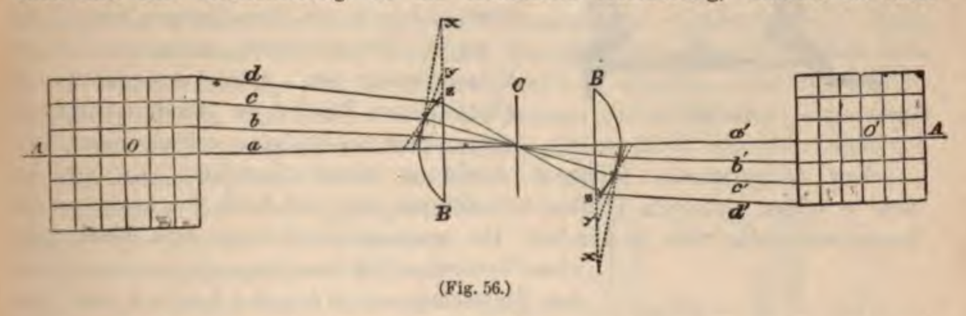
Eine erhebliche Verbesserung im Rahmen dieses Typus brachte die Zusammensetzung der Linse aus zwei mit ihren Innenflächen verkitteten Einzellinsen, welche Combination nach den früheren Ausführungen bereits die Herstellung der Achromasie und die Aufhebung der sphärischen Aberration in der Axe gestattet. Diese, zuerst von Chevalier in Paris construirten und in mannigfachen Formen von den meisten Optikern noch jetzt gelieferten Systeme haben ebenfalls den Vorzug der grossen Brillianz, da auch hier nur zwei Reflexionen von Luft gegen Glas oder umgekehrt vorkommen. Fig. 55 stellt ein solches modernes System (von Voigtländer, $f = 14{\cdot}4$ Centim.) dar, welches aus den oben angegebenen

Gründen natürlich nur zur Landschafts-Photographie[1]) benützt werden kann. Seine grösste Oeffnung ist $f/15$, der Gesichtsfeldwinkel etwa 90°. Andere solche aus 2 und 3 Einzellinsen zusammengesetzte Systeme findet man in den unten angeführten Werken beschrieben und abgebildet.

In diesen einfachen Systemen verfügt man über zu wenig Elemente, um allen hier zu stellenden Bedingungen genügen zu können. Insbesondere lassen dieselben nur in geringem Maasse die Aufhebung der Bildkrümmung, der Distortion und des Astigmatismus zu. Einen wesentlichen Fortschritt ihnen gegenüber bildete daher die Construction der

2) Symmetrischen Doublets, d. h. von Systemen, die aus zwei gleichen Einzelelementen in symmetrischer Lage zu einander und zur Blende (zwischen denselben) zusammengesetzt sind. Die Erfindung der wichtigsten Gruppe derselben geschah i. J. 1866 durch A. Steinheil.
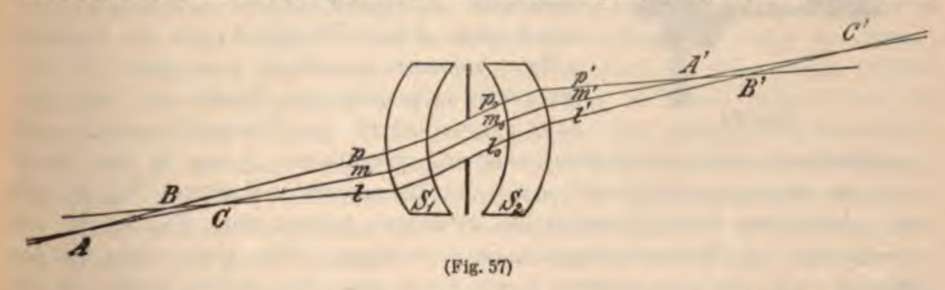
Die eben bezeichnete Art der Zusammensetzung bietet nicht nur einen Vortheil und eine Erleichterung für die technische Ausführung, sondern sie führt



(Fig. 56.)

auch — und das war der Grund ihrer Einführung — ohne weiteres die Aufhebung zweier der wichtigsten Bildfehler, der Verzerrung und des Coma, herbei. Denn was die erstere betrifft, so ist klar, dass (Fig. 56), nach welchem Gesetz auch die Winkel der von den einzelnen Objekten ausgehenden Hauptstrahlen a, b, c, d durch das Vordertheil B des Systems nach dem Mittelpunkt der Blende C hin gebrochen werden mögen, sie das Hintertheil B' des Systems unter denselben Winkeln in derselben Weise treffen und nach dem Bilde O' von O hin als Strahlen a', b', c', d', ausfahren, welche den eintretenden Hauptstrahlen jeweilig parallel sind; damit ist jede Verzerrung natürlich ausgeschlossen.

Was andererseits das Coma betrifft, so ist schon aus Gleichung 8, pag. 118 zu ersehen, dass dasselbe bei symmetrischer Anordnung der Linsen und des Strahlen-

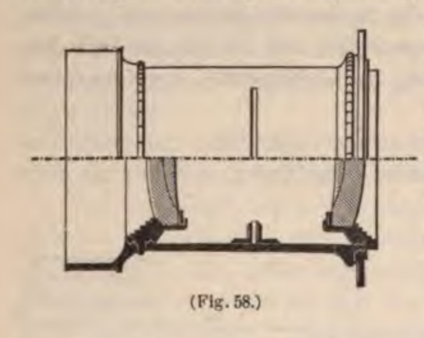


(Fig. 57)

verlaufs in ihnen aufgehoben sein muss. Direkter kann man dies folgendermaassen erkennen (Fig. 57), S_1, S_2 seien die beiden Bestandtheile des Systems;

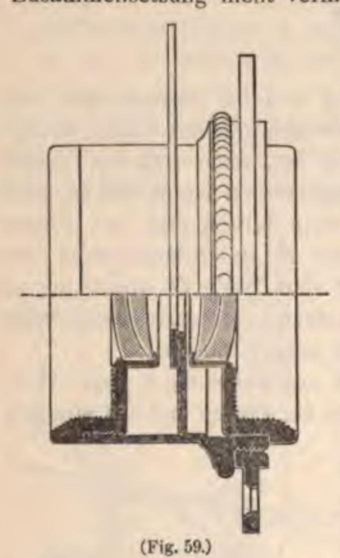
[1]) Neuerdings auch zu Porträts in grossem Format (nahezu natürlicher Grösse).

symmetrisch zwischen ihnen befinde sich die Aperturblende. Denken wir uns nun zunächt ein Strahlenbündel, welches in dem Raum zwischen den Linsen parallel und aberrationsfrei ist, nach beiden Seiten hin verfolgt, so wird es nach der Brechung durch jedes der Partialsysteme S, S' eine gleiche, aber symmetrich gelegene Brenncurve $(ABC)(A'B'C')$ — das Coma der Partialsysteme — bilden. Denke ich mir nun, um zu dem Falle eines monocentrisch einfallenden Büschels überzugehen, in dem, als unendlich eng anzusehenden, Partialbüschel (mp) den Objektpunkt A auf dem Strahl p bis B verschoben, so verschiebt sich der ihm in Bezug auf das ganze System $(S_1 + S_2)$ conjugirte Bildpunkt A' auf p' im gleichen Sinne um die gleiche Strecke, also bis B'. Denn da in O und O' Gleichheit von Objekt und Bild ($\beta = -1$) vorhanden ist, so ist auch die axiale Vergrösserung, $\alpha_1 = 1$. Ebenso entspricht in dem Partialbüschel (lm) der Verschiebung des Punkts C auf dem Strahl l bis B die Verschiebung von C' auf l' bis B'. Folglich muss, wenigstens bei der Vergrösserung eins, einem monocentrischen objektseitigen Büschel im Meridianschnitt ein ebensolches im Bildraum entsprechen.



(Fig. 58.)

Der Astigmatismus hingegen bleibt in diesen Systemen abhängig von dem in seinen einzelnen Theilen vorhandenen und wird durch die symmetrische Zusammensetzung nicht vermindert. Die symmetrische Construction bietet daher einen Vortheil selbst dann, wenn die sie constituirenden Einzelelemente einfache Linsen sind, wie solche ebenfalls von A. STEINHEIL schon i. J. 1865 unter dem Namen »Periskop« vorgeschlagen worden sind. In letzterer Form ist natürlich wiederum nur die Anwendung sehr kleiner Blenden möglich; doch finden solche Linsen aus denselben Gründen wie die einfachen Einzellinsen und wegen ihrer grossen Billigkeit ebenfalls jetzt wieder vermehrte Anwendung.



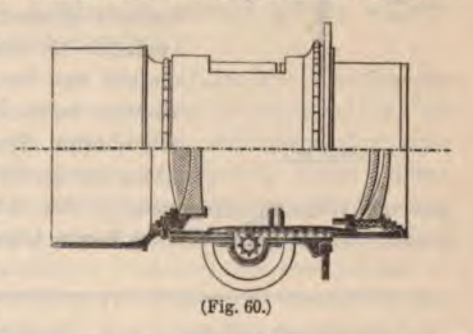
(Fig. 59.)

In weit höherem Maasse lässt sich den verschiedenen, hier zu stellenden Bedingungen genügen, wenn man jedes der beiden Elemente aus einem verkitteten achromatischen Linsenpaar bestehen lässt. Dieser Objektiv-Typus, von STEINHEIL selbst »Aplanat« bezeichnet, von andern Optikern unter den verschiedensten Namen und mit mehr oder minder erheblichen Constructionsänderungen im Einzelnen, unter Beibehaltung aber des wesentlichen Typus, in den Handel gebracht, ist gegenwärtig wohl noch der am meisten verbreitete. Fig. 58 stellt ein solches zur Portraitphotographie dienendes Aplanat dar, Fig. 59 ein entsprechendes für Weitwinkel-Aufnahmen bestimmtes. Man sieht schon aus den Figuren, wie der Construkteur durch Annäherung der beiden Linsen an einander der Forderung eines grösseren und gleichmässig beleuchteten Sehfeldes für den letzteren Zweck (gemäss pag. 199) entgegenkommt.

Auch hier müssen wir wegen der von andern Construkteuren vorgeschlagenen ähnlichen Typen auf die Handbücher der photographischen Optik verweisen. Wir

erwähnen nur noch die unter denselben Haupt-Typus fallenden von HARRISON und SCHNITZER in Newyork i. J. 1860 erfundenen sogenannten »Kugel-Objektive«, welche ebenfalls unter mancherlei Namen und Formen als Weitwinkel-Systeme in den Handel gebracht werden. Bei diesen ist die ursprüngliche Tendenz wohl die gewesen: alle Brechungen unter möglichst senkrechter Incidenz erfolgen zu lassen. Darum bilden die Innenflächen der beiden aus je einem verkitteten Linsenpaar bestehenden Elemente des Systems bei HARRISON Theile einer aus dem Blendenmittelpunkt geschlagenen Kugel. Diese Systeme lassen nur sehr kleine Oeffnungswinkel zu.

3) Unsymmetrische Doublets. Die symmetrische Gleichheit der beiden, ein System zusammensetzenden Bestandtheile bringt neben den oben genannten Vortheilen in dioptrischer Beziehung den Nachtheil mit sich, dass durch dieselbe über die disponibeln Elemente (Radien, Dicken, Glasarten) bereits im Voraus ziemlich weitgehend verfügt ist. Von vornherein muss es als wahrscheinlicher erscheinen, dass durch eine völlig freie Verfügung über die Form und Zusamm en setzung der Bestandtheile des Systems weitergehenden Bedingungen in Bezug auf die Vollkommenheit der Abbildung genügt werden könne. Durch eine solche verschiedenartige Zusammensetzung wird es möglich, Abweichungen gewisser Art, die in dem einen Gliede des Systems vorhanden sind — und unter Umständen in ihm sogar absichtlich auf eine gewisse Höhe gebracht werden — in dem darauf folgenden Theile desto vollständiger durch entgegengesetzt gleiche Abweichungen zu compensiren.


(Fig. 60.)

Dies war denn auch der Weg, welchen bereits im Jahre 1840 J. PETZVAL, in der Methode und den Resultaten seinen Nachfolgern bis in die neueste Zeit weit vorauseilend, einschlug, um ein lichtstarkes Porträtobjektiv herzustellen[1]). In der zuerst von VOIGTLÄNDER ausgeführten Form hatten diese Objektive ungefähr die Einrichtung Fig. 60 und liessen sich mit einer Oeffnung bis zu $f/3$ benützen. Die gute Wirkung dieses Objektivs hat wesentlich zur Verbreitung der photographischen Kunst beigetragen, welcher damals noch nicht die hochempfind lichen Trockenplatten der neueren Zeit zur Verfügung standen. Die PETZVAL'schen Porträtobjektive werden auch heute noch von vielen Fabrikanten in mehr oder minder modificirter Gestalt ausgeführt. Gleichzeitig mit PETZVAL war die gleiche Aufgabe von CHEVALIER in Paris in Angriff genommen und durch ein System aus zwei verkitteten Linsenpaaren gelöst worden, doch hat sich dieses System ebenso wie andere Modificationen des PETZVAL'schen, bei denen beide Theile ver kittet waren, nicht bewährt. Das Gleiche gilt von den unsymmetrischen Landschafts-Linsen, welche PETZVAL 1840 und nach ihm VOIGTLÄNDER, HARRISON-SCHNITZER, ROSS und Andere vorschlugen bezw. in den Handel brachten.

Einen besseren Erfolg hatte die Wiederaufnahme des oben bezeichneten Constructionsprincips durch STEINHEIL in seinen »Antiplaneten« (sogen. wegen der sichtlichen Anhäufung von entgegengesetzten Aberrationen in den einzelnen Gliedern des Systems zum Zwecke ihrer vollständigeren Compensation[2]). Von grösserem

[1]) PETZVAL, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen. Pesth 1843. Derselbe, Sitzber. Wiener Acad. 26, pag. 33; 24, pag. 50. 1857.

[2]) Näheres s. Patentschrift D. R. P. No. 16354 1881.

Belang dürfte der Fortschritt sein, welchen auf dem gleichen Wege, aber unter vollständigerer Benützung der den Optikern zur Verfügung stehenden Glasarten und auf Grund einer genaueren Discussion der Wirkungsweise von Linsen und Linsenpaaren in Bezug auf gewisse Bildfehler P. RUDOLPH unter Mitwirkung des optischen Instituts von CARL ZEISS in Jena in deren »Anastigmaten« erreicht hat[1]). In diesen Systemen ist 1. durch eine Zusammensetzung aus zwei getrennten Systemen, in deren einem der positive Bestandtheil (Sammellinse) kleineren, in dem anderen dagegen grösseren Brechungsindex besitzt als der mit ihm verbundene (verkittete) negative Bestandtheil (Zerstreuungslinse) und dass 2) beide Systeme jedes für sich annähernd achromatisirt sind, zum ersten Mal eine systematische und nahezu vollständige Aufhebung des Astigmatismus und der Bildwölbung oder, was dasselbe ist, der Bildwölbung gleichzeitig für die in beiden Hauptschnitten gelegenen Strahlenbüschel erreicht worden. Fig. 61 zeigt ein solches zwischen Porträt- und Landschaftslinse stehendes System (Anastigmat 1:7·2). Ueber die Bedingungen einer solchen Compensation und die Grösse der bei anderen Systemen in Bezug auf diese Fehler verbliebenen Reste giebt die zweite der in der Fussnote genannten Schriften und ein Beitrag desselben Verfassers für dasselbe Jahrbuch Jahrg. 1893 — in welchen ich vor der Veröffentlichung Einsicht nehmen durfte — näheren Aufschluss. Danach ist bei einigen der oben aufgeführten Systemtypen der Betrag des Astigmatismus (Differenz der Brennweiten in den beiden Hauptschnitten) und der Wölbung (Abweichung des mittleren Bildpunktes von der das Bild im Scheitel berührenden Ebene) durch folgende Tabelle charakterisirt.



(Fig. 61.)

Objektiv mit Oeffnung Brennweite stets = 100 *mm*	Bezeichnung des Bildfehlers	Hauptstrahlneigung von			
		10°	20°	30°	40°
A. Systeme mit grösserem Oeffnungswinkel.					
		mm	*mm*	*mm*	*mm*
1. Aplanat von STEINHEIL grösste Oeffnung ⅐	Mittlere Bildwölbung	−0.2	−0·9	+ 0·2	
	Astigmatismus (Meridian-Sagittalschnitt)	+0·8	+4·0	+12·2	
2. Antiplanet von STEINHEIL Oeffnung ⅙	Mittlere Bildwölbung	−0·8	−1·6	− 0·8	
	Astigmatismus	+0·4	+2·4	+ 8·8	
3. ZEISS-Anastigmat 1:6·3 . . .	Mittlere Bildwölbung	−0·3	−0·6	+ 1.8	
	Astigmatismus	+0·2	+1·2	+ 3·7	

[1]) S. Patenschrift der Firma C. ZEISS, D. R. P. No. 56109. 1890, und Dr. RUDOLPH. Ueber den Astigmatismus photographischer Linsen EDER's Jahrb. 1891, pag. 225.

Objektiv mit Oeffnung Brennweite stets = 100 *mm*	Bezeichnung des Bildfehlers	Hauptstrahlneigung von			
		10°	20°	30°	40°
	B. Weitwinkel.				
4. Weitwinkelaplanat $\frac{1}{20}$—$\frac{1}{25}$ . .	Mittlere Bildwölbung	−1·0	−3·8	−5·8	+ 0·4
	Astigmatismus (Meridian-Sagittalschnitt)	+0·5	+0·8	−2·4	−18·0
5. HARRISON's Kugellinse $\frac{1}{36}$ . .	Mittlere Bildwölbung	−0·4	−1·3	−3·1	− 6·3
	Astigmatismus	+0·4	+2·0	+5·2	+ 9·0
6. ZEISS-Anastigmat 1 : 18 . . .	Mittlere Bildwölbung	−0·6	−1·7	−2·2	+ 0·5
	Astigmatismus	0	+0·2	+0·9	+ 1·0

4) Man hat endlich versucht, unter Aufgabe der Beschränkung auf zwei Einzelbestandtheile (wie eine solche eigentlich schon im PETZVAL'schen System gewesen ist) durch Combination dreier — einfacher oder verkitteter — Linsen eine Verbesserung der Wirkungen zu erzielen. Die Bemühungen, welche in dieser Richtung von verchiedenen Seiten gemacht worden sind, haben sich aber bis jetzt noch nicht eines unzweifelhaften Erfolges zu erfreuen gehabt, weshalb wir hier nicht näher auf diese Constructionen eingehen.

5) Besondere Aufmerksamkeit haben in dem letzten Jahre die Bemühungen zur Herstellung von Systemen für Fernaufnahmen (Telephotographie) auf sich gelenkt. Damit solche Aufnahmen die betr. Gegenstände nicht allzu klein wiedergeben, sind Systeme von grosser Brennweite erforderlich. Diese würden aber, nach dem Typus der einfachen Linse construirt, entsprechend grossen Bildabstand (schwere grosse Camera etc.) erfordern. Um dies zu vermeiden, setzt man das System nach Art des eigentlichen Fernrohrs aus zwei Linsen — einer positiven von langer und einer dispansiven von kürzerer Brennweite — zusammen, deren Brennpunkte nahezu coincidiren und deren Brennweitenverhältniss die Vergrösserung bestimmt (MIETHE, DALLMEYER, STEINHEIL u. A.)

Die wichtigsten neueren Mittheilungen über Telephotographie reproducirt EDER in seinem Handb. der Photographie, Nachtrag zu Bd. 1, Heft 5, pag. 703 ff. Halle 1892.

Detaillirtere Beschreibungen der anderen üblichen Constructionsformen photographischer Systeme, denen meist elementare Auseinandersetzungen über das Wesen ihrer Wirkung vorausgeschickt sind, findet man u. A. in den Werken von

D. VAN MONCHHOVEN, Photographische Optik. A. d. Franz. übers. v. MARTIN. Wien 1866.

J. M. EDER, Die photogr. Objektive, ihre Eigensch. u. Prüfg. 2. Aufl. Halle 1891. (Bd 1, Heft 4 des Ausführl Handb. d. Photogr.)

Ch. FABRE, Traité encyclop. de photogr. I. Matériel photogr. Paris 1889. 1. Supplém. (A), ibid. 1892.

E. WALLON, Traité élém. de l'objectif photogr. Paris 1891.

H. SCHROEDER, Die Elemente der photogr. Optik. Berlin 1891 (zugl. Ergänzbd. zu VOGEL's Handb. d. Photographie).

II. Instrumente zur Unterstützung des Sehens.

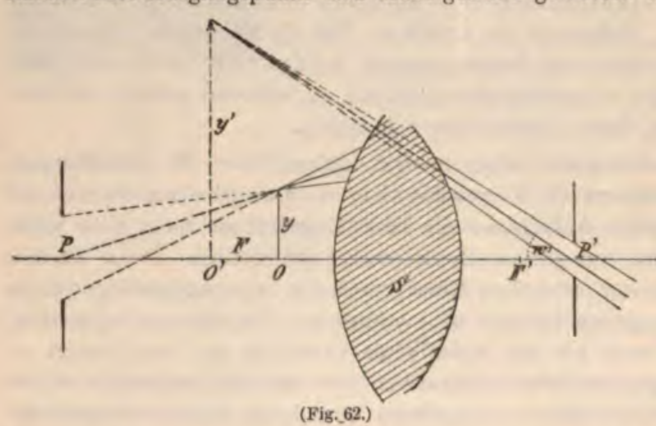
Der gemeinsame Zweck dieser Instrumente ist, Objekte, welche entweder in Folge ihrer Lage (Unzugänglichkeit) eine Annäherung des beobachtenden Auges nicht zulassen, oder bei denen eine solche in Folge des begrenzten

Accommodationsvermögen keinen Erfolg hätte, diesem Auge im Bilde unter einem grösseren Sehwinkel darzubieten. Der Effekt aller dieser Instrumente (Lupe, Mikroskop, Fernrohr) kann daher im Wesentlichen nur derselbe sein, wie ihn eine Annäherung des Objektes ans Auge — falls sie praktisch und physiologisch ausführbar wäre — zur Folge hätte. Diese Instrumente haben also zur Aufgabe, die Annäherung an das Objekt überflüssig zu machen, sie zu ersetzen. Dass sie irgendwelche anderen Wirkungen, z. B. in Bezug auf Lichtstärke (mit Ausnahme der auf Sterne gerichteten Teleskope) nicht äussern können, haben wir früher bereits allgemein erörtert. Da sie durchgängig mit ihrer dem Auge zugewandten Seite diesem sehr nahe gebracht werden, so muss das von ihnen entworfene Bild ein virtuelles, vor der letzten wirksamen Fläche gelegenes, sein, damit es von einem normalsichtigen Auge deutlich gesehen werden könne.

Wir betrachten

1. Die Lupe (Das einfache Mikroskop)[1].

Für die Construction und Wirkungsweise auch dieses Instrumentes ist, wie für die der Projectionssysteme — und zeitlich vor jenen — die einfache dünne Sammellinse Ausgangspunkt und maassgebend gewesen. In der That liefert eine solche von den diesseits ihrer ersten Brennebene gelegenen Objekten O (Fig. 62) Bilder, welche in der linken Hälfte des Bildraumes, d. h. vor der hinteren Brennebene der Linse, liegen; und zwar liegt bei geeignetem Abstande x des Objektes O von F das Bild O' in derjenigen Entfernung x' vom hinteren Brennpunkt F', auf welche dem Beobachter die Accommodation am bequemsten ist.



(Fig. 62.)

Das Verhältniss des halben Sehwinkels w', unter welchem sich dem Beobachter dieses Bild darbietet zur linearen Grösse y seines Objektes, d. i. die durch das Instrument erzielte absolute Vergrösserung ist nach pag. 161

$$V = \frac{tg\, w'}{y} = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{x'}\right); \qquad (1)$$

die auf 250 *mm* Projectionsdistanz bezogene conventionelle Vergrösserung

$$N = l \cdot V = \frac{l}{f'}\left(1 + \frac{X'}{x'}\right); \qquad (1a)$$

wenn X' den Abstand der Austrittspupille, x' den des Bildes von der hinteren Brennebene bezeichnet.

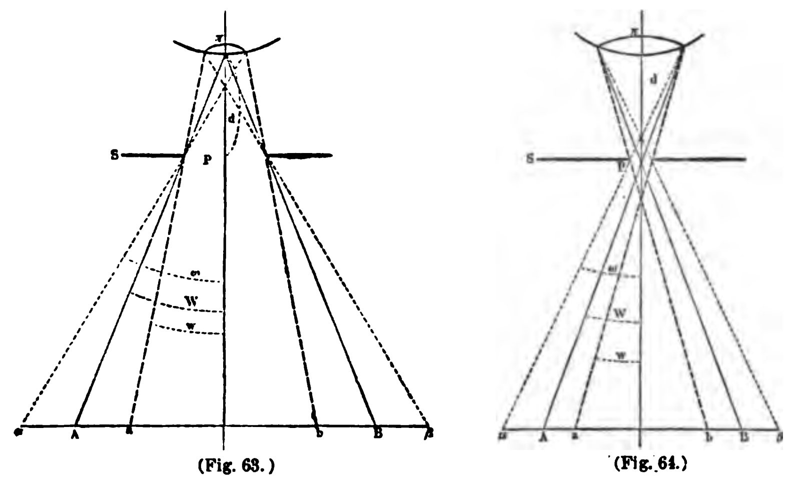
Die Lage der $A.$-$P.$ ist bei denjenigen nach Art einer einfachen Linse wirkenden Lupen, deren freie Oeffnung grösser ist als die der Augenpupille, gegeben durch — nämlich identisch mit — der letzteren. Alsdann ist also

[1]) Man bezeichnet Systeme der unten beschriebenen Art, wenn sie weniger als ca. 20 fache Linearvergrösserung geben als »Lupen«, bei stärkeren Vergrösserungsziffern als »einfache Mikroskope«.

die Augenpupille nach Lage und Grösse maassgebend für die Apertur und den Strahlengang der beim Sehen durch die Lupe wirksamen Büschel. Wenn also die Lage der *A.-P.* nicht etwa anderweitig, z. B. durch eine eigens hierfür vorgesehene Blende, fixirt ist, so würde eine für die gute dioptrische Wirksamkeit der Lupen charakteristische Forderung darin zu bestehen haben, dass dieselbe in allen Beziehungen von Ortsveränderungen der *A.-P.* wenig beeinflusst werde, in Bezug auf diese unempfindlich sei.

Die freie Oeffnung der Linse bildet unter der obigen Annahme die Begrenzung für das Sehfeld, welche auch in diesem Falle — ebenso wie bei den Projectionssystemen — dem Orte nach nicht zusammenfällt mit dem Bilde und infolgedessen in diesem einen mit voller Apertur wirksamen Theil unterscheiden lässt von einem solchen, welcher mit einer nach dem Rande zu abnehmenden Apertur abgebildet wird. Ist aber die freie Oeffnung der Linse kleiner als die Augenpupille, so kehrt sich das Verhältniss zwischen Aperturblende und Gesichtsfeldblende um.

Es ist leicht, bei gegebener Grösse beider Oeffnungen die Beträge des Oeffnungswinkels und Gesichtsfeldwinkels anzugeben. Man hat nämlich, wenn der Halbmesser der freien Linsenöffnung $= p$, der der Pupille $= \pi$ ist, im ersteren Falle



(Fig. 63.) (Fig. 64.)

$(p > \pi)$ (Fig. 63) für die Tangente des halben Gesichtsfeldwinkels w desjenigen Bildtheils a, b, welcher mit voller Apertur abgebildet wird, für den halben Gesichtswinkel w derjenigen Zone A, B, welche mit halber Apertur abgebildet wird und endlich für den Gesichtswinkel w der äussersten sichtbaren Zone α, β der Reihe nach

$$tg\, w = \frac{p - \pi}{d}, \qquad tg\, W = \frac{p}{d}, \qquad tg\, \omega = \frac{p + \pi}{d}, \tag{2}$$

wenn d die Entfernung zwischen Linsenöffnung und Pupille ist.

Der halbe Oeffnungswinkel u der wirksamen Büschel auf der Objektseite ist in diesem Falle — wenn wir annehmen, dass das Auge auf grosse Entfernung eingestellt, die Büschel auf der Bildseite also als nahezu parallelstrahlig zu betrachten seien — unabhängig von der Linsenöffnung und nur von der Brennweite der Linse bedingt, nämlich

$$tg\, u = \frac{\pi}{f}. \tag{2 a}$$

In dem andern Falle, $p < \pi$ (Fig. 64) hingegen sind die Gesichtswinkel der drei oben bezeichneten Räume

$$tg\,w = \frac{\pi - p}{d}, \quad tg\,W = \frac{\pi}{d}, \quad tg\,\omega = \frac{\pi + p}{d}. \tag{3}$$

Der halbe Oeffnungswinkel auf der Objektseite in diesem Falle ist

$$tg\,u = \frac{p}{f}. \tag{3a}$$

Wenn wir also, wie früher, als Gesichtsfeldwinkel schlechthin denjenigen bezeichnen, welcher von den Hauptstrahlen (Mittelaxen) der Büschel begrenzt wird, d. h. mindestens noch die Hälfte der Apertur des centralen Theils besitzt, so ist derselbe in dem einen Falle nur von der Oeffnung der Linse, in dem anderen Falle nur von derjenigen der Pupille und in beiden Fällen vom gegenseitigen Abstand beider abhängig. Das Sehfeld ist also unter sonst gleichen Umständen desto grösser, je näher man die Lupe an das Auge hält.

Die Helligkeit der Bilder ist im ersteren Falle bei jeder Vergrösserung gleich der des Sehens mit freiem Auge, im letzteren Falle wie $p^2 : \pi^2$ gegen diese verringert.

Wir fanden früher (pag. 91) den durch die sphärische Aberration eines Linsensystems verursachten Zerstreuungskreis, bezogen auf die Objektseite in erster Näherung proportional der dritten Potenz der Apertur und einer Constanten K, welche von der specifischen Construction des Systems abhängt, von dessen Brennweite aber unabhängig ist,

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 \cdot K. \tag{4}$$

Diese Gleichung gilt natürlich, ebenso wie für den dort angenommenen Fall eines unendlich entfernten Objekts auch für den hier vorliegenden eines sehr entfernten Bildes. ζ ist dann der angulare Werth des Zerstreuungskreises, gemessen vom vorderen Knotenpunkte des Systems, also auch der angulare Betrag desselben Zerstreuungskreises gesehen durch die Linse hindurch.

Es darf nun in diesem, wie in jedem anderen Falle, der Zerstreuungskreis im Bilde höchstens denjenigen Betrag erreichen, welcher eine merkliche Unschärfe hervorbringen würde. Dieser Betrag hängt, wie wir früher bereits wiederholt hervorhoben, von der Gestalt, Farbe, Helligkeit des Objektes sowie von der Sehschärfe des beobachtenden Auges ab, andererseits natürlich auch von der Art, wie der »Zerstreuungskreis« geometrisch bestimmt wurde und von der Lichtvertheilung innerhalb desselben. Für die gewöhnlich vorliegenden Objekte kann man vielleicht 5 Bogenminuten als Durchschnittsmaass annehmen. (Für die empfindlichen, sogen. »Testobjekte« muss er auf 1—2' herabgesetzt werden).

Es ist dann also bei Lupen, deren Durchmesser grösser als der der Augenpupille ist,

$$\zeta = \frac{\pi^3 \cdot K}{f^3} \tag{4a}$$

d. h. der durch die sphärische Aberration hervorgerufene Zerstreuungskreis unter sonst gleichen Umständen umgekehrt proportional der dritten Potenz der Brennweite, direkt proportional der dritten Potenz der Vergrösserung der Lupe. Hiernach ist leicht zu bemessen, dass die axiale sphärische Aberration einer einfachen planconvexen mit der ebenen Seite nach dem Objekte zu gerichteten Crownglaslinse für ein Auge von 4 Millim. Pupillenöffnung erst bei einer Brennweite von 9—10 *mm*, also bei einer ca. 25 fachen linearen Vergrösserung – in umgekehrter Lage bei einer ca. 7 fachen — anfängt, bemerklich zu werden, was in Uebereinstimmung mit der Erfahrung ist.

Ganz analog ist der Einfluss der chromatischen Aberration zu bemessen. Wir fanden diese pag. 127 proportional einer von der Zusammensetzung des

Systems abhängigen Constanten G und der ersten Potenz des Oeffnungsverhältnisses, also in unserem Falle

$$\gamma = \left(\frac{h}{f}\right) \cdot G = \frac{\pi \cdot G}{f}. \tag{5}$$

Bei constantem $\pi (p > \pi)$ wächst daher der Zerstreuungskreis der chromatischen Aberration direkt mit der Vergrösserung des Systems und wird demgemäss in einfachen Crownglaslinsen erst bei einer ca. 10fachen Vergrösserung bemerklich.

Die Ansprüche, welche an die Eigenschaften der von Lupen entworfenen Bilder ausserhalb der Axe zu stellen sind, decken sich vollständig mit denjenigen, welche wir bei den photographischen Systemen namhaft gemacht haben. In der That lässt sich ein photographisches Objektiv, dessen *A.-P.* im zugänglichen Theil des Bildraumes liegt, z. B. die einfache Linse mit ausserhalb gelegener Blende ohne weiteres als Lupe benützen, wenn man ihre Stellung gegenüber Objekt und Bild umkehrt (bei der pag. 200 betrachteten einfachen Landschaftslinse hätte man demnach die Blende nach dem Auge hin zu richten). An Stelle des in oder ein wenig ausserhalb der Brennebene gelegenen Bildes würde hier für ein normalsichtiges Auge das in oder etwas innerhalb der Brennweite gelegene Objekt kommen (für ein übersichtiges Auge würden Objekt und Bild ihre Lage unter blosser Umkehrung ihres Verhältnisses geradezu beibehalten können). Von Wichtigkeit sind also hier wie dort: Aufhebung des Astigmatismus und des Coma, Ebenung des Bildes, Orthoskopie und von den chromatischen Eigenschaften insbesondere: Gleichheit der Vergrösserung für die verschiedenen Farben.

Die üblichsten Constructionen.

1) Die einfache unachromatische Linse. Dieselbe ist in Brennweiten bis zu ca. 30 *mm* herunter, d. h. bis zu ca. 8 maliger Vergrösserung ganz brauchbar, wenn man ihr eine etwa planconvexe Gestalt giebt, mit der ebenen Seite nach dem Auge zu. (Diese Stellung ist zwar wegen des bei ihr relativ grossen Betrages der sphärischen Aberration in der Axe ungünstig, verdient aber trotzdem wegen der in ihr erheblich geringeren Fehler ausser der Axe bei weitem den Vorzug.) Man hat, wenn man sie nahe ans Auge hält, ein Bildfeld von ungefähr $\frac{1}{4}$ der Brennweite merklich eben und ziemlich frei von Verzerrung. Darüber hinaus sind die Fehler in diesen letzteren beiden Eigenschaften, wie auch namentlich in Bezug auf die chromatische Vergrösserungsdifferenz zu sehr bemerklich.

2) Eine wesentliche Verbesserung diesen einfachen Lupen gegenüber bilden die aus zwei unachromatischen (meist planconvexen) Linsen zusammengesetzten, deren bekannteste Typen die von FRAUNHOFER (Fig. 65) und WILSON (Fig. 66) sind. Bei der ersteren Construction, in welcher noch nahezu der Typus der einfachen Linse festgehalten ist, sind durch die Vertheilung der Brechung auf die doppelte Anzahl von Flächen und die infolgedessen geringeren Krümmungen derselben die Aberrationen in der Axe ohne weiteres verringert, während durch die besondere Art der Zusammensetzung aus zwei annähernd gleichen, mit den convexen Flächen einander zugewandten Linsen in geringem Abstand von einander der Verminderung der Aberrationen ausserhalb der Axe möglichst Rechnung getragen ist.



(Fig. 65.)



(Fig. 66.)

Bei der WILSON'schen Lupe kommen einerseits dieselben Vortheile zur Geltung; die grössere Entfernung der Linsen von einander gewährt sogar für

die Verminderung der Aberrationen ausser der Axe noch günstigere Bedingungen und ermöglicht ausserdem, wenn auch nicht die Aufhebung — das würde dem System gänzlich den freien Objektabstand rauben — so doch eine Verminderung der chromatischen Differenz der Vergrösserung; dafür ist diese Lupe gegen die FRAUNHOFER'sche im Nachtheil in Bezug auf den Objektabstand. Man wählt die Brennweiten der Einzellinsen bei ihr ungefähr gleich, ihren Abstand zu $\frac{3}{8}$ jener Brennweiten. Das Sehfeld wird bei der WILSON'schen Lupe entweder durch ein zwischen den Linsen befindliches Diaphragma oder ebenso wie bei einer ein fachen Linse durch die Grösse (den Rand) einer der beiden Linsen bestimmt.

Von geringerem Werthe als die eben genannten sind die aus einem dickeren Glasstück bestehenden und daher ebenfalls mehr nach dem Typus zweier Einzelsysteme als nach dem einer dünnen Linse zu betrachtenden Lupen von der Art, wie sie BREWSTER (Fig. 67) und STANHOPE (Fig. 68) vorgeschlagen haben. Bei ersterer bilden die beiden Begrenzungsflächen Theile einer und derselben Kugel; die Apertur der seitlichen Büschel ist durch einen meridionalen Einschliff so weit reducirt, dass die Bilder erträglich werden. Bei der STANHOPE'schen Linse sind die beiden Krümmungen erheblich verschieden, oft in der Weise, dass die vordere (untere) Brennebene dem Orte und der Krümmung nach mit der vorderen Linsenfläche zusammenfällt, um die in dieser angebrachten Gegenstände (z. B. kleine Photogramme) durch die stärker gewölbte Fläche hindurch betrachten zu können. Auch bei der BREWSTER'schen Lupe ist der Abstand des Objektes von der ersten Linsenfläche, der sogen. freie Objektabstand, natürlich sehr gering.


(Fig. 67.)


(Fig. 68.)

3) Unter den aus Gläsern mit verschiedenem Zerstreuungsverhältniss zusammengesetzten Lupen haben sich namentlich die von STEINHEIL construirten, sogen. aplanatischen, bewährt. Dieselben bestehen aus einer zwischen zwei gleichen Flintglasmenisken eingeschlossenen biconvexen Crownlinse. Eine weitere Verbesserung im Rahmen derselben Construction wurde — es ist mir nicht bekannt, durch wen zuerst — dadurch eingeführt, dass der mittleren Crownlinse eine grössere Dicke gegeben wurde, so dass gewissermaassen eine achromatisirte BREWSTER'sche Lupe entstand (Fig. 69; $f = 40$ *mm*, nat. Gr.).


(Fig. 69.)

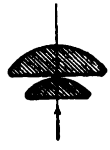
4) Das Gegenstück in gewissem Sinne zu der WILSON'schen Lupe bildet die zuerst von CHEVALIER[1]) vorgeschlagene, später von E. BRÜCKE[2]) wieder aufgenommene Construction, nach welcher man eine collective Vorderlinse mit einer dispansiven Hinterlinse verbindet (Fig. 70). Denn während bei der WILSONschen Lupe die Ausdehnung und Qualität des Bildes auf Kosten des freien Objektabstandes erhöht wird, findet bei der BRÜCKE'schen umgekehrt eine Einbusse in diesen beiden Beziehungen zu Gunsten des freien Objektabstandes statt. Doch stellt diese, jetzt gewöhnlich nach BRÜCKE bezeichnete, Lupe schon mehr ein zusammengesetztes Mikroskop in dem weiter unten aufgefassten Sinne vor; ihre Wirkungsweise findet daher besser bei der Besprechung dieses nähere Erklärung.

(Fig. 70.)

---

[1]) CHEVALIER, Des Microscopes. D. Uebers. Quedlinburg 1843, pag. 38.
[2]) Sitzber. Wien. Akad. 6. pag. 554. 1851.

5) Man hat früher einfache Mikroskope von erheblich kürzerer Brennweite und entsprechend stärkerer Vergrösserung hergestellt, als die oben aufgeführten besitzen. Die Anwendung einer einzigen Linse zu diesem Zwecke verbot sich natürlich bald von selbst; denn eine solche würde schon bei mittleren Vergrösserungen einen sehr kurzen Krümmungsradius erhalten müssen (z. B. bei 500 facher linearer Vergrösserung und planconvexer Form wäre, Crownglas vom Brechungsexponenten 1·5 als Material vorausgesetzt, $r = 0·25$ *mm*). Dadurch wäre einerseits die äusserste mögliche Oeffnung der Linse ebenfalls auf sehr geringe Beträge herabgedrückt (der Durchmesser einer vollständigen Halbkugel im obigen Falle $= 2r = 0·5$ *mm*) also die Lichtstärke eine entsprechend geringe. Andrerseits führt eine solche Halbkugel oder — was man auch vorgeschlagen und benutzt hat — Vollkugel (Glasperle), bis an ihren Aequator benützt, so starke Aberrationen herbei, dass von einer Strahlenvereinigung und einem optischen Bilde überhaupt kaum noch die Rede sein kann. Man muss die freie Oeffnung einer solchen Linse also erheblich vermindern, auf $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{10}$ ihres Maximalbetrages, und verliert proportional dieser Reduction an Unterscheidungsvermögen, im quadratischen Verhältnisse mit ihr an Lichtstärke. Man hat daher nach einigen misslungenen Versuchen, die genannten Uebelstände durch Anwendung von hochbrechenden Substanzen (Edelsteinen bezw. Flüssigkeiten BREWSTER 1819, GORING und PRITCHARD 1824) zu vermindern nach dem Vorschlag von EULER[1]), J. HERSCHEL[2]) und namentlich von WOLLASTON[3]) zwei, später auch drei Linsen zu einem sogen. Dublet bezw. Triplet zusammengesetzt. Durch die Vertheilung der Krümmung auf mehrere Flächen werden die Aberrationen gemäss dem pag. 110 Ausgeführten erheblich vermindert. Fig. 71 stellt ein solches Dublet von 2 *mm* Brennweite in 4facher Grösse dar (von ZEISS), wie es noch in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts vielfach gebraucht wurde. Der grösste Theil der mikroskopischen Untersuchungen bis zur Mitte dieses Jahrhunderts wurde mit derartigen Systemen ausgeführt, bei denen Vergrösserungen bis zu 200 noch ziemlich vortheilhaft erreichbar waren[4]).



(Fig. 71.)

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Objektabstände und des Gesichtsfelds der oben genannten Lupen bei verschiedenen Brennweiten bezw. Vergrösserungen.

Constructionstypus	Lineare Vergrösserung	Focalabstand *mm*	Objektseitiges Gesichtsfeld *mm*
Einfache Linse, planconvex	6	40	bis ca. 8 *mm* brauchbar
WILSON'sche Lupe	10	12—14	14
STEINHEIL'sche Lupen	6	34	18
	10	20	10
	20	10	3·5
Achromatisirte BREWSTER'sche Lupen	6	32	30
	10	12	15
BRÜCKE'sche Lupe	6	70	10
Dublets von ZEISS	17	13	4
	34	5	2
	70	2·5	1·2

1) Mém. Acad. Berlin 20, pag. 105. 1764.
2) Phil. Trans. 1821, pag. 246.
3) Phil. trans. 1829, pag. 9; POGG. Ann. 16. pag. 176. 1829.
4) Näheres über diese und die Entwickelungsgeschichte des einfachen Mikroskops über-

II. Das zusammengesetzte Mikroskop.

An sich wäre kein Grund gewesen, auf dem eingeschlagenen Wege nicht noch weiter zu gehen und durch Zusammensetzung des Systems aus mehreren geeignet angeordneten Linsen von verschiedenem Brechungsvermögen und verschiedener Dispersion die sphärischen und chromatischen Fehler nach dem Princip der gegenseitigen Compensation vollständig aufzuheben, ja sogar dies unter Erzielung genügend grosser Linsenöffnungen, ganz ebenso wie das in den Objektiven der modernen Mikroskope thatsächlich geschieht. In der That werden wir bald zeigen, dass diese Objektive im Wesentlichen nichts anderes sind als gut corrigirte Lupen (einfache Mikroskope) von kurzer Brennweite und relativ grosser Oeffnung.

Wenn man sich trotzdem behufs Erzielung hoher Vergrösserungen von jenem Wege abgewandt, und seit den 30er Jahren dieses Jahrhunderts mehr und mehr, seit der Mitte des Jahrhunderts sogar ausschliesslich der Benutzung bezw. Vervollkommnung des schon vor nunmehr ca. 300 Jahren erfundenen zusammengesetzten Mikroskops zugewandt hat, so müssen die Gründe hierfür anderwärts zu suchen sein. Als solche Gründe konnten schon zu jener Zeit die folgenden geltend gemacht werden.

Vorzüge des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen.

1) Durch die Zusammensetzung eines Systems aus zwei andern, um einen endlichen Abstand getrennten, erhält man gemäss den pag. 47 ff. dargelegten Gesetzen ein neues System, dessen Brennweite f in einem beliebigen Verhältniss kleiner ist, als die seiner Bestandtheile f_1, f_2, wenn man den Abstand zwischen den einander zugewandten Brennpunkten dieser Partialsysteme, $F_1' F_2 = \Delta$, welchen ABBE als die optische Tubuslänge bezeichnet, entsprechend gross wählt. Wir fanden pag. 48 die vordere Brennweite des combinirten Systems

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, \text{ die hintere analog } f' = +\frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{1}$$

Man kann hiernach z. B. ein System von 1 *mm* Brennweite erzielen durch Combination zweier anderer von je 10 *mm* Brennweite, deren zugewandte Brennpunkte um 100 *mm* von einander entfernt sind. Diese Vertheilung der dioptrischen Fundamentalwirkung auf zwei Partialsysteme von beiläufig 5—20fach grösseren Dimensionen würde auch unter sonst gleichen Umständen handgreifliche Vortheile schon für die technische Ausführung bieten.

2) Ein andrer praktischer Vortheil, der ohne weiteres mit der Trennung in zwei gesonderte Bestandtheile verbunden ist, besteht darin, dass hierdurch das Objekt in grössere Entfernung vom Auge bezw. Gesichte des Beobachters gerückt wird. Die grossen Unbequemlichkeiten und Beengungen im Gebrauch des Mikroskops, ja sogar die Gefahr, welche unter Umständen für den Beobachter in dessen grosser Nähe am Auge beruht (z. B. bei Erwärmung, elektrischer Erregung oder dergl. des Objekts) bedürfen wohl kaum einer weiteren Erläuterung.

3) Nicht nur der Abstand des Objekts vom Auge, sondern auch derjenige von der Vorderfläche des Objektivs wird durch die Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten Bestandtheilen und die dadurch ermöglichte

---

haupt sehe man in den älteren der unten angeführten mikrographischen Werken, insbesondere: H. v. MOHL, Mikrographie, Tübingen 1846, pag. 36, und P. HARTING, Das Mikroskop. Braunschweig 1859, I, pag. 91—118, u. III. (Geschichte etc. des Mikroskops), pag. 569 ff.

Vergrösserung der Dimensionen (Brennweiten) dieser Bestandtheile selbst mit vergrössert, — was besonders bei den stärkeren Systemen, von kurzer Gesammtbrennweite, ausserordentlich ins Gewicht fällt. Diese Vergrösserung ist einerseits mit derjenigen des Vordertheils des Systems (Objektivs) an sich verknüpft, wenn wir die später näher zu rechtfertigende Annahme gelten lassen, dass dieses für die Erzielung einer gleichartigen Wirkung auch eine im wesentlichen gleiche Construction erhalten müsse, wie ein einfaches Mikroskop. Denn alsdann wird der Abstand der vorderen Brennebene dieses Systems von seiner ersten Fläche mit seinen übrigen Dimensionen einfach mitvergrössert. Die vordere Brennebene des Gesammtmikroskops liegt aber noch vor derjenigen seines Objektivs, wenn der Abstand der zugewandten Brennpunkte von Objektiv und Ocular, $F_1'F_2 = \Delta$, positiv ist — was wir hier immer annehmen wollen; denn wir fanden früher die Grösse

$$F_1F = \sigma = -\frac{f_1^2}{\Delta}, \tag{2}$$

also liegt F vor F_1, d. h. der freie Objektabstand des ganzen Mikroskops ist noch grösser als derjenige seines Vordertheils wäre, wenn dieses für sich als Lupe benützt würde (vergl. Fig. 74).

4) Ein weiterer Vorzug des zusammengesetzten Mikroskops liegt darin, dass die Bestandtheile desselben gegen andere von abweichender Construction oder Stärke auswechselbar sind, z. B. dasselbe Objektiv mit verschiedenen Ocularen benützt werden kann, sodass man mit demselben Objektiv auf sehr bequeme Weise eine Reihe verschiedener Vergrösserungen erzielen kann. Ferner erscheinen die durch das Objektiv allein vermittelten und etwa in dessen hinterer Brennebene auftretenden Lichterscheinungen (Axenbilder von Krystallen, Diffractionsspectra) daselbst entsprechend seiner Brennweite 4 bis 10 mal grösser als in der Brennebene eines dem ganzen Mikroskop äquivalenten einfachen, sind daher im selben Verhältniss leichter zu beobachten.

5) Die jetzt fast allgemein adoptirte Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten collectiven Bestandtheilen bringt die Erzeugung eines reellen Zwischenbildes vor dem zuletzt beobachteten virtuellen mit sich. Hierdurch wird es möglich, in bequemer Weise dieses Bild aufzufangen, um es entweder einer Messung zu unterwerfen oder photographisch zu fixiren oder — sei es als Ganzes, sei es in seinen einzelnen Bestandtheilen — physikalischen Veränderungen zu unterwerfen (Polarisation, spectrale Zerlegung der Farben, Absorption etc.), mittelst derer ein Rückschluss auf die Beschaffenheit des Objekts möglich wird. Diesen Möglichkeiten, welche sicher noch bei weitem nicht erschöpft sind, verdankt das zusammengesetzte Mikroskop schon jetzt einen nicht geringen Theil seiner thatsächlichen Verbreitung. Sie haben in Verbindung mit den anderen oben genannten für die Schaffung bezw. den Ausbau einer mikrochemischen, mikrophysikalischen, mikrobiologischen, mikrodiagnostischen und ähnlicher Disciplinen die wesentliche Grundlage gebildet.

Die vorstehend genannten Momente, welche, wie bemerkt, schon früher geltend gemacht werden konnten, betreffen Vorzüge theils technischer, theils sonstiger praktischer Natur. Sie betreffen nicht die dioptrische Leistung des Mikroskop und würden in gleicher Weise bestehen bleiben z. B. auch bei einer geometrisch vollkommenen Abbildung, wie der im II. Abschnitt dieser Darstellung betrachteten. Der fundamentale Vorzug des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen — wie er praktisch natürlich auch schon früher von selbst zur Geltung,

aber erst in verhältnissmässig neuer Zeit durch ABBE[1]) zu klarer Erkenntniss und in der Construction dieses Instruments zu bewusster methodischer Anwendung gekommen ist — liegt nun gerade darin, dass es eine Erhöhung der optischen Leistungsfähigkeit nach der quantitativen wie qualitativen Seite hin gestattet, d. h. dass es die Abbildung eines grösseren Objektstücks und dieses in grösserer Vollkommenheit ermöglicht, als ein einfaches System gleicher Stärke.

Denn nach den allgemeinen Gesetzen, denen jede optische Abbildung unterworfen ist, ist es schlechterdings unmöglich, die Abbildung einer gegen die Brennweite eines Systems beträchtlichen Objektfläche mit Büscheln zu bewirken, welche auf der Objekt- oder Bildseite sehr grosse Oeffnungen haben. Man kann nur — wie wir bewiesen und woran wir wiederholt erinnert haben — entweder mit Büscheln grosser Oeffnung ein Objekt abbilden, dessen Dimensionen klein sind gegen die Brennweite des Systems, oder ein relativ grosses Objekt, dieses aber nur mittelst entsprechend enger Büschel. So lange man daher beim einfachen Mikroskop stehen blieb, war dessen Wirkung nothwendig auf die eine oder andere Möglichkeit beschränkt. Wie wir später zeigen werden, beruht nun die Capacität eines Mikroskops in erster Linie auf der Grösse des Oeffnungswinkels der vom Objekt aus divergirenden, zum Bilde beitragenden Büschel. Die möglichste Vergrösserung dieses Winkels ist also das erste Postulat bei der Construction des Mikroskop für die Steigerung seiner Wirkung. Andererseits sind die das letzte Bild formirenden und von ihm zum Auge gelangenden Büschel naturgemäss — entsprechend der mittleren Sehweite und Pupillengrösse des Auges — sehr enge.

In dem zusammengesetzten Mikroskop ist nun gerade von den Eigenthümlichkeiten jener beiden in ihm auftretenden Grenzformen optischer Abbildung — mittelst sehr weiter und mittelst sehr enger Büschel — Gebrauch gemacht, um zugleich den Forderungen grosser Apertur der Büschel und grösseren Objektfeldes zu genügen. Denn seine Zusammensetzung hat nicht nur die Theilung und damit erleichterte Leistung der optischen Fundamentalwirkung zum Zwecke — wie man es auszudrücken pflegt: das vom Objektiv entworfene Bild wird vom Ocular abermals vergrössert — sondern sie bedeutet vor allem eine Vertheilung specifischer Functionen auf die beiden Bestandtheile des Systems, eine Art Arbeitstheilung innerhalb des Systems, wie sie eben durch die erhöhten Ansprüche an die Leistungen desselben und durch die Natur der dioptrischen Bilder, d. h. der Mittel und Grenzen ihrer Erzeugung unabweislich geboten ist.

Durch das Objektiv wird zunächst eine gegen dessen Brennweite — aber nicht ebenso gegen die des ganzen Mikroskops — kleine Objektfläche mittelst weiter Büschel abgebildet. Dieses Bild, in welchem die Strahlenbüschel schon entsprechend der in ihm repräsentirten Vergrösserung enger geworden sind, bildet das Objekt für den zweiten Theil des Systems, das Ocular, für welchen daher die Gesetze der Abbildung mittelst enger Büschel maassgebend sind. In ihm kann daher ein im Verhältniss zu seiner Brennweite erheblicher Theil jenes ersten Bildes — und zwar dieser unter beträchtlicher Divergenzänderung der wirksamen Büschelaxen (Hauptstrahlen) —

[1]) Zuerst ausgesprochen (ohne Beweise) in MAX SCHULTZE's Arch. f. mikrosk. Anat. 9, pag. 421; später von demselben weiter ausgeführt in Relation of aperture and power in the *microscope*. Journ. R. Micr. Soc. (2) 2, pag. 300, 460, 720. 1882.

weiterer Abbildung unterworfen werden. In etwas schroffer uud daher nicht ohne Einschränkung zutreffender Weise drückte ABBE dieses Verhältniss in seiner ersten Abhandlung folgendermaassen aus:

»Im Objektiv erfolgt die Flächenausbreitung des Bildes praktisch so gut wie vollkommen nach den Gesetzen für die Abbildung eines unendlich kleinen Flächenelementes; im Ocular erfolgt die Divergenzänderung in den einzelnen Lichtbüscheln bis auf unmerkliche Abweichungen so wie an unendlich engen Strahlenbüscheln. Dagegen kommt dort das eigenthümliche Moment der Divergenzänderung von Strahlenkegeln grossen Oeffnungswinkels, hier das eigenthümliche Moment der Ausbreitung einer Bildfläche auf grossen Bildwinkel zur Geltung. — — In dieser Theilung der dioptrischen Leistung noch viel mehr als — wenn auch in Verbindung mit — den vorher namhaft gemachten Momenten liegt der wahre Grund der notorischen Ueberlegenheit des zusammengesetzten Mikroskops gegenüber dem besten Simplex auch schon bei solchen Vergrösserungen, die sich ohne alle Schwierigkeit mit dem einfachen Mikroskop erreichen lassen, wenn man die Qualität der Leistung ins Auge fasst.« Wie wir später sehen werden, ist eine gewisse Grösse der Apertur (des Oeffnungswinkels der vom Objekt aus divergirenden Strahlen) erforderlich, damit ein Detail von gegebener Feinheit im Bilde überhaupt wiedergegeben werde, und es ist eine gewisse Ausbreitung dieses Details auf einen bestimmten Sehwinkel nothwendig, damit es für das Auge bei der beschränkten Sehschärfe desselben getrennt wahrnehmbar sei Hierdurch wird der Vollzug dieser beiden Leistungen Grunderforderniss und zugleich Maassstab der Wirkung jedes optischen Instruments. Die Vertheilung derselben auf zwei getrennte Bestandtheile aber bietet — wie schon hier erkenntlich ist, allein die praktische Möglichkeit für die Ausführung der beiden Leistungen, und darin eben liegt ihre principielle Bedeutung.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang im Mikroskop.

In der Art der Strahlenbegrenzung und des dadurch bedingten Strahlenganges finden die genannten Momente ihren unmittelbarsten Ausdruck; denn natürlich bedingt die Art der Strahlenbegrenzung ebenso sehr die Art der Wirkung, als umgekehrt eine specifische Wirkungsweise eine gewisse Art der Strahlenbegrenzung erfordert. Wir betrachten daher zunächst diese.

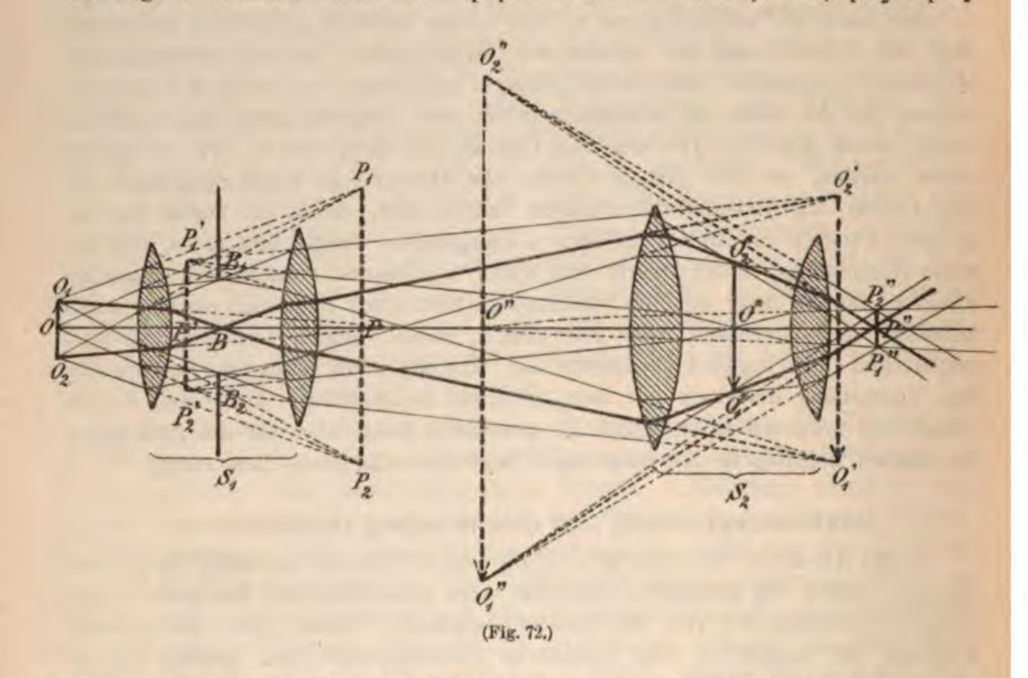
Begrenzung der Apertur. Lage der Pupillen. Die Lage der die Oeffnung der Strahlenbüschel begrenzenden Blende ist im zusammengesetzten Mikroskop nicht einheitlich und nach bestimmten Gesichtspunkten regulirt. Gemeinsam ist allen Mikroskopen nur dies, dass die Begrenzung der Strahlenbüschel nicht im Ocular sondern im Objektiv oder sogar vor demselben indirekt, im Beleuchtungsapparat stattfindet. (Mit Ausnahme des Falles, dass die Vergrösserung unter der Normalvergrösserung bleibt, wo dann die Apertur durch die Pupille des Auges reducirt wird.)

Nur wenn es sich darum handelt, das vom Objektiv allein entworfene Bild mikrometrischer Messung zu unterwerfen, ist es für die Genauigkeit dieser, wie wir früher (pag. 165) näher ausgeführt haben vortheilhaft, eine genügend enge Blende in der hinteren Brennebene des Objektivs anzubringen; denn da der Abstand der Pointirungsebene (Mikrometer-Vorrichtung) vom Objektiv durch die Verbindung beider mit dem Tubus mechanisch festgelegt ist, so bleibt nur derjenige des Objektes vom Objektiv einer Variabilität unterworfen. Es muss daher der Strahlengang nach der Objektseite hin telecentrisch gemacht werden. Andererseits kann man bei solchen Messungen meist auf die Forderung grosser Oeffnungswinkel verzichten, welche für die sonstige Anwendung des Mikroskops, zur Beobachtung fein structurirter Objekte, und

daher auch für seine Construction wesentlich ist. Jene Einrichtung fällt daher eigentlich etwas ausserhalb des Rahmens unserer jetzigen Discussion.

Bei den stärkeren Mikroskopen findet die Begrenzung der Strahlenbüschel oft an deren Frontlinse statt, welche in Folge ihrer eigenthümlichen Beschaffenheit (halbkugelig oder selbst überhalbkugelig) der Apertur von selbst eine Grenze setzt. In anderen Fällen kann die Blende durch den Rand irgend einer der auf die Frontlinie folgenden Linsen vorgestellt oder zwischen denselben eigens vorgesehen sein. Wir wollen diesen letzteren Fall als den allgemeinsten ins Auge fassen.

Der sich dann ergebende Strahlengang ist in Fig. 72 schematisch dargestellt. Die Lage der Eintritts- und Austrittspupille sowohl für das Objektiv ($P_1 P_2$, $P_1' P_2'$



(Fig. 72.)

als für das Ocular ($P_1' P_2'$, $P_1'' P_2''$) ergiebt sich dann nach den allgemeinen früher aufgestellten Regeln. Die Lage der *E.-P.*, $P_1 P_2$, hinter dem Objektivsystem S_1, wie in der Fig. 72 dargestellt, ist nach dem eben bemerkten nur zufällig; diese Lage hängt vielmehr ganz von der Stellung der wirksamen Blende, $B_1 B_2$, gegen den ihr vorangehenden Theil des Objektivsystems ab. Im allgemeinen aber ist es vortheilhaft, wenn die *E.-P.* nicht allzunah am Objekt liegt, damit die Hauptstrahlen der von dessen Punkten ausgehenden Büschel $O_1 P$, $O_2 P$ keine erheblichen Neigungen gegen einander erhalten und damit nicht durch die mit einer solchen verbundene perspektivische Verkürzung der *E.-P.* — von den seitlich liegenden Objektpunkten aus gesehen — eine entsprechende Verminderung der Apertur der von ihnen ausgehenden Strahlenbüschel eintrete. Dieser Bedingung ist bei stärkeren Systemen stets hinreichend genügt, da in Folge des nach dem Sinus des halben Oeffnungswinkels zu bemessenden photometrischen Werthes schiefer Strahlen die optische Schwerpunktslinie hier auch bei ganz nahe gelegener *E.-P.* dennoch nahezu parallel der Axe wird.

Die Austrittspupille des gesammten Systems, $P_1'' P_2''$, ist dann das vom Ocular S_2 entworfene Bild der für das Objektiv S_1 allein wirksamen, $P_1' P_2'$.

Da letztere stets vor der vorderen Brennebene des Oculars sich befindet — und zwar meist ebenfalls in der Nähe des Linsensystems selbst, also in beträchtlicher Entfernung vom Ocular — so liegt die Austrittspupille des ganzen Systems hinter der zweiten Brennebene des Oculars. Wenn also letztere im zugänglichen Theil des Bildraumes (hinter der letzten Ocularlinse) liegt, so ist dies mit der *A.-P.* des Systems um so mehr der Fall.

Wenn z. B. das Objektiv telecentrisch ist, seine *A.-P.* sich in seiner hinteren Brennebene befindet, so fällt diejenige des ganzen Systems zusammen mit der hintern Brennebene desselben, F'' und ist von der hintern Brennebene des Oculars, F_2', um eine Strecke σ' entfernt, welche nach pag. 48

$$\sigma' = \frac{f_2^2}{\Delta} \tag{3}$$

ist. Sehr annähernd wird dies immer der Fall sein, da die Entfernung Δ an sich schon eine beträchtliche zu sein pflegt (150—300 *mm*), sodass eine mässige Abweichung der *A.-P.* des Objektivs von F_1' keinen erheblichen Einfluss auf die Lage der *A.-P.* des ganzen Systems ausübt.

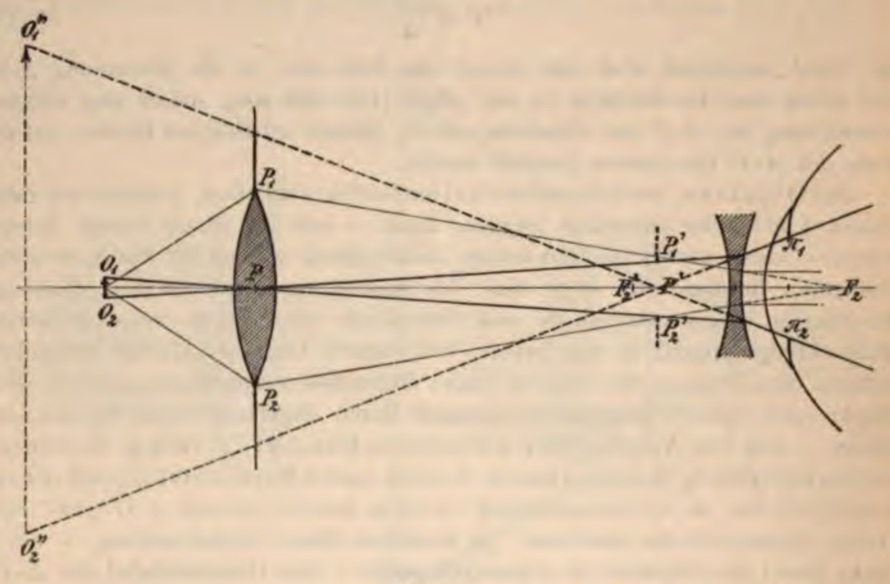
Bei Objekten, welche nicht selbstleuchtend sind, sondern von einer andern Lichtquelle beleuchtet werden, kann — wie wir früher bereits hervorhoben — diese nach Lage und Grösse maassgebend werden für die Apertur der wirksamen Büschel. Es kann diese Lichtquelle entweder durch regelmässige Brechung in einem zwischen ihr und dem Objekt befindlichen optischen System (Beleuchtungsapparat) in eine solche von anderer Lage und Grösse verwandelt werden, oder es kann das von ihr bezw. ihrem Bild ausgegangene Licht in dem Objekt noch weitere Richtungsänderungen durch Brechung bezw. Beugung erfahren — für die Apertur der wirksamen Büschel ist immer diejenige Lichtvertheilung maassgebend, welche unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse, d. h. thatsächlich in dem Raum zwischen Objekt und erster Linsenfläche statthat. Je nachdem diese Lichtausbreitung — für je einen Punkt des Objektes als Convergenzpunkt — den Gesichtswinkel der *E.-P.*, von demselben Punkt aus gesehen, überschreitet oder nicht, ist diese *E.-P.* oder jene durch die Beleuchtungsverhältnisse gegebene Lichtausbreitung maassgebend für die wirksame Oeffnung der Büschel.

Begrenzung des Sehfelds. Diese erfolgt bei zusammengesetzten Systemen, umgekehrt wie die der Apertur, fast stets im Ocular und zwar an derjenigen Stelle, wo vor dem Ocular oder innerhalb desselben ein reelles Bild des Objektes zu Stande kommt. Die objektseitige Gesichtsfeldblende ist dann das Bild jener physischen Blende wie es durch den ihr vorangehenden Theil des Systems nach der Objektseite hin entworfen würde; die bildseitige Gesichtsfeldblende das Bild derselben Blende, von dem ihr nachfolgenden Theil des Systems nach dem Bildraum hin projicirt. In diesem wie in jenem Raum fällt sie also mit dem Objekt bezw. Bilde selbst zusammen, d. h. es findet hier eine scharfe Begrenzung des Sehfelds statt.

Eine Ausnahme hiervon macht nur der Fall, dass das Ocular nach dem Typus der einfachen Dispansivlinse construirt ist; alsdann kommt ein reelles Bild des Objektes nirgends zu Stande. Die das Bild formirenden Strahlenbüschel (Fig. 73) sind in diesem Falle begrenzt einerseits durch die Pupille des Auges $\pi_1\pi_2$, andererseits durch das von dem Ocular entworfene virtuelle Bild $P_1'P_2'$ der Objektivöffnung (*E.-P*) P_1P_2. Das Bild — wo dasselbe auch zu Stande kommen möge — wird vom Auge durch jenes Bild der Objektivöffnung wie durch ein physisches Diaphragma hindurch gesehen. Die Verhältnisse sind dann im Bildraum dieselben, wie wir sie bei den Lupen und einfachen Mikroskopen betrachtet haben. Je nach-

dem die Augenpupille oder das Objektivbild das grössere ist, wirkt die erstere als Gesichtsfeldblende und die letztere als Aperturblende oder umgekehrt. Bei den stärker vergrössernden, nach diesem Typus construirten Mikroskopen, ist das eine, bei den schwächer vergrössernden (CHEVALIER-BRÜCKE'sche Lupe) das andere der Fall.

Der Vorzug der Anwendung eines solchen Oculars beruht einmal darin, dass dasselbe $(f_2) > (f_1)$ vorausgesetzt, eine positive Gesammtbrennweite des ganzen Systems ergiebt, also bei der hier gedachten Art des Gebrauchs aufrechte Bilder. Ausserdem darin, dass bei gegebenen Brennweiten von Objektiv und Ocular und gegebenem Abstand derselben von einander — beide als dünne Linsen gedacht — eine etwas stärkere Vergrösserung resultirt oder bei gegebener Vergrösserung ein etwas kleinerer Abstand der Linsen von einander als bei positiver Ocularlinse. Beide Umstände machen den Gebrauch derartiger Mikroskope vortheilhaft



(Fig. 73.)

für Zwecke wie das Präpariren unter mässigen Vergrösserungen (bis höchstens 100fach). Für die weit überwiegenden Anwendungsfälle des Mikroskop bedeutet die oben bezeichnete Art der Strahlenbegrenzung und die mit ihr verbundene Einschränkung des Sehfelds eine Erschwerniss, welche durch jene Vortheile in keiner Weise aufgehoben, ja kaum gemildert wird. Wir wollen daher diese Einrichtung des Mikroskops nicht weiter berücksichtigen, sondern den weiteren Betrachtungen diejenige mit collektivem Ocular als die normale und typische zu Grunde legen.

Man würde die genannten Uebelstände zwar vermeiden können, ohne den Vortheil, den aufrechte Bilder manchmal bieten, preiszugeben, indem man — wie beim Fernrohr — zwar ein dispansives Ocular anwendete (mit negativem f) aber ein solches, welches seinerseits nach Art des ganzen Mikroskop zusammengesetzt ist aus zwei Theilen, die ähnlich wie bei diesen Objektiv und Ocular repräsentiren (dies aber nur in Bezug auf die dioptrische Fundamentalwirkung nicht in Bezug auf die oben bezeichneten specifischen Functionen, in welchen vielmehr beide Theile Oculare vorstellen) und die beide collektiv sind, daher bei entsprechendem Abstand von einander negative Gesammtbrennweite und ausserhalb des Systems liegende Brennpunkte besitzen. Ein solches zusammengesetztes negatives (bildaufrichtendes) Ocular würde im wesentlichen ebenso wirken, wie ein entsprechendes collektives. Sein Augenpunkt würde im zugänglichen Theil des Raumes liegen, das Auge also mit ihm in Coincidenz gebracht werden können; das Bild würde an einer, ja sogar an zwei Stellen reell und in Folge dessen scharf begrenzbar sein und vom Auge in seiner ganzen Ausdehnung übersehbar. Doch werden solche Oculare wegen ihrer gewöhnlich 2—3fachen Länge und der etwa doppelten in ihnen wirksamen, daher auch partiell reflektirenden Anzahl von Flächen sehr selten verwendet.

Auf Grund der obigen Festsetzungen lässt sich nunmehr der Strahlengang im Mikroskop vollständig construiren: Das Objektiv entwirft von dem Objekt ein reelles vergrössertes Bild $O_1'O_2'$ nahe dem oder im vordern Brennpunkt des Oculars; das Ocular bildet dieses zum zweiten Mal nach $O_1''O_2''$ ab in einer Entfernung, die dessen Abstand von seinem vordern Brennpunkt, d. h. indirekt der Sehweite des Beobachters entspricht, jedenfalls aber in relativ grosser Entfernung von seinem hintern Brennpunkte. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen: in unendlicher Entfernung, da die Abweichungen von diesem Fall durch Einführung kleiner Correctionsglieder berücksichtigt werden können und das Wesen der Sache nicht berühren. Mit der Erzeugung des ersten Bildes F_1' in einer Entfernung Δ von etwa 200 *mm* vom hinteren Brennpunkt des Systems S_1 ist zunächst eine lineare Vergrösserung und damit eine Divergenzänderung in den abbildenden Büscheln verbunden, welche desto stärker ist, je kürzer die Brennweite von S_1 ist; denn es ist

$$\frac{y'}{y} = \beta = -\frac{\Delta}{f_1} \tag{4}$$

und, wenn die Bedingung aplanatischer Abbildung in diesem System erfüllt ist,

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}. \tag{5}$$

Je stärker also die vom Objektiv allein hervorgebrachte Linearvergrösserung ist, desto stärker ist auch die Reduction der Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel. Da man, wie wir später sehen werden, eine Zunahme der Objektivvergrösserung stets mit einer solchen der Apertur der einfallenden Büschel verbindet, so heben sich diese beiden Momente nahezu auf, insofern die Apertur der vom Objektiv austretenden, das erste Bild erzeugenden Büschel in allen Mikroskopen nahezu von gleicher Grösse oder wenigstens von gleicher Grössenordnung ist. Sie beträgt ungefähr $\frac{1}{20}$ (ca. 3°), ist also bereits absolut genommen sehr gering.

Mit der Abbildung durch das Ocular ist eine weitere Divergenzänderung der abbildenden Büschel verbunden, sei es dass dieselben parallelstrahlig gemacht werden (für ein auf unendlich accommodirtes Auge) sei es dass sie diejenige stets geringe Oeffnung behalten, welche der Sehweite des Auges und dessen Pupillengrösse entspricht (höchstens 1°). Für parallelstrahlig austretende Büschel ist diese Divergenzänderung bestimmt durch die Brennweite des Ocularsystems, indem gemäss der Definition derselben der halbe Querschnitt des austretenden Büschels p'' sich zum Sinus des halben Oeffnungswinkels der einfallenden verhält wie die Brennweite zur Einheit, d. h.

$$\frac{p''}{\sin u'} = \frac{p''}{u'} = f_2. \tag{6}$$

Insoweit würde die Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten Bestandtheilen noch nichts Specifisches bieten, was nicht auch mit jeder andern successiven Abbildung nothwendig verbunden wäre. Wenn wir aber den Gang der Hauptstrahlen im Mikroskop auf Grund der obigen Bestimmungen über die Lage der Pupillen betrachten, so bemerken wir, dass dieselben im Objektiv auf der Objektseite im allgemeinen sowohl divergirend als convergirend verlaufen können, beides aber, wie wir bemerkt haben, vortheilhaft nur unter geringen Winkeln. Auf der Bildseite werden dieselben aber nach dem Bilde hin stets divergiren, z. B. bei nahezu telecentrischer Einrichtung etwa von dem hinteren Brennpunkt F_1' des Objektivs aus. Um dieses Bild dem Auge in möglichster

Ausdehnung sichtbar zu machen, ist es wie wir früher gezeigt haben nothwendig, die Augenpupille in den Divergenzpunkt der Hauptstrahlen zu bringen, und da dies bei der Abbildung durch das Objektiv allein nicht ausführbar ist (es sei denn für ein stark übersichtiges Auge), so fällt dem Ocular als eine zweite und für seine Construction specifische Function die zu, die vom Objektiv aus divergirenden Hauptstrahlen in convergirende zu verwandeln und zwar nach einem Convergenzpunkt hin, welcher für das Auge zugänglich ist. Diese Function hat also das Ocular beim Fernrohr wie beim Mikroskop auch dann schon zu erfüllen, wenn mit demselben eine weitere Vergrösserung des vom Objektiv entworfenen Bildes gar nicht bezweckt und erzielt wird und dies ist der hauptsächliche Grund, aus welchem die einfache Dispansivlinse so wenig geeignet ist, als Ocular verwendet zu werden. Denn bei ihr ist mit der für die Bilderzeugung nothwendigen Divergenzvermehrung der bildformirenden Büschel gleichzeitig stets eine solche der Hauptstrahlen verbunden, ohne dass der Divergenzpunkt selbst in den zugänglichen Theilen des Bildraums übergeführt würde. Man mildert diesen Uebelstand, indem man dergl. Oculare von sehr kurzer Brennweite macht und gleichzeitig ihre Entfernung vom Objektiv relativ gering wählt. Alsdann liegt ihr hinterer Brennpunkt, wenn auch unterhalb der Ocularlinse, so doch — der Verringerung ihrer Dimension entsprechend — näher an derselben und die *A.-P.* als Bild der Objektivöffnung von jenem zweiten Brennpunkt desto weiter nach der Linse zu, je näher sich das Objektiv dem Ocular befindet.

Beim collektiven Ocular hingegen tritt gewöhnlich innerhalb desselben noch eine weitere Theilung der Functionen dahin ein, dass in einem Vordertheil (Collektivglas) der wesentliche Theil jener Divergenzänderung der Hauptstrahlen bewirkt, d. h. deren Divergenz in eine Convergenz verwandelt wird. Hierbei wird das vom Objektiv entworfene Bild in seiner Grösse entweder unverändert gelassen (RAMSDEN'sches Ocular) oder sogar verkleinert (HUYGHENS'sches Ocular); ausserdem kommt es in unerwünschte Nähe vom Augenpunkt zu liegen. Daher bewirkt dann eine zweite in diesem Augenpunkt oder nahe vor demselben befindliche Linse (die Augenlinse) die eigentliche Lupenwirkung, nämlich die Projection jenes Zwischenbildes $O_1{}^* O_2{}^*$ auf eine innerhalb der Sehweite gelegene Distanz, ohne dass die Divergenz der Hauptstrahlen in erheblichem Grade modificirt — oder auch diese eventuell nur in förderlichem Sinne, d. h. vermehrt — würde.

Die genannten beiden Modifikationen: die Divergenzänderung in den bildformirenden Strahlenbüscheln und diejenige der Axen (Hauptstrahlen) weisen den beiden Bestandtheilen des Mikroskops ihre Functionen in der früher angegebenen Weise bereits vollständig zu: das Objektiv nach Art eines Projectionssystems wirkend hat die Abbildung von Büscheln grossen Oeffnungswinkels zu vollziehen, und damit ist nach unseren früheren allgemeinen Festsetzungen von selbst gegeben, dass diese Abbildung sich nur auf ein gegen seine Brennweite kleines Flächenstück beziehen kann und dass sie in Folge dessen — je kleiner die Objektfläche mit desto grösserer Annäherung — in diesem, was die Maassverhältnisse betrifft, nach den Gesetzen der collinearen Abbildung erfolgt, also insbesondere ohne weiteres geometrische Aehnlichkeit des Bildes mit dem Objekte mit sich bringt. Das Ocular hat es mit sehr viel engeren Strahlenbüscheln zu thun und ist in Folge dessen im Stande, ein im Verhältniss zu seiner Brennweite grösseres Objekt, d. h. einen grösseren Theil des vom Objektiv entworfenen Bildes, abzubilden, lässt aber z. B. für die Anomalien der Vergrösserung völlig freien Spielraum.

Anforderungen an die dioptrischen Leistungen von Objektiv und Ocular.

In dem Objektiv bezw. dem von ihm entworfenen Bilde steht daher die Erfüllung der Bedingungen des Aplanatismus in erster Linie also

1) die Aufhebung der sphärischen Aberration in den conjugirten Punkten O und O',
2) die Herstellung constanten Sinusverhältnisses in den abbildenden Büscheln auf der Objekt- und Bildseite,
3) bei dioptrischen Systemen die Aufhebung der chromatischen Focusdifferenz (Coincidenz der Bildpunkte für verschiedene Farbe an derselben Stelle der Axe) und dies, wenn möglich,
4) unter gleichzeitiger Aufhebung der sphärischen Aberration auch für diese verschiedenen Wellenlängen (Beseitigung der chromatischen Differenz der sphärischen Aberration) und
5) Herstellung des Aplanatismus für verschiedene Wellenlängen.

Beim Ocular andererseits werden hauptsächlich die auf die ausseraxialen Bildpunkte bezüglichen Abbildungsfehler in Betracht kommen und demnach aufzuheben sein, also

1) die Anomalien der Vergrösserung (Disproportionalität der Vergrösserung in verschiedenen Theilen des Sehfeldes, Distortion des Bildes),
2) die Aufhebung des Astigmatismus und eventuell auch des Coma in den schiefen Büscheln,
3) die Herstellung gleicher Vergrösserung (Brennweite) für die verschiedenen Farben und dies eventuell sogar unter Compensation der in dieser Beziehung im Objektivbild vorhandenen Defekte.

(Es würde nach Analogie der für die Abbildung durch Lupen geltenden Bedingungen hier noch die Aufhebung der Bildwölbung anzuführen sein. Wie aber eine genauere Betrachtung zeigt, sind die vom Objektiv bei grosser Apertur desselben entworfenen Bilder in einiger Entfernung von der Axe meist schon so stark gewölbt, dass eine ebene Abbildung durch das Ocular allein ohne Nutzen wäre, eine Compensation aber jenes Fehlers durch das Ocular ausserhalb des Bereiches der Möglichkeit liegt.)

Die Aberrationen weitgeöffneter Büschel.

Entsprechend der grossen Apertur der Büschel, welche auf der Objektseite des Mikroskops zur Wirkung kommen, gewinnen in dem vom Objektiv entworfenen Bilde alle von dieser Apertur abhängigen Aberrationen unvergleichlich grössere Bedeutung als in irgend einem andern optischen System; denn während in photographischen Objektiven und im Fernrohr die Oeffnung höchstens den dritten Theil der Brennweite beträgt, ist sie in den modernen Mikroskop-Objektiven umgekehrt bis auf das 2·5- ja selbst 3-fache jener gesteigert. Für die Construction des Mikroskops und die Beurtheilung der von ihm entworfenen Bilder sind daher die einfachen Begriffe von sphärischer und chromatischer Aberration, wie sie aus den Näherungsformeln — unter Berücksichtigung nur des ersten Gliedes der Reihenentwicklung — entnommen werden und vor der Existenz dieser starken Systeme allein Anwendung fanden, durchaus unzulänglich. Es gewinnen vielmehr weitaus überwiegende Bedeutung die von den höheren Potenzen jener Reihen-Entwicklung abhängigen Glieder der Aberration, die in ihrem Anwachsen, mit

der zunehmenden Neigung der Strahlen gegen die Axe, einen sehr ungleichen Gang befolgen.

Eine wirkliche Aufhebung ist nur für die beiden ersten Glieder möglich, wie wir dies oben (pag. 94 ff.) gezeigt haben. Eine solche würde aber in einem Mikroskopobjektiv von auch nur mässiger Apertur gar nichts besagen, da dann im Allgemeinen die von den höheren Potenzen abhängigen Glieder immer noch Beträge haben, wie sie z. B. mit Fernrohrobjektiven (von Apertur 0·1 etwa) in den ersten Gliedern nicht einmal absichtlich erreichbar sind. Sobald der Oeffnungswinkel über einen ganz geringen Betrag hinausgeht, kann die Ausgleichung der sphärischen Aberration nicht anders erfolgen als dadurch, dass die nicht aufhebbaren höheren Glieder durch absichtlich herbeigeführte Reste der niederen compensirt werden — ein Ausgleichungsverfahren welches wir pag. 95 näher besprochen haben und bei welchem nur noch die trigonometrische Verfolgung bezw. experimentelle Isolirung genügend vieler das System in verschiedenen Zonen (unter verschiedener Anfangsneigung) durchsetzender Strahlen oder Partialbüschel die nöthigen Unterlagen für die Beurtheilung des Effektes bietet.

Das Anwachsen des unvermeidlichen Restes, welchen diese Compensation wegen des ungleichen Ganges der einzelnen Theile nothwendig übrig lässt bestimmt die Grenze, welche dem Oeffnungswinkel gesetzt werden muss, wenn jenes Deficit im mikroskopischen Bilde ohne schädliche Wirkung bleiben soll.

Aus dem gleichen Grunde — wegen der Höhe der wirksamen Apertur — ist von den chromatischen Abweichungen von geringerer Bedeutung die fundamentale, aus der Variation aller Abbildungsfaktoren mit der Wellenlänge entspringende Focusdifferenz für verschiedene Farben. Diese ist ja, wie wir früher sahen, schon mit einem aus 2 Einzellinsen zusammengesetzten System stets aufhebbar. Auch das secundäre Spectrum würde sich — als Focusdifferenz irgend einer Zone — stets heben lassen, wenn geeignete Substanzen als Material für die Linsen zur Verfügung stehen. Von wesentlich grösserem Einfluss auf die Bildqualität ist vielmehr die früher (pag. 133) als chromatische Differenz der sphärischen Aberration bezeichnete Variation der letzteren mit der Wellenänge. Ihre Beseitigung — früher mit den zur Verfügung stehenden Glasarten unausführbar, erst seit 1886 durch die von der Jenaer Glasschmelzerei hergestellten neuen Gläser möglich geworden — bildete eins der wesentlichsten Hindernisse für eine gute Wirkung der Systeme grösseren Oeffnungswinkels. Wir haben dieselbe nach ihrem allgemeinen Charakter a. a. O. bereits gekennzeichnet. Auf die sphärische Aberration bezogen wird das Resultat dies, dass wenn dieselbe für eine Wellenlänge im Allgemeinen aufgehoben (oder doch möglichst ausgeglichen ist) für kürzere Wellenlänge sphärische Ueber-, für längere Untercorrection in dem Bildpunkte besteht. Fassten wir diesen Defekt, wie früher als eine sphärische (Zonen-)Differenz der chromatischen Aberration auf, so war ersichtlich, dass, mangels ihrer vollständigen Aufhebung ihr Einfluss auf die Bildqualität am meisten gemildert wurde, wenn man die beste Correction (Aufhebung der Focusdifferenz) in eine zwischen Rand und Mitte des System befindliche Zone verlegte, d. h. sie in einem unter mittlerem Einfallswinkel vom Objekt aus divergirenden Partialbüschel bewirkt. Ist dies der Fall so sind die unter grösseren Einfallswinkeln verlaufenden Strahlen chromatisch über-, die unter geringeren Winkeln das System passirenden chromatisch untercorrigirt. Erst in den »apochromatischen« nach Berechnungen von ABBE durch die ZEISS'sche Werkstätte in Jena hergestellten Objektiven ist dieser Defekt und zugleich das secundäre Spectrum — folglich auch dieses für alle Zonen — beseitigt worden.

Aus diesen Ueberlegungen ergiebt sich als ein allgemeines Resultat, dass die Aberrationen, welche dem Zustandekommen scharfer Bildpunkte eines guten Bildes in der Axe — und in ihrer unmittelbaren Nähe — hinderlich sind wie sie ihre Quelle besitzen so auch die Möglichkeit ihrer Compensation nur bieten in denjenigen Theilen des Systems, wo die von je einem Objektpunkt divergirenden Strahlen grosse Neigungswinkel mit der Axe bilden, Neigungswinkel von gleicher Grössenordnung wie im Objektraum oder wie an der Stelle ihrer maximalen Divergenz. Dies ist — wenn das Objektiv auch nur eine mässige Divergenzänderung (Vergrösserung) herbeiführt, der Fall nur in diesem selbst und auch in ihm nur in seinen vordersten (untersten) Linsen. In dem Ocular, in welches die Büschel schon als relativ und absolut enge eintreten, und welches sie als noch engere verlassen, verlieren in diesen Büscheln die wichtigsten Faktoren der Bilddeterioation gänzlich den Boden. Bei so geringen Oeffnungswinkeln ist innerhalb derselben die Möglichkeit eines erheblichen Variirens der Strahlenvereinigung überhaupt — noch viel mehr die einer variablen Abstufung derselben — und in Folge dessen auch die Möglichkeit einer Compensation derartiger im Objektivbild etwa noch vorhandener Defekte vollständig ausgeschlossen. Die geringen hier erreichbaren Gesammtbeträge der (ersten Glieder der) sphärischen und chromatischen Abweichung sind allemal schon im Objektiv durch minimale Aenderungen seines Baues aufhebbar und werden daher im Allgemeinen auch am besten schon in diesem compensirt.

Umgekehrt verhält es sich mit den Eigenschaften bezw. Fehlern der Bilder ausser der Axe. Für diese, ihr Anwachsen, Variabilität und Compensation, fehlt in dem Objektiv — wegen der geringen Divergenzänderung der Hauptstrahlen in ihm — die praktische Unterlage. Nur die chromatische Differenz der Vergrösserungen (Brennweiten) kann in seinem Bilde merklich werden. Aber es kann dann sowohl diese als etwa restirende Mängel in der Orthoskopie im Ocular gehoben werden (beide jedoch auch nur, wenn sie constant sind für alle Zonen des Objektivs!) welches seinerseits bei der grossen Verschiedenheit und dem grossen Betrage der Neigungen der Hauptstrahlen in ihm auch genügenden Spielraum für die Modifikationen derselben bietet. —

Wenn es möglich wäre, die Aberrationen, insbondere diejenigen des Objektivs für Axenpunkte, vollständig, restlos aufzuheben, und wenn ferner die Technik der Herstellung vollkommner Flächen, vollkommen correkter Centrirung und Distanzirung derselben keine Grenzen hätte, so würde auch nach den vorstehend erörterten Gesichtspunkten die Vertheilung der optischen Fundamentalwirkung und damit der specifischen Funktionen auf Objektiv und Ocular, zwar an sich nothwendig, aber ihrem Maasse nach völlig unbestimmt bleiben. Eine vorgeschriebene Brennweite und Vergrösserung würde mit ganz gleichem Fug und Recht auf die verschiedenste Weise erreicht werden können durch Verfügung über die Einzelbrennweiten von Objektiv und Ocular sowie deren gegenseitigem Abstand. Sind je zwei dieser Elemente gegeben, so bestimmt sich aus Gleichung (1) ohne weiteres die Dimension des dritten.

Thatsächlich gebietet aber das Vorhandensein jener beiden Defekte — die mit der fortschreitenden Entwicklung der praktischen Optik nach Theorie und Technik wohl mehr und mehr reducirt aber natürlich niemals völlig beseitigt werden können — gewisse Einschränkungen und giebt bestimmte Normen für das Maass der Wirkungsvertheilung an die Hand. Die Unterlagen für eine solche werden gegeben einerseits natürlich durch eine genaue Kenntniss der Technik

und ihrer Leistungsfähigkeit. Es zeigt sich, dass die Anforderungen, die an das Mikroskop nach der dioptrischen Seite hin gestellt werden, bereits bis an die Grenzen des von Menschenhänden zu leistenden führen, daher bei Erwägungeu der vorliegenden Art volle Berücksichtigung verdienen. Den Schlüssel aber für diese optischen Leistungen bezw. Anforderungen bieten mit und neben den rein dioptrischen Momenten

Der Begriff der **Apertur** in Verbindung mit dem Sinussatz.

Wir haben von demselben schon wiederholt, sei es in seinem allgemeinen, sei es in seinem strengeren Maasse Gebrauch gemacht.

1) Wir sahen pag. 90, dass die sphärische, und ebenso pag. 127 dass die chromatische Aberration — rationell bemessen nach ihrem Einfluss auf die Sichtbarkeit des Objektes — proportional ist Potenzen des Produkts aus halbem Oeffnungswinkel der vom Objekt aus oder nach dem Bilde hin divergirenden Büschel (bei unendlich fernem Objekt statt des Oeffnungswinkels das Verhältniss von halber linearer Oeffnung und Brennweite) und Brechungsexponent des Objekt- bezw. Bildmediums. Dort blieb wegen der absoluten Kleinheit des Winkels allerdings noch unbestimmt und willkürlich, ob man denselben nach seinem Sinus, der Tangente oder dem Bogenwerth selbst zu bemessen habe. Hingegen fanden wir weiterhin

2) dass die Bedingung einer Abbildung mittels weitgeöffneter Büschel bestand in der Herstellung constanten Verhältnisses der Sinus conjugirter Strahlaxen (halber Oeffnungs)winkel innerhalb der ganzen Büschelöffnung. Dieses Verhältniss multiplicirt mit den Brechungsexponenten der zugehörigen Medien, d. h. das Verhältniss der numerischen Aperturen, bemaass die lineare Vergrösserung

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \frac{a}{a'} = \beta.$$

3) Eine unmittelbare Consequenz dieses Sinussatzes war, dass die lineare Halböffnung p' eines aplanatisch abbildenden Büschels in der einen Brennebene des Systems — bis auf kleine Correctionsglieder — gleich war dem Produkt von Apertur des Büschels und Brennweite des Systems auf der anderen Seite des Systems

$$p' = a \cdot f' \quad \text{und} \quad p = a' \cdot f.$$

4) Dieser Satz gab dann die Unterlage für die Bestimmung der Helligkeitsverhältnisse der Bilder in optischen Systemen. Die Helligkeit eines Bildes zeigte sich, bei gegebener Vergrösserung proportional dem Quadrate der Apertur der wirksamen Büschel

$$H = k \cdot a^2 \quad \text{bezw.} = k\, a'^2.$$

5) Es zeigte sich endlich, dass das Bild, was den Einfluss der Strahlenbegrenzung auf dasselbe betrifft, sich in allen Stücken genau so verhält, als wenn das von diesem Einfluss frei gedachte Bild durch ein physisches Diaphragma betrachtet würde, dessen freie Oeffnung nach Grösse und Lage mit der Austrittspupille ($2p'$) des Systems zusammenfällt. Dieser Satz gab ausser der obigen Bilderzeugung Bestimmung der Helligkeit auch die Unterlagen für diejenige des Processes der nach ihrem physischen Charakter als eines Interferenzphänomens — sei es bei selbst-, sei es bei indirekt strahlenden Objekten — dessen wir auch schon gedacht haben.

Den späteren Beweisen und näheren Ausführungen nochmals vorgreifend, führen wir von deren Ergebnissen hier die folgenden für unsere nächsten Betrachtungen wesentlichen an:

a) bei selbstleuchtenden Objekten bildet die Apertur das Maass für die Grösse des Lichtscheibchens, als welches jeder Punkt des Objektes durch die Beugungswirkung der Oeffnung (Begrenzung der bildformirenden Wellenfläche) im Bilde dargestellt wird — diese Grösse des Scheibchens angular gemessen, vom hinteren Knotenpunkte des Systems aus. In Folge dessen bildet die Apertur hier ohne weiteres das Maass für das sogen. Definitions- und für das Auflösungs- (Unterscheidungs-) vermögen des Systems.

b) Bei indirekt strahlenden, mittelst auf- oder durchfallenden Lichts beleuchteten, dieses Licht reflektirenden oder durchlassenden Objekten bildet die Apertur die Begrenzung des von diesen Objekten ausgehenden Interferenz- bezw. Beugungseffektes. Die genauere Analyse zeigt, dass auch dann ein einzelner Objektpunkt und die Punkte der Begrenzung eines nicht weiter differenzirten Objektflächenstücks abgebildet werden als Scheibchen, in welchen die Lichtabstufung von der Mitte nach dem Rande zwar nicht demselben aber einem ähnlichen Gesetze folgt, wie bei einem selbstleuchtenden Punkte. Die Grenze der Auflösbarkeit einer regelmässigen Struktur bestimmt sich bei sogen. schiefer Beleuchtung nach derselben Gleichung, welche für eine ebensolche selbstleuchtende Struktur gilt, dass nämlich die Feinheit (Elementdistanz) d dieser Struktur mit der Apertur a und der Wellenlänge des wirksamen Lichtes λ in dem Zusammenhang steht, dass

$$d = \frac{\lambda}{2a}.$$

Bei unregelmässigen Strukturen dieser Art bestimmt die Apertur ebenfalls das Maass der Aehnlichkeit oder Unähnlichkeit, mit welcher sie im Bilde wiedergegeben werden, jedoch nach weniger einfachen Regeln.

Nur noch einige weitere Schritte führen uns jetzt zu dem Standpunkt, von welchem aus wir das Maass und die Grenzen der Wirkung des zusammengesetzten Mikroskops — und nach ganz gleichen Normen diejenigen des Fernrohrs — als eines Ganzen wie in seinen einzelnen Bestandtheilen vollständig zu übersehen vermögen.

Die erste Grundlage für die Construction eines Instruments bilden die Anforderungen, die man an seine Gesammtleistung stellt, also beim Mikroskop die Feinheit des Details, welches mit demselben erkennbar sein soll. Sei dieselbe gegeben durch den Abstand d der engsten von dem Mikroskop noch getrennt abzubildenden Strukturelemente, so folgt aus diesem nach dem eben angedeuteten unmittelbar die Apertur der vom Objekt aus divergirenden Büschel, welche das System aufzunehmen im Stande sein muss Damit andererseits das Bild der im Objekt um d entfernten Structurelemente auch vom Auge trennbar sei, muss es diesem unter einem Sehwinkel dargeboten werden, welcher dem Unterscheidungsvermögen ε des Auges entspricht, also unter einem Winkel von ca. 2'. Hieraus ergiebt sich die Vergrösserung, welche das Instrument liefern muss, beim Mikroskop also auch dessen Gesammtbrennweite f'. Endlich ist zu berücksichtigen, dass das Bild eines Objekts durch ein optisches Instrument niemals ein vollkommenes ist, sondern durch die nicht aufhebbaren Aberrationsreste mehr oder minder verundeutlicht wird. Die Forderung, dass die Zerstreuungskreise der verschiedenen im System übrig gebliebenen Aberrationen nicht ihrerseits das Bild verwischen, d. h. zusammen höchstens den Betrag des physiologischen Grenzwinkels ε erreichen dürfen, giebt nun den Maassstab für die Vertheilung der dioptrischen Gesammtleistung auf die drei Faktoren, Objektivstärke, Tubuslänge und Ocularstärke, aus denen sie sich zusammensetzt.

Schematische Zerlegung des Mikroskops.

Die dioptrische Vollkommenheit der Abbildung von Punkten auf und nahe der Axe hängt, wie die vorangegangenen Erörterungen gezeigt haben, im wesentlichen nur von derjenigen ab, die das Objektiv des Mikroskops (und ganz ebenso liegen die Verhältnisse beim Fernrohr) für sich allein ergiebt bezw. zulässt. Die Beurtheilung derselben würde nun gerade beim Mikroskop sehr erschwert werden, wenn man sie unter dem Gesichtspunkt durchführen wollte, unter welchem sich die Wirkung des Objektivs zunächst und unmittelbar darbietet und wenn man bei derselben den für das Wesen der Sache rein zufälligen Umständen Rechnung tragen wollte, welche der Gebrauch des Mikroskops mit sich bringt.

Das Objektiv — so hatten wir zur Erläuterung seiner Wirkung in Uebereinstimmung mit dem augenscheinlichen thatsächlichen Sachverhalt gesagt — entwirft ein reelles vergrössertes Bild des Objekts, welches vom Ocular — dieses wie eine Lupe wirkend — weiter vergrössert und in Bezug auf den Strahlengang sonst umgestaltet wird. In der Gleichung

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} = \frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{1}{f_2'} \tag{7}$$

bezw.

$$N = \frac{l}{f'} = \frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{l}{f_2'}, \tag{7a}$$

welche den Effekt der Zusammensetzung des Instruments aus den Wirkungen seiner beiden Bestandtheile ausdrückt, konnte dementsprechend die Grösse $\frac{\Delta}{f_1'}$ als die dem Bildabstand Δ und der Stärke $1/f_1'$ entsprechende lineare Vergrösserung des Objekts durch das Objektiv, die Grösse $1/f_2'$ bezw. l/f_2' als die Lupenvergrösserung des Oculars aufgefasst und die resultirende Wirkung in anscheinend sehr natürlicher Weise als Produkt ihrer beiden wesentlichen Faktoren dargestellt werden.

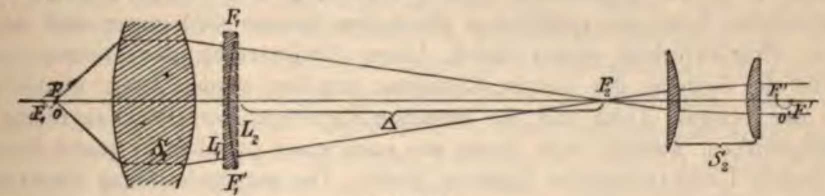
Bei der Bemessung der Abbildungsfehler, welche das Objektiv für sich allein mit sich bringt, würde nun die Berücksichtigung der von Fall zu Fall, ja von Land zu Land innerhalb ziemlich weiter Grenzen (150—300 Millim.) schwankenden Tubuslänge, d. h. Projectionsdistanz des Bildes eine erhebliche Erschwerniss bilden, ja sogar geradezu den wesentlichen Kern des Sachverhalts verdecken, welcher doch offenbar darin besteht, dass jene Projectionsdistanz — zum mindesten bei den stärkeren Systemen — stets sehr gross ist gegen deren Brennweite. So wichtig daher auch *in praxi* die genaue Berücksichtigung der Bilddistanz (d. h. der besonderen Lage des zur Benützung zu bringenden aplanatischen Punktepaares des Systems) gerade bei den stärkeren Systemen von grosser Apertur ist, so bietet sich für eine Uebersicht über das Wesentliche und Typische des Sachverhalts naturgemäss die Betrachtung des Grenzfalls dar, dass jene Bilddistanz unendlich gross, also das Objekt in den vorderen Brennpunkt des Systems gestellt sei.[1]

»Zu Folge dieser besonderen Art schematischer Zerlegung des Mikroskops besteht also der erste Akt im Abbildungsvorgang nicht in der Erzeugung des umgekehrten reellen Bildes vor oder in dem Ocular, sondern vielmehr in der

[1]) Abbe, Beiträge etc. l. c. pag. 422. Wir entnehmen dieser Darstellung im folgenden einige Stellen im Wortlaute.

Erzeugung eines unendlich entfernten virtuellen Bildes; der zweite Akt aber umfasst dessen fernere Abbildung unter dem Gesichtswinkels des Ocularfeldes und in der Weite des deutlichen Sehns und kommt durch eine letzte Brechung der Strahlen im Objektiv und durch die verschiedenen Brechungen im Ocular zu Stande. Den ersteren kann man die Lupenwirkung des Objektivs nennen, weil dieser Theil der Leistung vollkommen identisch ist mit derjenigen einer gewöhnlichen Lupe für ein fernsichtiges Auge; der zweite Theil aber entspricht offenbar, alle einzelnen Veränderungen des Strahlenganges zusammengefasst, der Wirkung eines Fernrohrs mit — absolut und relativ zur Brennweite — kleiner Objektivöffnung, welchem das vorher erwähnte unendlich entfernte virtuelle Bild als Objekt dient. — — Das hier dargelegte Ineinandergreifen von Objektiv- und Ocularfunction in Form von Lupenwirkung und Fernrohrwirkung muss als die allgemeingültige Charakteristik des zusammengesetzten Mikroskops hingestellt werden. Auf Grund derselben beantworten sich zahlreiche für die Theorie des Mikroskops und für dessen rationelle Construction gleich wichtige Fragen, insbesondere die nach dem Sitz der verschiedenen Fehlerquellen, nach den Mitteln zu ihrer Beseitigung, nach der Grenze der unter gegebenen Bedingungen möglichen Vollkommenheit, nach dem Einfluss, welchen Brennweite des Objektivs, Tubuslänge und Ocularstärke auf die Qualität des Gesammteffekts üben« u. s. w.

Man wird hiernach zunächst daran denken, von dem Objektiv selbst denjenigen Theil seiner Brechungswirkung abzusondern, welcher die Ueberführung des vorher aus einem divergenten in ein parallelstrahliges verwandelten Büschels in ein solches von schwacher Convergenz zu leisten hat und diesen Theil — etwa die letzte Fläche des Objektivs — als zum Ocular (Fernrohr) gehörig anzusehen. Es würden jedoch bei einer derartig vorgenommenen Scheidung der Bestandtheile des Mikroskops die Maassverhältnisse ihrer Abbildungsfaktoren ein wenig geändert. Man kann nun auch diese letzteren streng festhalten, wenn man folgende Fiction annimmt (Fig. 74).



(Fig 74.)

In die hintere (obere) Brennebene F_1' des Objektivs sei eine dünne planparelle Platte gesetzt, — welche natürlich weder die Lage noch die Grösse des vom Objektiv entworfenen Bildes irgendwie ändert. Diese Platte bestehe aus einer nach dem Objektiv zu gelegenen Planconcavlinse L_1, von der Brennweite $-\Delta$ und einer nach dem Ocular hin gelegenen Planconvexlinse von der Brennweite $+\Delta$. Die erstere ändert die Brennweite des Objektivs, wie man sich leicht überzeugt, gar nicht, verschiebt aber dessen vorderen Brennpunkt F_1 in den des ganzen Systems F, d. h. in den Objektpunkt. Die Linse L_2 stellt das Objektiv des Fernrohrs ($L_2 + S_2$) vor, zu welchem S_2 ebenfalls als Ocular gehört. Die (Lupen-) Vergrösserung, welche das Objektivsystem ($S_1 + L_1$) bewirkt, ist nach unseren früheren Festsetzungen gleich dem Reciproken seiner hinteren Brennweite

$$V_1 = \frac{tang\, w_1'}{y} = \frac{1}{f_1'}. \tag{8}$$

wenn w_1' die Hälfte des Winkels ist, unter welchem durch dieses Objektiv hindurch ein Objekt von der halben Grösse y erscheint.

Die (Angular)-Vergrösserung des Fernrohrs von der Objektivbrennweite Δ und der Ocularbrennweite f_2' ist nach pag. 49

$$\gamma = V_2 = \frac{\mathrm{tang}\, w_2'}{\mathrm{tang}\, w_1'} = \frac{\mathrm{tang}\, w'}{\mathrm{tang}\, w_1'} = \frac{\Delta}{f_2'}; \tag{9}$$

wenn $w_2' = w'$ der Winkel ist, unter welchem y, durch das ganze Mikroskop gesehen, erscheint. Hiernach ist also die Gesammtvergrösserung, welche das Mikroskop liefert

$$V = \frac{\mathrm{tang}\, w'}{y} = \frac{\mathrm{tang}\, w_1'}{y} \cdot \frac{\mathrm{tang}\, w'}{\mathrm{tang}\, w_1'} = V_1 V_2 = \left(\frac{1}{f_1'}\right)\left(\frac{\Delta}{f_2'}\right) \tag{10}$$

bezw.

$$N = \left(\frac{l}{f_1'}\right)\left(\frac{\Delta}{f_2'}\right) \tag{10a}$$

ganz ebenso wie vorher (Gl. 7 und 7a), nur unter andersartiger Zusammenfassung und Deutung der Faktoren.

Charakter der uncompensirten Aberrationsreste.

Diese letztere Betrachtung lässt noch deutlicher als die entsprechenden früheren die dort gekennzeichneten specifischen Functionen von Objektiv und Ocular hervortreten. Aus ihr ergiebt sich vor allem, dass die für die Correctheit der Abbildung in der Mitte des Sehfeldes und damit für das mögliche Maximum der Leistung maassgebenden Faktoren — nämlich die chromatische und die sphärische Aberration — allein in der Construction der Objektive wurzeln und dass **die Einrichtung der Oculare auf jene überhaupt keinen irgend merklichen Einfluss gewinnen kann.**

Denn was zunächst die **sphärische Aberration** betrifft, so zeigt eine genauere Discussion derselben, in Ergänzung der von uns an früherer Stelle durchgeführten, dass, wie verschieden auch im einzelnen Falle der thatsächliche Verlauf der Strahlen in der Nähe ihres ideellen Vereinigungspunktes, d. h. wie verschieden auch ihrem Betrage und Gange nach die nicht compensirten Reste der sphärischen Aberration höherer Ordnungen sein mögen, jenem Strahlenverlauf immer durch blosse Veränderung der Distanz zweier Linsen des Systems der gleiche Charakter gegeben werden kann, nämlich so, dass der centrale Theil und die äusserste Randzone des Objektivs richtig zusammenwirken, während von ihnen aus nach einer zwischengelegenen Zone zu wachsende **Ueber**correction bestehen bleibt. Der maximale Betrag dieser kann füglich als Maass für die uncompensirt gebliebenen Aberrationsreste (»Zonen«) gelten. Zugleich aber zeigt sich, dass kein äusseres Hilfsmittel eine solche typische Correctionsdifferenz, wo sie einmal vorliegt, beseitigen oder auch nur vermindern kann. Weil sie in den Krümmungs- und Brechungsverhältnissen der untersten Linsen des Objektivs wurzelt — in welchen die Büschel noch grosse Oeffnungen besitzen und entsprechend grossen Spielraum für das Entstehen und die Compensation von beträchtlichen Aberrationen höherer Ordnung bieten — leisten ihr gegenüber alle Vorrichtungen, durch welche man auf ihre Correction hat hinwirken wollen (besondere Correctionsgläser oberhalb des Objektivs oder Oculare von besonderer Construction) im günstigsten Falle nur dasselbe, was auch eine Veränderung der Linsenabstände möglichmacht. Sie gestatten, den vorhandenen Aberrationsrest zwischen Mitte und Rand der freien Oeffnung gleichsam hin- und herzuschieben und auf diese Weise irgend **eine einzelne Zone des Objektivs auf Kosten der übrigen** mehr oder minder aberrationsfrei zu machen. Durch solche Hilfsmittel kann daher die wirkliche Leistungsfähigkeit des Mikroskops niemals erhöht werden. Jene Einrichtungen

stützen sich auf einen Begriff der sphärischen Aberration der — weil er nur Spielraum lässt für die einfache Alternative: übercorrigirt und untercorrigirt — mit sammt der ganzen darauf gebauten Theorie der aplanatischen Brennpunkte gegenüber den heutigen stärkeren Mikroskopen durchaus gegenstandslos ist. Alles was sie bewirken können, ist bei richtiger Construction des Objektivs auch schon in diesem selbst zu erreichen, und alles, was hier nicht zu erreichen ist oder in einer mangelhaften Construction nicht erreicht worden ist, kann auch durch jene Vorrichtungen nicht erreicht werden.

Ganz analoge Betrachtungen finden Anwendung auf die chromatischen Abweichungen. Wir wir schon hervorhoben, sind es nicht allein diejenigen Focusdifferenzen, welche, der Dispersion und deren ungleichförmigem Gang in den Crown- und Flintgläsern entsprechend, die abbildenden Strahlenkegel als Ganzes treffen, — die eigentliche chromatische Aberration oder das primäre und deren höheres Glied, das sogen. secundäre Spectrum — welche hier zur Geltung kommen und Berücksichtigung fordern, sondern ebenso sehr die Ungleichheit der Vereinigungsweiten verschiedenfarbiger Strahlen für verschiedene Neigung derselben innerhalb des Oeffnungswinkels d. h. die chromatische Differenz der sphärischen Aberration. Dieselbe äussert sich, wie wir früher (pag. 133) fanden, darin, dass, wenn ein System für eine mittlere Zone chromatisch bestmöglich corrigirt ist, dann nach dem Rande zu chromatische Ueber-, nach der Axe hin chromatische Untercorrection besteht. Während die ersterwähnten (primären und secundären) Farbenabweichungen bei correcter Construction sich entweder ganz heben oder doch wenigstens fast unmerklich machen lassen, hat sich diese zweite Fehlerquelle, wie wir ebenfalls schon hervorhoben, erst mit den neuerdings der Technik seitens der Jenaer Schmelzerei zur Verfügung gestellten Gläsern überhaupt beseitigen lassen. Macht man von diesen Materialien nicht den nothwendigen umfassenden Gebrauch oder scheut sich der Constructeur vor der Complicirtheit und Empfindlichkeit des Aufbaues, den starke Linsensysteme behufs Beseitigung jenes Defekts erhalten müssen, so ist diese Beseitigung ebenfalls nicht mehr in einem anderen Theile des Mikroskops, speciell im Oculare möglich, aus Gründen, die den bei der sphärischen Aberration geltend gemachten ganz entsprechen. Auch hier lässt sich im Objektivsystem durch eine relative Lagenänderung seiner Bestandtheile nur eine Verschiebung der Zone günstigster Farbencorrectur — nach der Mitte oder nach dem Rand zu — erreichen. Durch irgend welche Hilfsapparate an Stellen, wo die Strahlenbüschel bereits eng sind kann man aber selbst die Lage jener günstigsten Zone kaum beeinflussen, geschweige denn eine Minderung in dem wahren Betrage jenes Defektes herbeiführen.

Ganz das gleiche endlich ist in Bezug auf die Bedingung der Abbildung eines axialen Flächenelements, die des constanten Sinusverhältnisses zu sagen. (Hingegen fällt die chromatische Variation desselben, wenn das Verhältniss selbst für je eine Farbe constant ist unter eine andere Kategorie von Abbildungsanomalien.)

Verhältniss des Oculars zum Objektiv in Bezug auf Aberrationsreste.

Gegenüber diesen in der Focalwirkung des Objektivs begründeten Abbildungsfehlern kann der ganze Ocularapparat des Mikroskops — von groben Verstössen in der Construction natürlich abgesehen — in Bezug auf dieselben als praktisch vollkommen fehlerfrei angesehen werden und zwar in allen wesentlichen Punkten auch dann, wenn nur die einfachsten unter den bekannten Einrichtungen in Anwendung

kommen. Hieraus folgt, dass die mögliche Höhe der Leistung beim Mikroskop allein in der Construction der Objektive wurzelt und dass keine denkbare Vervollkommnung der Oculare sie in irgend einem wesentlichen Punkte beeinflussen kann; ferner aber auch, dass die besonderen Umstände, unter welchen der Ocularapparat fungiren mag, namentlich die Art, wie die Vergrösserung durch die Länge des Tubus und die Stärke des Oculars bewirkt wird innerhalb des praktisch in Betracht kommenden Spielraums vollkommen gleichgültig bleiben und — richtige Anpassung der Objektive an die einmal angenommenen Verhältnisse vorausgesetzt — die erreichbare Höhe der Leistung durchaus nicht berühren. Das Teleskop, welches die Ocularwirkung ausübt ist, wie schon erwähnt, in jedem Falle ein solches von verhältnissmässig kleinen absoluten Dimensionen (seine Objektivöffnung höchstens 15 *mm*, und gerade bei stärkeren Mikroskopsystemen auf 3 *mm* und noch weniger beschränkt) und seine Objektivbrennweite ist stets ein sehr grosses Vielfaches jener Oeffnung (mindestens das 10-, bei starken Mikroskopobjektiven aber das 20-, ja 40 und selbst 80fache derselben). Aus Gründen, die wir bei der Besprechung des Teleskops noch besonders namhaft machen werden, die sich aber auch schon durch eine blosse Umkehrung der obigen Betrachtungen über das Mikroskop gewinnen lassen, kann in einem Teleskop derartiger Einrichtung irgend welche besondere Focalwirkung in der Axe überhaupt nicht erzielt werden. Die Abbildung paraxialer Büschel und Objektpunkte geschieht in ihm so gut wie abweichungsfrei nach den für solche geltenden Fundamentalgesetzen der Dioptrik.

Rationelles Verhältniss zwischen Unterscheidungsvermögen, Apertur und Vergrösserung des ganzen Mikroskops.

Im Hinblick auf diese Resultate gewinnt die oben durchgeführte Grenzbestimmung in Bezug auf Objektiv- und Ocularfunction beim Mikroskop und das auf sie gegründete Zerlegungsschema eine besondere Tragweite. Alle Abbildungsfehler, die überhaupt die Wirkung beeinflussen, finden ihren vollständigen Ausdruck schon in der Beschaffenheit des unendlich entfernten virtuellen Bildes, welches das Objektiv, nach Art einer Lupe für fernsichtiges Auge wirkend, vom Objekt erzeugt. Diesem gegenüber spielt der Ocularapparat, wie er sich aus Tubus und den eigentlichen Ocularlinsen zusammensetzt, die Rolle eines indifferenten Vergrösserungsmechanismus, der, nach Art eines Fernrohrs wirkend nur dazu dient, jenes Objektivbild dem beobachtenden Auge auf den erforderlichen Sehwinkel auszubreiten, ohne dabei seinem Inhalte irgend etwas hinzuzufügen oder von demselben irgend etwas hinwegzunehmen.

Dieser Inhalt selbst aber ist nach den früher gemachten Andeutungen, seinem möglichen Detail nach bestimmt ein Mal durch die Apertur des Objektivs und andrerseits, eine gegebene Apertur vorausgesetzt, durch die angulare Grösse der Zerstreuungskreise, welche die in der Construction des Objektivs begründeten Abbildungsfehler an Stelle scharfer Bildpunkte in das Lupenbild einführen. Hiernach ergiebt sich für jedes concrete Objekiv eine, ihrerseits durch Tubuslänge und Ocularstärke beliebig zusammensetzbare Angularvergrösserung, welche für ein Auge von angenommener Sehschärfe gerade ausreichen muss, um das im Objektivbild enthaltene Detail vollkommen zu erkennen. Eine stärkere Vergrösserung kann zwar noch brauchbar sein, indem sie solches Detail deutlicher und bequemer zur Wahrnehmung bringt; sie vermag aber niemals das optische *Vermögen* eines gegebenen Objektivs zu erhöhen. Die erstere — welche man *die förderliche* Ocularvergrösserung nennen könnte — muss daher als das

Maass der relativen Vollkommenheit des Objektivs angesehen werden. Aus ihr bestimmt sich in naheliegender Weise die förderliche Gesammtvergrösserung, d. h. diejenige, mit welcher die Leistung des betreffenden Objektivs erschöpft ist. Es ist die kleinste Vergrösserung, bei der man alles Detail sieht, welches mit ihm, seiner Apertur und dioptrischen Vollkommenheit nach, überhaupt distinkt abgebildet werden kann.

Rationelle Vertheilung der dioptrischen Wirkung auf Objektiv und Ocular.

Sei also gegeben seinem linearen Maasse nach das Detail, die gegenseitige Entfernung d der feinsten Structurelemente, welche durch das Mikroskop noch getrennt erkennbar sein sollen. Damit diese im Bilde überhaupt unterschiedlich wiedergegeben werden, muss die Apertur des Systems, $a = n \sin u$, einen Betrag haben, welcher nach der ABBE-HELMHOLTZ'schen Grundgleichung

$$d = \frac{\lambda}{2a}$$

sich bestimmt zu

$$a = \frac{\lambda}{2d}, \tag{11}$$

wenn λ die Wellenlänge (in Luft) des bei der Abbildung wirksamen Lichts bezeichnet.

Im letzten Bilde erscheint die Objektgrösse d unter einem Sehwinkel δ^*, welcher, gemäss der Gleichung für die Vergrösserung virtueller Bilder (pag. 161/2) abgesehen von kleinen Correctionsgliedern bestimmt ist durch

$$\delta^* = d \cdot V = \frac{d}{f'} \quad \text{oder} \quad \delta^* = \frac{d}{l} N, \tag{12}$$

wenn V die absolute, N die lineare Gesammtvergrösserung des Mikroskops bedeutet. Diese Vergrösserung muss, damit das betreffende Detail vom Auge deutlich unterschieden werde, so gross sein, dass δ^* dem Unterscheidungswinkel ε des Auges mindestens gleich wird. Man darf ε nach den darüber vorliegenden, z. Th. gerade durch mikroskopische Beobachtungen gewonnenen Erfahrungen, kaum geringer als $= 2'$ ansetzen. Für ganz bequemes Sehen muss etwa der doppelte Betrag angenommen werden. Also ist — $\delta^* = \varepsilon$ genommen —

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{2a}{\lambda}\varepsilon; \quad N = \frac{l}{f'} = \frac{2al}{\lambda}\varepsilon \tag{13}$$

die der Apertur a entsprechende Mindestvergrösserung, bezw. Maximalbrennweite, welche man dem ganzen Instrument geben muss.

Setzen wir hierin $\lambda = 0{\cdot}55\ \mu$ und ε ein Mal $= 2'$ und dann $= 4'$, so erhalten wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellte Werthe für die kritischen linearen Vergrösserungen und Brennweiten bei verschiedenen Aperturen.

$a = n \sin u$	d in μ	$\varepsilon = 2'$		$\varepsilon = 4'$	
		N	f' [1] mm	N	f' [1] mm
0·10	2·75	53	4·72	106	2·36
0·30	0·92	159	1·58	317	0·79
0·60	0·46	317	0·79	635	0·39
0·90	0·31	476	0·52	952	0·26
1·20	0·23	635	0·39	1270	0·20
1·40	0·19	741	0·34	1481	0·17
1·60	0 17	847	0·30	1693	0·15

[1]) Wir wollen hier gleich darauf hinweisen. dass das im Mikroskop sichtbare Objektflächenstück etwa den Durchmesser $\frac{1}{4}f$ hat, so dass die betreffenden Columnen der Tabelle diese Grösse annähernd mit angeben.

Die Austrittspupille des Mikroskops hat für $\delta^* = \varepsilon = 2'$ einen Durchmesser von ca. 1 *mm* (genauer $= 0{\cdot}95$ *mm*), für $\varepsilon = 4'$ einen halb so grossen.

Um jetzt beurtheilen zu können, welcher Betrag der Gesammt-Leistung dem Objektiv, welcher dem aus Tubuslänge und Ocularlinsen zusammengesetzten Ocularapparat zuertheilt werden könne, ist festzustellen, wie gross die in Folge dioptrischer und technischer Constructionsmängel restirenden Abbildungsfehler in dem von ersterem entworfenen virtuellen Bilde bei dem gegenwärtigen Zustande der praktischen Optik bezw. bei den besten vorhandenen Constructionen der Objektive sind.

Einfluss der Aberrationsreste im Objektiv auf die Bildgüte des gesammten Mikroskops.

Den Zerstreuungskreis der im virtuellen Objektiv-Bilde uncompensirt gebliebenen sphärischen Aberration fanden wir, seinem angularen Betrage nach pag. 90 bezw. 208

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 \cdot K,$$

wenn nur das erste Glied der Aberration berücksichtigt wurde. Beim Mikroskop, wo gerade die höheren Glieder von Wichtigkeit sind, hat man unter Mitberücksichtigung dieser

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 K_1 + \left(\frac{h}{f}\right)^5 K_2 + \ldots\ldots \tag{14}$$

zu setzen. Das Verhältniss der von den austretenden Büscheln ausgefüllten Halböffnung h zur hinteren Brennweite des Objektivs ist nach Gleichung (5a) pag. 169 seine numerische Apertur, a, also

$$\zeta = a^3 K_1 + a^5 K_2 + \ldots \tag{14a}$$

worin K_1, K_2 ... Constanten sind, welche von der Zusammensetzung des Systems, d. h. von dessen Constructionstypus, aber nicht von der Brennweite abhängig sind.

Die Winkelgrösse ζ dient als Objekt für das aus Tubuslänge und Ocularstärke zusammengesetzte schematische Fernrohr. Die Angularvergrösserung $V_2 = \frac{\Delta}{f_2'}$ dieses darf also nicht grösser sein, als dass $\zeta\ V_2 = \zeta^*$ eine unmerkliche Grösse, jedenfalls aber $\zeta^* < \varepsilon$, wird.

Man sieht zunächst, dass es gleichgültig ist, ob die Uebervergrösserung des im Objektivbilde verbliebenen Fehlers durch kurzen Tubus und starkes Ocular oder durch langen Tubus und entsprechend schwaches Ocular bewirkt wird, so lange letzteres überhaupt eine genügend fehlerfreie Abbildung von Axenpunkten herbeiführt. Da die Fehlergrösse im Bilde, ζ^*, nur von der Ocularvergrösserung abhängt, so ist sie bei einem gegebenen Constructionstypus des Objektivs (gegebenen Constanten K_1, K_2 ... und damit gegebenem Werthe von ζ)

$$\zeta^* = \zeta \cdot \frac{\Delta}{f_2'} = \zeta \cdot \frac{f_1'}{f'} = \zeta \cdot f_1' \cdot V, \tag{15}$$

also die Fehlergrösse im Bilde direkt proportional der Brennweite des Objektivs, wenn gleiche Gesammtvergrösserungen V verglichen werden. Eine bestimmte Bildqualität (Grösse von ζ^*) bei einer gegebenen Gesammtvergrösserung ist daher desto leichter zu erreichen, je kürzer man die Brennweite des Objektivs wählt. [Man kann dies auch daraus entnehmen, dass der gleichen angularen Grösse ζ im virtuellen Objektivbilde eine *desto kleinere* lineare Fehlergrösse z im Objekte entspricht, je kleiner die Brenn-

weite des Objektivs ist, gemäss der Gleichung $z = \zeta \cdot f_1'$. Dieser auf das Objekt bezogene Fehler z unterliegt der Vergrösserung V durch das ganze Mikroskop, welche nur von dessen Gesammtbrennweite, aber nicht von f_1' abhängt. Folglich bleibt die Fehlergrösse im schliesslichen Bilde proportional ihrer Grösse im Objekt, d. h. proportional f_1' [1])].

Ganz analog zieht man die aus der chromatischen Abweichung und aus deren Variation mit der Apertur herrührenden Fehler im Objektivbild in Rechnung. Die erstere fanden wir früher, ebenfalls in ihrem angularen Betrage

$$\gamma = \left(\frac{h}{f}\right) G = a \cdot G. \tag{14b}$$

wo G wiederum eine vom Constructionstypus des Systems abhängige Constante bedeutet. Die andere würde, analog der sphärischen Aberration selbst

$$\Delta \zeta = a^3 \Delta K_1 + a^5 \Delta K_2 + a^7 \Delta K_3 + \ldots \tag{14c}$$

zu setzen sein.

Die aus allen drei Ursachen zusammen herrührende Aberration — so unsicher dieselbe auch auf solche Weise mathematisch und physikalisch bestimmt sein mag — wird daher jedenfalls durch eine nach ungeraden Potenzen der Apertur fortschreitende Reihe dargestellt, deren Coëfficienten von der Brennweite des Systems unabhängig sind. Die lineare Grösse dieses Gesammtfehlers, zurückbezogen auf das Objekt, ist also, ebenso wie seine einzelnen Bestandtheile, direkt proportional der Brennweite des Objektivs. Indem man dann die Bedingung festhält, dass der aus allen drei Ursachen herrührende Gesammtfehler im letzten Bilde den kritischen Betrag ε nicht übersteigen dürfe, kommt man zu einer rationellen Skala der Verhältnisse von Apertur und Brennweite in den Mikroskopobjektiven.

Es würde schwer und jedenfalls ein sehr unsicheres Verfahren sein, wenn man die Grösse von ζ für verschiedene Constructionstypen und Aperturen direkt — etwa rechnerisch, — bestimmen wollte. ABBE[2]) hat daher zu ihrer Ermittelung einen indirekten Weg eingeschlagen, indem er an zahlreichen Exemplaren verschiedenster Provenienz und Zusammensetzung empirisch den Betrag der Ueber-Vergrösserung $\frac{\Delta}{f_2'} = V_2$ feststellte, den das Objektivbild verträgt, ohne irgend merkliche Einbusse an Schärfe zu erfahren. Aus der Apertur a und dem kritischen Winkel ε ist gemäss Gl. (13) die Gesammtbrennweite f' bestimmt, die das System erhalten muss. Diese setzt sich aus Objektivvergrösserung $V_1 = \frac{1}{f_1'}$ und der Ocularvergrösserung $V_2 = \frac{\Delta}{f_2'}$ gemäss der Gleichung (10)

$$V = \frac{1}{f'} = V_1 \cdot V_2 = \frac{1}{f_1'} \frac{\Delta}{f_2'}$$

zusammen. Daher bestimmt der Werth von V_2 umgekehrt denjenigen von f_1', nämlich zu

$$f_1' = \frac{V_2}{V} = f' \cdot V_2 \tag{16}$$

oder aus der zulässigen Linearvergrösserung N zu

$$f_1' = \frac{l \cdot V_2}{N}, \tag{16a}$$

[1]) Erster Hinweis auf diese Verhältnisse in HUYGHENS Dioptrica, pag. 181 ff.

[2]) Beiträge zur Theorie etc. l. c. und Relation of Aperture and Power in the Microscope, Journ. R. Micr. Soc. (2) 2, pag. 300, 460, 790. 1882.

wo V bezw. N die dem Winkel ε und der Apertur a nach Gleichung (13) pag. 247 entsprechenden Grössen sind.

Eine Reihe der auf diese Weise sich ergebenden Werthe der kritischen Uebervergrösserung und entsprechenden Objektivbrennweite sind in folgender Tabelle zusammengestellt. In derselben sind neben den Werthen, welche den Systemen der älteren Art, den »Achromaten«, zugehören, diejenigen aufgeführt, welche nach einer gleichartigen Untersuchung den mit den neuen Jenaer Glasarten construirten »Apochromaten« zugehören.

Apertur $a = n \cdot sin u$		Förderliche Gesammtvergrösserung $= N$	Achromate V_2	Achromate f_1'	Apochromate V_2	Apochromate f_1'
Trockensysteme	0·10	53	10	47	—	—
	0·20	106	8	19	—	—
	0·30	159	7	10·5	10	16
	0·60	317	4·5	3·5	10	8
	0·90	476	4	2·1	8	4
Wasserimmersion	1·20	635	4	1·6	7	2·5
Homogene Immersion	1·35	714	6	2·1	9	3

Wegen der verschiedenen, bei Aufstellung einer solchen Tabelle in Betracht kommenden Nebenumstände müssen wir auf die zweite der oben citirten Abhandlungen von ABBE verweisen.

Einfluss der Wirkungsvertheilung auf Objektiv und Ocular in Bezug auf die Bildfehler ausser der Axe.

Die Werthe von f_1' in dieser Tabelle und überhaupt alle gemäss solcher Bestimmungsweise erhältlichen sind obere Grenzwerthe. Nach den oben angestellten Erwägungen könnte es nun scheinen, als käme man zu immer günstigeren Verhältnissen, je kleiner man *caet. par.* f_1' wählt. Dies ist jedoch nur richtig unter dem bisher allein festgehaltenen Gesichtspunkt der Verminderung des Einflusses der unvermeidlichen Aberrationsreste auf die Bildqualität in der Axe. Eine zu starke Verkürzung der Objektivbrennweite — auf mehr als $\frac{2}{3}$ bis höchstens $\frac{1}{2}$ der oben angegebenen Werthe — würde dagegen mehrere Nachtheile im Gefolge haben.

Die meisten der pag. 212/13 angeführten Vorzüge des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen würden bei relativ sehr kurzen Objektivbrennweiten in entsprechend geringerem Grade zur Geltung kommen. Insbesondere würde man mit den bequemsten Ocularbrennweiten und Tubusdimensionen auf übermässige, »leere« Vergrösserungen kommen und keine Abstufung brauchbarer Vergrösserungen durch Wechsel der Oculare vornehmen können; ferner würde bei den höheren Aperturen der freie Objektabstand — der hier ein mit der Apertur abnehmender Bruchtheil der Brennweite ist (bei $a = 0{\cdot}25$ ca. $0{\cdot}7\, f_1$, bei $a = 0{\cdot}5$ ca. $0{\cdot}3\, f_1$ und bei $a = 0{\cdot}85$ nur ca. $0{\cdot}1\, f_1$) — auf unangenehm geringe Beträge herabgesetzt werden.

Der wichtigste Uebelstand aber wäre der, dass mit der Verringerung der Objektivbrennweite die Fehler des letzten vom Ocular entworfenen Bildes ausserhalb der Axe zunehmen.

Wir machten als Hauptmoment für die Vertheilung der dioptrischen Leistung auf ein Objektiv und ein Ocular geltend, dass durch diese Theilung die Abbildung eines im Verhältniss zur Brennweite des ganzen Systems grösseren Objektflächenstücks ermöglicht werde. In der That, nehmen wir Oculare von gegebenem *Constructionstypus* an, in welchen z. B. das angulare Bildfeld ca. $= 35°$ ist, also

$tg\,w' = tg\,17^{\circ}{\cdot}5 = 0{\cdot}32$, dann ist das zur Abbildung durch das ganze System gelangende Objektflächenstück

$$2y = 2 \cdot f' \cdot tg\,w' \text{ nahezu } = 0{\cdot}65\,f'$$

Nun sind durch Erfüllung der Sinusbedingung die der ersten Potenz des Sehfeldes proportionalen Bildfehler (die Vergrösserungsdifferenzen der verschiedenen Zonen des Objektivs und das Coma) auf Null gebracht. Es bleiben aber die der zweiten und höheren Potenzen proportionalen im wesentlichen uncompensirt bestehn. Was nun diese und zunächst die dem Quadrat des Sehfeldes proportionalen Fehler [Astigmatismus, Wölbung[1])] betrifft, so treten dieselben desto weniger in Erscheinung, je grösser die Objektivbrennweite ist. Denn alsdann ist das unter gegebener Gesammtvergrösserung ($V = 1/f'$) und gegebenem Ocularsehfeld ($2\,w'$) abgebildete Objektflächenstück $2y$ ein entsprechend kleinerer Bruchtheil der Objektivbrennweite. Nämlich, wenn

$$f_1' = f' \cdot V_2 \quad \text{so} \quad \frac{y}{f_1'} = \frac{tg\,w'}{V_2}, \tag{17}$$

also $\frac{y}{f_1'}$, die angulare Grösse des Objekts vom vorderen Knotenpunkt des Objektivs aus gesehen, ein desto kleinerer Bruch, je stärkere Uebervergrösserung V_2 — mittelst Ocular und Tubus — zur Anwendung kommt bezw. gemäss den oben erörterten Bedingungen angewandt werden darf. Andererseits wird der im Objektivbild verbleibende Zerstreuungskreis direkt proportional der Ocularvergrösserung V_2 mit vergrössert. Bei einer in Bezug auf die excentrischen Theile des Sehfelds fehlerlosen Abbildung durch das Ocular, oder bei einer von der Stärke derselben unabhängigen Qualität der von ihm gelieferten Bilder erscheinen daher im letzten Bilde die dem Quadrate des Sehfelds proportionalen Fehler im umgekehrten Verhältniss zur Objektivbrennweite.

Die lineare Grösse des abgebildeten Objekts, welche gleich ca. $\frac{2}{3}$ der Brennweite des Gesammtsystems ist, beträgt demnach im zusammengesetzten Mikroskop nur $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{18}$ der Objektivbrennweite; das Objekt wird daher durch dieses in seinen Randtheilen entsprechend vollkommener zur Abbildung gebracht als in einem einfachen Mikroskop von gleicher Gesammtvergrösserung. Je grösser die zulässige Steigerung der Uebervergrösserung V_2 ist, in desto stärkerem Maasse kommt dieser Vortheil neben den anderen oben angeführten zur Geltung. Dies sind die Gründe, weshalb die möglichste Steigerung der Objektivbrennweite und entsprechende Steigerung der Uebervergrösserung ein Hauptziel der praktischen Optik sein muss und einen Maassstab für ihre Leistungen bildet.

»Angesichts der noch sehr verbreiteten Meinung, dass die Anwendung starker Oculare an sich unvortheilhaft sei — dass diese Lichtmangel herbeiführten und dass man desshalb für höhere Vergrösserungen grundsätzlich Objektive von kurzer Brennweite und schwache Oculare fordern müsse — dürfte es nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dass eine solche Ansicht weder optisch sich rechtfertigen lässt, noch einer richtig gedeuteten Erfahrung entspricht, sondern aus einer unberechtigten Verallgemeinerung gewisser Beobachtungen entsprungen ist. Die starken Oculare geben dann »dunkle« Bilder, wenn durch ihre Anwendung überhaupt zu hohe (leere) Vergrösserung herbeigeführt wird, d. h. wenn die Gesammtvergrösserung über diejenige Ziffer hinaus sich steigert, bei welcher der Inhalt des Bildes, wie er durch die Apertur des Objektivs sich bestimmt, für das Auge erschöpft ist; und ausserdem dann, wenn die Strahlenvereinigung durch das Objektiv zu unvollkommen ist, um die betreffende Vergrösserung zu vertragen, ohne

[1]) Im Text von pag. 124 heisst es (Zeile 7 v. u.) in Folge eines Schreibversehens »Quadrate der linearen Oeffnung des einfallenden Büschels« statt »Quadrate des linearen oder angularen Objektdurchmessers.«

dass die Fehler sichtbar werden. Wenn weder der eine noch der andere Fall vorliegt, ist es auch für den subjektiven Eindruck der Helligkeit durchaus gleichgiltig, ob die betreffende Vergrösserung durch ein starkes Objektiv mit einem schwachen Ocular oder durch ein schwächeres Objektiv von gleicher Apertur mit einem stärkeren Ocular erzielt worden ist. Die objektive Lichtstärke des Bildes aber hängt in jedem Falle nur von der Apertur und der Gesammtvergrösserung ab, gleichgiltig wie die letztere durch Brennweite des Objektivs, Tubuslänge und Brennweite des Oculars sich bestimmt» (Abbe).

Wenn die Vergrösserung, d. h. die Divergenzänderung der abbildenden Büschel durch das Objektiv allein unter ein gewisses Maass herabgeht, so verlieren die voranstehenden Betrachtungen z. Th. ihre Unterlage. Die Bilddistanz ist dann nicht mehr sehr gross gegen die Brennweite des Objektivs und die von ihm austretenden, für das Ocular wirksam werdenden Büschel sind nicht mehr sehr eng. Der Vergleich des Objektivs mit einer Lupe für fernsichtige Augen und des Ocular-Tubus-Theils mit einem ohne weiteres aplanatischen Fernrohr lässt sich daher nicht mehr aufrecht erhalten. Es muss dann vielmehr auch die Focalwirkung des Oculars berücksichtigt werden, und es ist andererseits in viel höherem Maasse als oben hingestellt möglich, die im Objektivbild verbliebenen Fehler durch das Ocular zu corrigiren.

Die hauptsächlichsten Constructions-Typen in ihrer historischen Entwickelung.

1) Einfache Linsen für Objektiv und Ocular. Das zusammengesetzte Mikroskop ist — ebenso wie das Fernrohr — wahrscheinlich durch zufällige geeignete Combination eines starken biconvexen mit einem noch stärkeren biconcaven (?) Brillenglase um das Jahr 1590 von Niederländischen Brillenschleifern erfunden oder vielmehr gefunden worden (Zacharias Janssen in Middelburg?)[1]) Das erste zusammengesetzte Mikroskop war also ebenso wie das erste Fernrohr ein solches mit negativem (dispansivem) Ocular[2]). Fontana beschrieb 1646 zuerst ein Mikroskop, dessen Ocular wie das Objektiv aus je einer Sammellinse bestanden.

Im Jahre 1665 setzte Hooke zwischen diese beiden Linsen nahe der oberen eine dritte, welche man jetzt als sogen. Collektivglas (Fieldlens) als zum Ocular gehörig rechnet. Seine Absicht war dabei, wie der Name es ausdrückt, nur die, das Sehfeld zu vergrössern, indem die Collektivlinse einen grösseren Theil

[1]) Ueber die Geschichte dieser Erfindung und die Prioritätsansprüche der verschiedenen Personen bezw. Nationen berichten ausführlicher: E. Wilde, Gesch. der Optik. Berlin, 1838, Bd. I, pag. 138 ff. P. Harting, Das Mikroskop. D. Uebers. 2. Aufl. Braunschweig 1866. 3. Theil. J. Mayall jun., Cantor lectures on the microscope. Soc. for the encouragement of arts etc. (auch separat erschienen) London 1886, pag. 6 ff. In diesen Werken ist auch die ältere auf den Gegenstand bezügliche Literatur angeführt.

Dass die Inanspruchnahme dieser Erfindung (sowie auch der anderer optischer Instrumente) für ein früheres Zeitalter, insbesondere für das classische Alterthum haltlos sei, wies eingehend nach: H. Martin, Sur les instrum. d'optique faussement attribués aux anciens etc. Bull. di Bibliogr. e di Storia delle Scienze mat. e fis. (4) (Mai-Juni) 1871.

Für die Priorität Galilei's trat neuerdings nochmals ein G. Govi. Atti d. R. Ac. d. Scienze fis. et mat. Napoli. S. dagegen die Ausführungen in Journ. R. Micr. Soc. 1889, pag. 574.

[2]) So beschaffen war es wenigstens auf der ältesten Abbildung eines zusammengesetzten Mikroskops in Descartes Dioptrice 1637 (Mayall l. c. p. 9). Das angeblich älteste wirklich erhaltene (Janssen's?) Mikroskop hat zwei convexe Linsen (vergl. Ber. üb. d. Ausst. wiss. Instr. zu London hrsg. v. A. W. Hofmann. Braunschw. 1878, pag. 50. Mayall l. c. pag. 7.)

des Objektivbildes aufnimmt als bei sonst ungeänderter Stellung derselben die eigentliche Ocularlinse. Diese Erklärung hält jedoch nicht mehr Stand, wenn man zusammengesetzte und einfache Oculare von gleicher Gesammtbrennweite vergleicht. Maassgebend für die bessere Wirkung der zweifachen Oculare sind vielmehr die Gesichtspunkte, unter welchen HUYGHENS sie (vor 1659) für den Gebrauch am Teleskop gefunden hatte und auf welche wir theils bereits hingewiesen haben, theils unten zurückkommen werden.

Die weitere Entwicklung des Mikroskops musste nach dem oben ausgeführten wesentlich von derjenigen ihrer Objektive abhängen. Die Construction derselben machte keine nennenswerthen Fortschritte in den ersten beiden auf die Erfindung des Mikroskops folgenden Jahrhunderten. Man war in diesen vielmehr ausschliesslich mit der Anwendung und construktiven Durcharbeitung der einfachen Mikroskope beschäftigt. Man versuchte zwar, die Brennweiten der Objektive immer kürzer und ihre Oeffnung dennoch relativ gross zu erhalten (man hatte bald erkannt, dass hierauf, wie beim Teleskop, die Lichtstärke beruhe); die sphärischen und chromatischen Fehler einer Einzellinse — und selbst mehrerer solcher zu einem System verbundener (Doublets, DIVINI 1668) als Objektive von Mikroskopen traten aber schon unter mässiger Ocular- bezw. Gesammtvergrösserung so stark hervor, dass ihnen gegenüber bis in die neuere Zeit (ca. 1830) sogar die mit einem (Concav-) Spiegel ausgerüsteten Katadioptrischen Mikroskope (vorgeschlagen 1672 von NEWTON, weiter verfolgt von BARKER, R. SMITH, B. MARTIN, D. BREWSTER und besonders AMICI) entschiedene Vortheile zu bieten schienen. Die hierauf gerichteten Bestrebungen wurden jedoch beim Mikroskop — im Gegensatz zum Fernrohr — später gänzlich fallen gelassen, als die Anwendung achromatisirter Combinationen als Objektive die diesen früher anhaftenden Mängel beseitigte. In der That bieten Spiegel als Objektive so ungünstige Bedingungen für die Beleuchtung und die Beobachtung des Objektes dar, dass die katadioptrischen Mikroskope (das Ocular war stets dioptrisch) als ein für immer überwundener Standpunkt gelten können und nur noch historisches Interesse beanspruchen dürfen.

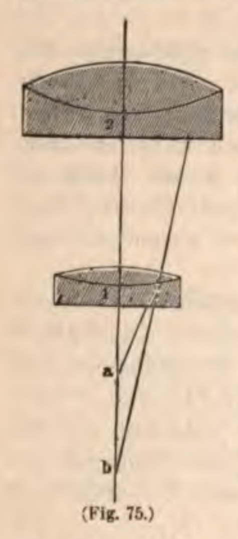
2) Die Anwendung des Achromasieprincips — unter gleichzeitiger Aufhebung der sphärischen Aberration für wenigstens eine Farbe — auf das Mikroskopobjektiv war durch die theoretischen Arbeiten, insbesondere die von EULER schon früher vorbereitet (Ende des 18. Jahrh.), fand aber nach mehreren dahin gerichteten misslungenen Versuchen von B. MARTIN (1759) u. A. erst durch die Optiker J. u. H. VAN DEYL (1807) FRAUNHOFER (1811), AMICI (1816) TULLEY (1824) und CHEVALIER (1824) allmählich zunehmend sachgemässe und darum wirkungsvolle Realisirung.

Insbesondere waren es die von V. u. CH. CHEVALIER anfänglich nach Angaben von SELLIGUE hergestellten (später selbständig verbesserten) Objektive,[1]) welche dem zusammengesetzten Mikroskop einen wirklichen Vorsprung vor dem einfachen zu verschaffen begannen. In diesen waren mehrere für sich achromatische Linsen über einander geschraubt, welche zusammen, einzeln, oder in beliebigen Combinationen benützt werden konnten und damit war der zweite Schritt auf der Bahn geschehen, in welcher sich alle weiteren Fortschritte auf dem Gebiete der Mikroskopie bewegten.

---

[1]) Ueber dieselben s. CH. CHEVALIER, Des Mikroscopes. D. Uebers. v. KERSTEIN, Quedlinbg. u. Leipz. 1843 und den von FRESNEL verfassten Bericht der von der Par. Acad. zu ihrer Prüfung eingesetzten Commission. Ann. des sciences nat. 3, pag. 345. 1824.

Die Zusammensetzung des Objektivs aus mehreren geeignet angeordneten einfachen Linsen hatte allerdings schon EULER (1757) empfohlen behufs Verminderung der sphärischen Aberration in einem System von entsprechend kurzer Brennweite bezw. relativ grosser Oeffnung. Für den damaligen Zustand der Technik war es ausserdem an sich schon ein grosser Vortheil, dass die Brechungswirkung auf mehrere Flächen vertheilt wurde, deren Dimensionen und Radien nicht allzusehr ausserhalb des Bereichs ihres Könnens lagen. Da der Correctionszustand von den gegenseitigen Entfernungen der Linsen abhängt, so bietet eine Mehrzahl von solchen die — bis in die Gegenwart viel benützte und nicht zu unterschätzende — Möglichkeit, durch empirische Distanzirung Unvollkommenheiten des ursprünglichen Constructionsplans und der technischen Ausführung bis zu einem gewissen Grade nachträglich wieder auszugleichen. Die von SELLIGUE gewählte Disposition zeugte andererseits von wenig Einsicht in die Bedingungen des Problems, welches er zu lösen unternahm. Denn sowohl er, als die meisten seiner Vorgänger wandten »achromatische« Linsenpaare an, welche gewissermaassen schlechthin »achromatisch«, nämlich von den chromatischen und sphärischen Aberrationen für einen unendlich fernen Objektpunkt befreit waren, wie das damals bereits genauer studirte Fernrohrobjektiv. SELLIGUE trug nun nicht einmal — wie z. B. FRAUNHOFER — dem Umstande Rechnung, dass bei Mikroskopobjektiven die Bildentfernung (nahezu im Verhältniss der linearen Objektivvergrösserung) grösser ist als die Objektentfernung und dass deshalb ein Fernrohrobjektiv von entsprechend kurzer Brennweite leidliche Dienste als Mikroskopobjektiv nur thun kann, wenn man es in umgekehrter Lage wie jenes am Tubus anbringt. Vielmehr waren seine Objektive aus Linsenpaaren zusammengesetzt (biconvexe Crown- mit planconcaver Flintlinse, mit den gleich stark gekrümmten Innenflächen an einander gekittet, die Crownlinse nach dem Objekte hin gelegen) die sich in einer Stellung befanden, in welcher sie für den unendlich fernen Axenpunkt besser als für den wirklichen Objektpunkt corrigirt waren.



(Fig. 75.)

Die gebührende Rücksicht auf diesen Punkt nahm erst CHEVALIER, dann LISTER [1]). Letzterer wies darauf hin, dass jedes Linsenpaar nur für zwei Stellen der Axe sphärisch corrigirt »aplanatisch» sein könne und dass man daher die Einzelobjektive so übereinanderreihen müsse, dass der (virtuelle) aplanatische Bildpunkt, *b*, der einen Objektpunkt für die darauffolgende würde. Alsdann bleibt das Gesammtsystem (1 + 2 + . .) (Fig. 75) aplanatisch, man mag von der Objektseite her so viel Theile (1, 2, . .) entfernen oder daran belassen als man wolle. Die Stärke der einzelnen Linsenpaare nimmt dabei von der Objekt- nach der Bildseite hin ab und die des ganzen Systems mit der Zahl der Linsenpaare zu. Ein Hauptvortheil dieser combinirten Objektive bestand darin, dass sie einen grösseren Oeffnungswinkel erhalten konnten, also einfache und in Folge dessen für die ihren Brennweiten entsprechende Vergrösserung annähernd genügender Lichtstärke und Unterscheidungs- bezw. Auflösungsvermögen erhielten.

[1]) On some properties in achrom. objectglasses applic. to the improvement of the microscope. Phil. Trans. 3, pag. 187. 1830.

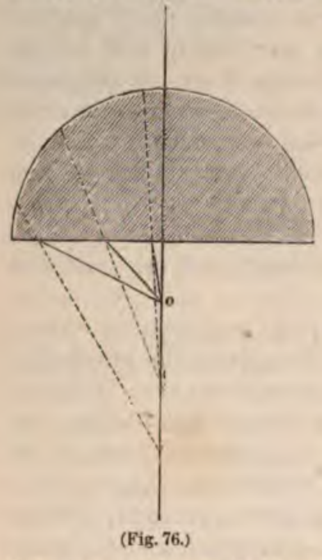
Nach diesem Constructionsprincip hat man zwar noch bis in die neueste Zeit Systeme verfertigt; aber dies doch nur zu gewissen speciellen Zwecken. Die Mehrzahl der damaligen Optiker, welche ohnehin weder die rationelle Berechnung noch eine der Rechnung genau entsprechende Ausführung zu leisten vermochten, wandten sich einem andern Verfahren zu, welches an sich zwar complicirter war, aber eben darum höhere Leistungen ermöglichte und den praktischen Optikern die Möglichkeit bot, ohne besondere Ansprüche an Zusammenwirken von Theorie und Technik zu stellen, durch Geduld und Sorgfalt, auf rein empirischem Wege, die geeigneten Combinationen zu finden. LISTER selbst hatte sich auch schon in seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand zum Theil wieder von seinem Princip entfernt, indem er angab, dass bei starken Systemen die Gesammtwirkung eine günstigere werde, wenn man in dem einen Partialsystem etwas Untercorrection bestehen lasse und diese durch eine gleich grosse Uebercorrection des darauf folgenden Theils kompensire. In der That haben nur die unter vollständiger Verfolgung des Princips der

3) Gegenseitigen Compensation absichtlich angehäufter Aberrationen in den verschiedenen Theilen des Objektivs die Möglichkeit dargeboten, die chromatischen und sphärischen Aberrationen höherer Ordnung und die Vergrösserungsanomalien der verschiedenen Zonen des Systems (Abweichungen vom Sinusverhältniss) einigermaassen auszugleichen, welche bei grösseren Aperturen über die primären Glieder weit überwogen. AMICI gebührt das Verdienst, diesen Schritt gethan (auch selber praktisch verwirklicht) zu haben und durch diese und andre Verbesserungen des zusammengesetzten Mikroskops der eigentliche Begründer der modernen Mikroskopoptik geworden zu sein.

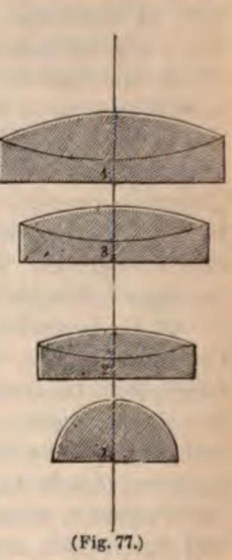
AMICI ging in Erkenntniss der Bedeutung der grossen Oeffnungswinkel für die stärkeren Systeme systematisch darauf aus, dieselben zu steigern. Da eine wirkliche Ausnützung des Oeffnungswinkels nur eintreten kann, wenn innerhalb desselben die Aberrationen ausgeglichen sind, so brachte AMICI in seinen Objektiven das eben genannte und schon früher von uns besprochene Princip zur Anwendung, die verschiedenen Aberrationen in dem einen (Unter-) Theil des Systems absichtlich anzuhäufen bis zu solchen Beträgen, welche in gleicher aber entgegengesetzter Grösse und gleichem Zusammenhange (mit den Zonen und unter einander) in dem anderen zum System gehörigen (Ober-) Theil erreichbar sind. Die Zusammensetzung zweier solcher mit entgegengesetzten Aberrationen behafteter Theile ergiebt dann ein aplanatisches Gesammtsystem, in welchem die verschiedenen Aberrationen, wie bemerkt, weit besser corrigirt sind, als wenn man das System aus Theilen zusammensetzte, der jeder für sich möglichst gute Wirkung oder überhaupt brauchbare Bilder giebt. Der Vortheil, dass die allgemeine dioptrische Wirkung auf mehrere Flächen vertheilt ist und in Folge dessen mittelst Flächen schwächerer Krümmung geleistet wird als bei Anwendung einer einzigen Linse, bleibt dabei immer noch bestehen.

Als eines wesentlichen Mittels zur Erreichung dieses Zieles bediente sich AMICI bereits der stark gewölbten planconvexen Vorder- (Front-) Linse, welche für alle anderen modernen stärkeren Objektive wesentlich und eigenthümlich ist. Wir haben wiederholt (pag. 54, 75, 102) auf die Eigenschaft der Kugel hingewiesen, ausser dem im Mittel- und dem im Scheitelpunkte coincidirenden noch ein weiteres im strengen Sinne aplanatisches Punktepaar zu besitzen. Die vom Punkte L' (Fig. 17) innerhalb des stärker brechenden Mediums n' auf die concave Seite der Kugel fallenden Strahlen $L'P$ etc. werden in jeder Neigung und jedem Azimut nach dem virtuellen Bildpunkte L hin gebrochen, wenn $CP = r$,

$CL' = \frac{n'}{n} r$ und $CL = \frac{n'}{n} r$ ist. Dabei stehen die Sinus der Winkel $PL'C$ und PLC in dem constanten Verhältniss $n':n$. Fallen die Strahlen von einem Punkte O erst auf die ebene untere Grenzfläche einer nahezu halbkugeligen Linse, so bleibt an dieser zwar das Sinusverhältniss constant, aber es erfährt das Büschel an ihr eine gewisse sphärische Untercorrection (Fig. 76). Ist der virtuelle Vereinigungspunkt des Büschels nach der Brechung an dieser Planfläche der eine aplanatische Punkt L' der darauf folgenden Kugelfläche, so wird das Büschel nunmehr aplanatisch in den ihm conjugirten Punkt L übergeführt. Es findet auf diese Weise also eine sehr erhebliche Brechungswirkung mit relativ geringen Aberrationen statt. In dem auf die Frontlinse folgenden Theile des Systems findet dann die weitere Brechung und Correction des Büschels gemäss dem oben gewährten Principe statt.



(Fig. 76.)



(Fig. 77.)

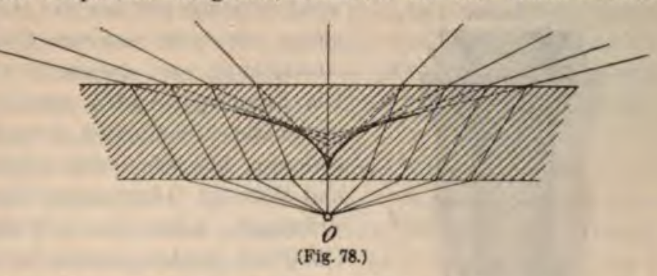
Amici verwandte auch bereits eine grössere Auswahl von Glasarten — wohl alle damals zur Verfügung stehenden, (etwa 6) — um möglichsten Spielraum in der Vertheilung von Brechungs und Aberrationswirkung auf die verschiedenen Flächen zu haben. Die auf die Frontlinse folgenden waren bei ihm — und auch später meistens — solche, welche aus einer nahezu plan-concaven Flintlinse (diese nach der Objektseite gewandt) und einer in sie gepassten biconvexen Crownlinse zusammengesetzt (verkittet) waren (Fig. 375).

Amici erreichte auf diese Weise Oeffnungswinkel, welche fast bis an die Grenze des geometrisch möglichen gingen, nämlich bis 120° ja 135°. Endlich erkannte er auch zuerst die beiden anderen Momente, welche einer guten Wirkung der Systeme entgegenstanden, und die behufs Erzielung einer solchen mehr berücksichtigt werden mussten.

Einfluss des Deckglases. Correctionsfassung.

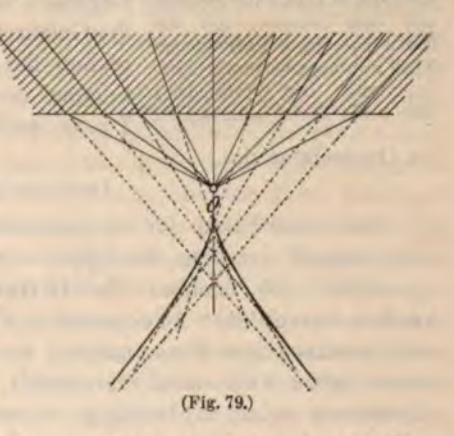
Die grosse Mehrzahl der Objekte, welche der mikroskopischen Beobachtung und Untersuchung, zumal bei starken Vergrösserungen, unterworfen werden, pflegt mit Glasplättchen bedeckt zu werden — den sogen. Deckgläsern — deren Dicke früher oft bis zu einigen Millimetern ging, jetzt meist nur wenige Zehntel-Millimeter beträgt. Bei den grossen Oeffnungswinkeln, welche Amici seinen Objektiven zu geben und nicht minder bei der vollkommenen Strahlenvereinigung, welche er innerhalb dieser Oeffnungswinkel zu erzielen wusste, wurde ihm der Einfluss bemerklich, den auch sehr dünne Deckgläser auf die Bildqualität ausüben. Ein Büschel, dessen Spitze z. B. in der Unterfläche des Deckglases liegt (von der Oberfläche des mit ihm bedeckten Präparates ausgeht) erfährt an der andern Fläche, beim Uebergang in Luft, eine er-

hebliche sphärische Uebercorrection (vergl. die Untersuchungen der Brennfläche in diesem Fall von TAIT, MEISEL u. s. w.) Büschel, die von tiefergelegenen Punkten O (Fig. 78) des Präparates ausgehen, erfahren an der ersten Fläche des Deckglases, beim Uebergang in Glas, allerdings eine gewisse sphärische Untercorrection (vergl. Fig. 79); wegen der geringeren Entfernung des Objektpunktes von



(Fig. 78.)

dieser Fläche als von der andern überwiegt aber jedenfalls die Uebercorrection an dieser. (Betreffs der Kennzeichen für den Charakter der Correction, ob Ueber- oder Untercorrection, vergl. pag. 88). Aus dem gleichen Grunde — wegen der grösseren Entfernung des Strahlungspunktes — ist dann aber wieder die Aberration, welche an der ebenen Unterfläche der Frontlinse des Objektivs eintritt (Fig. 79), grösser als die durch das ganze Deckglas hervorgebrachte und zwar in desto höherem Grade, je grösser die Entfernung zwischen Deckglas und Frontlinse, d. i. der freie Objektabstand ist. Dieser letztere Umstand ist zu berücksichtigen für die Wahl der Lage des Strahlungspunktes zur Hinterfläche der Frontlinse bezw. zu deren aplanatischen Punkten.


(Fig. 79.)

Dem ganzen Objektiv gegenüber wirkt also das Deckglas im übercorrigirenden Sinne und zwar in desto höherem Grade, je dicker das Deckglas ist. Das Objektiv muss daher für sich entsprechend untercorrigirt sein, und es kann dasselbe genau genommen nur von Präparaten, die mit Deckgläsern von ganz bestimmter Dicke versehen sind, gute, möglichst aberrationsfreie Bilder geben.

Dies ist nun in der That der Fall. Die Empfindlichkeit gegen Abweichungen von derjenigen Deckglasdicke, für welche das Objektiv ursprünglich bezw. am besten corrigirt ist, wächst natürlich einerseits mit dem Oeffnungswinkel (genauer mit der numerischen Apertur) des Objektivs. Bei den grössten Oeffnungswinkeln, welche man den Strahlenbüscheln geben kann, ohne dass der praktische Nachtheil weiterer Vergrösserung derselben in entsprechender Verminderung des freien Objektabstandes zu sehr hervortritt, nämlich bei Winkeln von 130—140° (numerische Apertur 0·90 — 0·95) werden an empfindlichen Objekten schon Abweichungen von der richtigen Deckglasdicke bemerklich, welche nur 0·01 bis 0·02 *mm* betragen; bei geringerer Apertur (0·5) ist kaum noch eine Abweichung von 0·05 *mm* zu erkennen; noch kleinere Aperturen sind noch weniger empfindlich.

AMICI trug diesem Umstand dadurch Rechnung, dass er seinen Mikroskopen mehrere Objektive gleicher Apertur beigab, von denen jedes auf eine andere Deckglasdicke corrigirt war. ANDREW ROSS in London berücksichtigte denselben (1837) auf einfachere, wenn auch weniger vollkommene, Weise, indem er den Abstand des Obertheils vom Untertheil des Objektivs variabel

machte (sogen. »Correctionsfassung«). Durch Veränderung dieses Abstandes schon innerhalb ziemlich enger Grenzen wird, wie wir früher sahen, eine genügende Veränderung des Correctionszustandes des Systems herbeigeführt, wiewohl natürlich nur bei einer Stellung, also für Deckgläser von einer gewissen Dicke, die Correction der Abweichung eine möglichst vollkommene sein kann. Die Brennweite und Apertur des Systems braucht bei geeigneter Construction derselben durch jene Distanzänderung nur sehr wenig beeinflusst zu werden. ZEISS und WENHAM (1857) haben diesen Mechanismus noch verbessert, indem sie nicht das Untertheil gegen das Obertheil, sondern umgekehrt dieses gegen jenes verschiebbar machten, sodass einerseits das Präparat während der Variation ihrer Entfernung nahezu im Focus des Systems bleibt und in Folge dessen das beste Bild eines Präparates, dessen Deckglasdicke nicht bekannt ist, empirisch besser aufgesucht werden kann, andererseits die Gefahr beseitigt wird, dass durch Aendern der Correction das Präparat mit dem Objektiv in Berührung komme und das eine oder andere Schaden erfahre. Fig. 80 stellt eine solche moderne Correctionsfassung im Querschnitt dar.

(Fig. 80.)



Durch den Correctionsring *b* wird die Entfernung zwischen dem oberen Theil *d* des Systems und dem unteren, mit der festen Fassung *a* verbundenen Theil *e* in angemessenen Grenzen variirt. Die Wurmfeder *c* hält beide Theile auseinander.

Immersionssysteme.

Der zweite Faktor für die Grösse der Aberration, welche das Strahlenbüschel beim Austritt aus dem Deckglas — und ebenso beim Eintritt in die Frontlinse — erfährt, ist offenbar die Differenz der Brechungsexponenten zu beiden Seiten der brechenden Fläche. Der Einfluss des Deckglases, sowohl gemäss seiner Gesammtdicke als in Bezug auf die zu gewärtigenden Variationen dieser wird daher vermindert, wenn der Unterschied der Brechungsexponenten zwischen Deckglas, bezw. Frontlinse und dem Medium zwischen beiden verringert wird, z. B. indem man zwischen Deckglas und Frontlinse des Objektivs eine Flüssigkeitsschicht einfügt. Systeme dieser Art — Immersionssysteme genannt — hat ebenfalls AMICI zum erstenmal und zwar in einer praktisch ziemlich vollkommenen Weise realisirt. Er war es auch, der hinwies und Gebrauch machte von den weiteren Vortheilen, die mit einer solchen Einrichtung theils ohne weiteres verknüpft sind, theils mit ihr verbunden werden können. Nämlich:

1) Die Verminderung der Aberrationen durch das Deckglas macht das Objektiv nicht nur unempfindlicher gegen Variationen von dessen Dicke, sondern sie ermöglicht überhaupt einen vollkommeneren Correctionszustand desselben, indem die Aberrationen, welche das Deckglas einführt wegen ihres besonderen Charakters (Grösse der Glieder höherer Ordnung) im darauffolgenden System immer schwer genügend vollständig aufhebbar sind. Immersionssysteme sind also unter sonst gleichen Umständen (gleiche numerische Apertur und Brennweite) optisch vollkommener herzustellen, als Systeme mit Luft zwischen Deckglas und Frontlinse (zum Unterschied als »Trockensysteme« bezeichnet).

2) Entsprechend der geringeren Brechung an den Planflächen des Deckglases und der Frontlinse ist auch der Lichtverlust durch partielle Reflexion an diesen Flächen vermindert, an welchen diese Reflexion gerade unter den maximalen überhaupt im System vorkommenden Incidenzwinkeln erfolgt,

jener Verlust daher auch sonst ein relativ beträchtlicher ist. Immersionssysteme liefern in Folge dessen bei gleicher Apertur und Vergrösserung hellere Bilder als Trockensysteme.

Neben dem Lichtverlust an sich, und vielleicht in noch höherem Grade als er, machen sich bei Trockensystemen die Reflexe gerader Ordnung (vergl. das bei den photographischen Systemen pag. 197 Gesagte) bemerklich, indem sie das Bild bis zu einem gewissen Grade verschleiern. Diese Reflexe fallen also bei den Immersionssystemen ganz oder fast ganz weg.

Endlich lehrt eine bekannte Erfahrung, dass grosse Schärfe im Bild, d. h. möglichst vollkommene Concentration des Lichtes auf die den Objektpunkten entsprechenden Bildpunkte in Folge einer unwillkürlichen Täuschung des Urtheils ebenfalls als Helligkeitsvermehrung empfunden wird. Also wirkt auch die ad 1 genannte Verbesserung der Bildqualität in demselben Sinne als eine, wenn auch nur scheinbare, Helligkeitsvermehrung.

3) Die numerische Apertur ist bei Trockensystemen theoretisch, für einen Divergenzwinkel des Büschels von 180°, auf die Grösse 1·0 — praktisch, wie früher schon erwähnt, auf höchstens 0·95 — beschränkt. Ein Büschel, welches selbst innerhalb des Deckglases oder im Einbettungsmedium des Objektes grössere Apertur (z. B. gleiche angulare Oeffnung) hätte, würde durch Totalreflexion des überschiessenden Theiles an der Oberfläche des Deckglases in jedem Falle auf die Apertur 1·0 reducirt werden. Die Einfügung einer Flüssigkeitsschicht von höherem Brechungsexponenten als 1·0 *mm* schiebt die Grenze der Totalreflexion entsprechend hinaus, bis zu der durch den Brechungsexponenten dieser Zwischenschicht selbst gegebenen Grenze; sie gestattet also, dass die Apertur des in das Objektiv eintretenden Büschels — Apertur in dem von uns stets festgehaltenen Sinne als Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des halben Oeffnungswinkels — eine bis zu dem gleichen Betrage höhere wird. Die äusserste Grenze der auf diese Weise erreichbaren Apertur ist gegeben durch den niedrigsten Brechungsexponenten, welcher zwischen Objekt, Medium und Frontlinse (diese beiden einschliesslich) an irgend einer Stelle in paralleler Schichtung vorhanden ist. (Es würde also z. B. eine Erhöhung des Brechungsexponenten der Zwischenschicht — Immersionsflüssigkeit — ohne gleichzeitige Erhöhung aller andern Medien zwischen Objekt und Frontlinse in dieser Beziehung ohne Vortheil sein.)

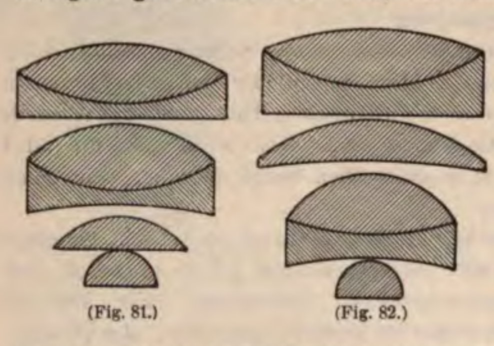
Mit dieser Erhöhung der Apertur sind dann — wofern innerhalb derselben entsprechend vollkommene Strahlenvereinigung erzielt wird — alle Vortheile verbunden, die wir pag. 224 nochmals namhaft gemacht haben, also insbesondere die Erhöhung der Lichtstärke und des Unterscheidungsvermögens des Objektivs bezw. ganzen Mikroskops.

Homogene Immersion.

Die hier gegebenen Hinweise auf die Vortheile der Immersionssysteme lassen ohne weiteres erkennen, dass dieselben am meisten zur Geltung kommen müssen, wenn eine Brechung an der Oberfläche des Objektivs überhaupt nicht stattfinden kann, d. h. wenn Deckglas, Immersionsflüssigkeit und Frontlinse des Objektivs gleiche Brechungsexponenten besitzen, eine optisch homogene Schicht bilden. Es sind daher, nachdem Immersionssysteme anderer Art, insbesondere solche mit Wasser als Immersionsflüssigkeit von AMICI 1840 eingeführt und von E. HARTNACK 1855 verbessert und beim wissenschaftlichen Publikum eingeführt waren, solche Systeme mit homogener Immersion im Jahre 1878 von ABBE unter Mitwirkung der ZEISS-

schen Werkstätte auf eine Anregung von J. W. STEPHENSON[1]) hin construirt worden, in welchen die genannten Momente praktisch zur Geltung gebracht wurden.[2]) Das bei diesen Systemen verwandte Cedernholzöl ($n_D = 1{\cdot}515$) ist auch jetzt noch die am häufigsten benützte Immersionsflüssigkeit.

Die Apertur, welche bei den älteren Immersionssystemen selten den Werth 1·0 überstieg, beträgt in den modernen Systemen bei Wasser als Immersionsflüssigkeit gewöhnlich 1·15– 1·20, bei homogener Immersion 1·25—1·35.


(Fig. 81.) (Fig. 82.)

Die Fig. 81 und 82 veranschaulichen den allgemeinen Aufbau von Systemen für homogene Immersion. Beide stellen Systeme von 2 *mm* Brennweite und einer Apertur von 1·30 dar (in 5fachem Maassstabe). Fig. 81 enthält die sogen. »Duplex front«-Linse, eine manchmal planconvexe, manchmal concavconvexe Linse über der halbkugeligen eigentlichen Frontlinse. Fig. 82 enthält diese einfache Linse zwischen den beiden (theilweise) achromatisirten Doppellinsen.

Apochromate.

Endlich ist innerhalb des Rahmens der vorstehend gekennzeichneten Constructionstypen eine Verbesserung nach der qualitativen Seite hin noch erfolgt durch die Einführung der sogen. Apochromate von ABBE, ausgeführt ebenfalls von der ZEISS'schen Werkstätte i. J. 1886. In diesen sind, worauf wir bereits mehrmals Gelegenheit hatten hinzuweisen, mehrere erhebliche Defecte der Strahlenvereinigung beseitigt, welche den bisherigen Systemen anhafteten und deren Leistungsfähigkeit merklich unterhalb des durch die numerische Apertur theoretisch gegebenen Maasses hielten. Es ist nämlich in ihnen[3])

1) das secundäre Spectrum auf etwa den zehnten Theil des bei den früheren Systemen (vergl. pag. 130) verbleibenden Betrages vermindert und damit praktisch ganz unmerklich gemacht.

2) die chromatische Differenz der sphärischen Aberration beseitigt, d. h. die sphärische Aberration ist nicht nur für eine, sondern vollkommen für drei und damit praktisch für alle Farben des sichtbaren Spectrums aufgehoben. Wie wir früher nachwiesen, ist in Folge des Zusammentreffens dieses und des ad 1) erwähnten Momentes auch das secundäre Spectrum für alle Zonen des Systems aufgehoben.

Die auf diese Weise erzielte Strahlenvereinigung ist von der 11. Ordnung, während eine gewöhnliche achromatische Linse eine Strahlenvereinigung von nur der 3. Ordnung herbeiführt. Der Vortheil dieser Systeme besteht einerseits, wie

---

[1]) Die Prioritätsansprüche, welche MAYALL für den amerikanischen Optiker TOLLES erhebt (Cantor lectures pag. 95) erweisen sich bei näherer Prüfung der von ihm selbst angeführten Quelle als gänzlich unhaltbar.

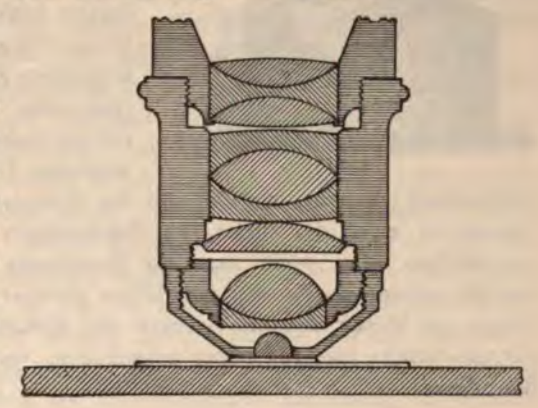
[2]) Siehe die erste Mittheilung über dieses System von J. W. STEPHENSON, Journ. R. Micr. Soc. 1, pag. 51. 1878. E. ABBE, Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1879, Sitzg. v. 10. Jan.

[3]) Vergl. E. ABBE, über Verbesserungen des Mikroskops mit Hilfe neuer Arten optischen Glases. Sitzber. d. Med. Naturw. Ges. Jena 1887, pag. 107. Sitzg. v. 9. Juli 1886. (Mehrfach in andern Ztschr. wiedergegeben. Auch zahlreiche Besprechungen dieser Systeme von Anderen an verschiedenen Stellen.)

erwähnt, in der vollständigeren Ausnützbarkeit ihrer Apertur und zweitens darin, dass sie gemäss dem pag. 232 ff. Ausgeführten die Anwendung starker Oculare, d. h. die Ausführung in grösseren Brennweiten erlauben.

Sie gestatten gleichzeitig eine Verbesserung der Bildqualität ausserhalb der Axe. Denn während bei den Systemen gewöhnlicher Art jeder Zone des Objektivs, wie sie eine andere Vereinigungsweite und andere chromatische Correctur besitzt, so auch eine andere Vergrösserungsdifferenz für die verschiedenen Farben zukommt, so ist hier, in Folge der Herstellung constanten Sinus-Verhältnisses für mehrere Farben, jene Vergrösserungsdifferenz zwar als solche nicht aufgehoben, aber doch für alle Zonen die gleiche. Sie lässt sich daher im Ocular durch eine entgegengesetzt gleiche in diesem stattfindende Vergrösserungsdifferenz völlig aufheben, compensiren. Die betreffenden Oculare sind darum »Compensationsoculare« genannt worden. —

Fig. 83 stellt ein Apochromatsystem von 2 *mm* Aequivalentbrennweite und einer numerischen Apertur von 1·40, sowie dessen Metallfassung in dreifacher natürlicher Grösse im Querschnitt dar. Es hat über der ersten binären Linse dieselbe einfache nahezu planconvexe Linse wie das in Fig. 82 dargestellte achromatische System. Hier folgen jedoch auf sie nach oben hin noch zwei ternäre Combinationen.



(Fig. 83.)

Betreffs der weitern Versuche, die bei den Systemen der homogenen Immersion erreichte Grenze der Apertur (von höchstens 1·40) zu überschreiten, — und dies womöglich unter Wahrung der Vorzüge, welche die Apochromate besitzen — und betreffs der Aussichten, welche die hierauf gerichteten Bestrebungen nach dem gegenwärtigen Stande unserer Erkenntniss überhaupt haben, verweist Verf. auf seine bezüglichen Darlegungen an anderer Stelle[1]).

Oculare.

Ueber die zum Mikroskop gehörigen Oculare und deren häufigste Constructionstypen wollen wir im Zusammenhang mit den beim Fernrohr angewendeten handeln, verweisen daher auf die dort gegebene Darlegung (pag. 256).

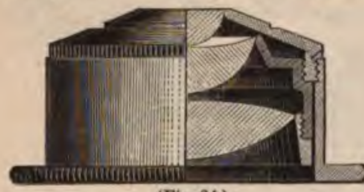
Beleuchtungsapparate.

Es bleiben uns daher nur noch die Vorrichtungen zu erwähnen, welche man angewendet hat, um die Beleuchtung oder vielmehr Durchleuchtung der in sehr

[1]) Betreffs der ersteren S. Czapski, Ueber ein System von der Apertur 1·60 (Monobromnaphtalin-Immersion) hergestellt nach Rechnungen von Prof. Abbe in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena. Ztschr. f. wissensch. Mikroskopie, 6. pag. 417. 1889. Journ. R. Micr. Soc. pag. 11. 1890. s. auch van Heurck. La nouvelle combinaison optique de Mr. Zeiss etc. Anvers 1890.

Betreffs des zweiten Gegenstandes S. Czapski, »Die voraussichtlichen Grenzen der Leistungsfähigkeit des Mikroskops« (Brief an Herrn van Heurck, abgedruckt in 4. Aufl. von dessen »Le microscope«, Anvers 1891, pag. 306). In erweiterter Form Ztschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie 8, pag. 145. 1891, und Biol. Centralblatt 9, pag. 609. 1891.

dünnen Schichten ja fast stets durchscheinenden und daher im durchfallenden Licht beobachteten Präparate auszuführen. Die grossen Aperturen der modernen Systeme machen, damit der beleuchtende Strahlenkegel ihre Apertur entweder voll ausfüllt oder innerhalb der Objektivapertur jede beliebige Richtung erhalten könne, besondere Vorrichtungen nöthig, die sogen. Beleuchtungssysteme (Condensoren), welche im wesentlichen nichts anderes als Objektive in umgekehrter Lage sind. Da, wie die physikalische Theorie der Bilderzeugung im Mikroskop ergiebt, die Ansprüche an die durch solche Beleuchtungssysteme zu bewirkende Strahlenvereinigung (scharfe Abbildung der Lichtquelle,) sehr gering sind, so hat man sich auch meistens entsprechend einfacher Vorrichtungen zu diesem Zwecke bedient, nämlich entweder, bis zu Aperturen von ca. 1·0, einfacher Halbkugeln (mit der planen Seite nach oben) direkt unter dem Objektträger angebracht, oder man wandte Combinationen einfacher unachromatischer Linsen an (Fig. 84), deren Apertur bis ca. 1·40 gesteigert werden kann (ABBE 1873), in späterer Zeit auch annähernd achromatisirte (vor allem von der sphärischen Aberration befreite) Combinationen. Damit eine begrenzte Lichtquelle das ganze Sehfeld auch schwächerer Systeme ausfülle und der Convergenzpunkt der Büschel höchster Apertur in einen der Dicke des Objektträgers entsprechend grösseren Abstand vom System falle, wählt man die Brennweite solcher Beleuchtungssysteme erheblich grösser als die von Objektiven gleicher Apertur, nämlich 10—15 Millim. Ueber das Wesen und die Grenzen der Wirkungsweise solcher Apparate haben wir uns bereits pag. 185 näher ausgelassen, verweisen daher hier auf jene Ausführungen.


(Fig. 84.)

Bezüglich der zum Beleuchtungsapparat gehörigen mechanischen Einrichtungen, andererseits der Beleuchtungsvorrichtungen für undurchsichtige Objekte, sowie überhaupt wegen des ganzen mechanischen Arrangements des Mikroskopstativs, ferner bezüglich der Einrichtung, Wirkungsweise und Anwendung der zahlreichen zum Mikroskop gehörigen Nebenapparate — zum Bewegen, Zeichnen, Messen, zur Erwärmung, elektrischen Reizung der Objekte, zum Beobachten im spectral zerlegten oder polarisirten Lichte, zur Erzeugung aufrechter, stereoskopischer oder reeller Bilder (auf Schirmen), zum Anbringen und schnellen Wechseln der Objektive etc. etc. — müssen wir auf die zahlreichen zum Theil nachstehend aufgeführten Specialwerke und die Kataloge der grösseren mit dem Bau von Mikroskopen sich befassenden Werkstätten verweisen. Wir nennen von den ersteren vornehmlich diejenigen, welche einen Fortschritt in der Darstellung der optischen Theorien repräsentiren. Nämlich aus älterer Zeit:

C. R. GORING and A. PRITCHARD, Micrographia etc. London 1837.

D. BREWSTER, Treatise on the microscope. Edinburgh 1837.

A. CHEVALIER, Des microscopes. Paris 1839. D. Uebers. v. Kerstein. Quedlinburg 1842.

H. v. MOHL, Mikrographie. Tübingen 1846.

P. HARTING, Das Mikroskop etc. D. Ausg. v. Theile 1. Aufl. Braunschweig 1859. 2. Aufl. ibid. 1866. (Von Werth insbesondere der historische Theil dieses Werkes.)

Von neueren Werken:

C. NÄGELI und S. SCHWENDENER, Das Mikroskop. 2. Aufl. Leipzig 1877. (Engl. Uebers. des optischen Theils v. CRISP u. MAYALL. London 1887.)

L. DIPPEL, Das Mikroskop. Bd. 1, Handb. der allg. Mikroskopie. Zweite (unter Mitwirkung

von ABBE bearbeitete) Aufl. Braunschweig 1882. Auszug hieraus: Dess. Verf. Grundz. d. allg. Mikroskopie. ibid. 1885.

W. CARPENTER. The microscope and its revelations, insbesondere die neueste (7.) von H. W. DALLINGER besorgte Aufl. dieses Werks. London 1891.

H. VAN HEURCK. Le Microscope. 4. ed. Anvers 1891. Engl. Uebers. London 1893. Als sehr brauchbare kürzere Darstellung ist empfehlenswerth E. GILTAY Inleiding tot het gebruik van den Microscoop. Leiden 1885.

III. Das Fernrohr.

Für die Beobachtung von Objekten, welche sehr entfernt sind, wäre an sich die Anwendung eines »Teleskopischen Systems« in dem von uns früher gebrauchten Sinne dieses Ausdruckes nicht unbedingt nöthig. Man kann Bilder sehr entfernter Gegenstände mittelst eines Projections-Systems entweder reell auf einen Schirm projiciren oder auch subjektiv beobachten — letzteres indem man sich mit dem Auge in der Richtung der Lichtbewegung anf der Axe um die Weite des deutlichen Sehens vom Bilde entfernt.

Die Benützung der Projectionssysteme in der zuerst gedachten Weise liegt durchaus im Rahmen von deren sonstiger Anwendung und bedarf daher keiner weiteren Erörterung. Der Gebrauch von Projectionssystemen für die subjektive Beobachtung aber würde, wenn selbst in jenen Systemen keine andere Abblendung vorgesehen wäre als die durch die Linsenränder gegebene, eine Art des Strahlenganges herbeiführen, welche gerade die umgekehrte wäre von derjenigen in einer Lupe für ein fernsichtiges Auge. Man hat sich also, um diesen Fall veranschaulicht zu erhalten, in Fig. 62, pag. 206, nur die Bedeutung der Objekt- und Bildseite vertauscht zu denken und die Büschel auf der Objektseite telecentrisch, parallelstrahlig, statt convergent vorzustellen. Eine leichte Ueberlegung zeigt, wie ungünstig die Verhältnisse bei einer derartigen Benützung des Systems sowohl für die Grösse der wirksamen Oeffnung als für die des Sehfeldes werden[1]).

Will man aber, dass das System von unendlich entfernten Objekten auch beliebig entfernte Bilder entwerfe, d. h. dass es ein teleskopisches sei, so ist damit die Zusammensetzung aus zwei getrennten Bestandtheilen, welche mit ihren einander zugewandten Brennpunkten coincidiren, ohne weiteres gegeben.[2]) Die Vortheile, welche die Zusammensetzung aus zwei Partialsystemen mit sich bringt — und welche zum Theil dieselben sind wie beim zusammengesetzten Mikroskop, zum Theil bald unter dem besonderen sich hier darbietenden Gesichtspunkt Erörterung finden werden — sind daher dem Teleskop von vornherein und so zu sagen unwillkürlich zu Theil geworden.

Die Fundamentalwirkung eines teleskopischen Systems, die angulare Vergrösserung, fanden wir (pag. 49) für alle Punkte der Axe constant

[1]) Erstere wird, unabhängig von der Oeffnung des Objektivs, so viel mal grösser als die Augenpupille wie die Brennweite des Systems die Weite des deutlichen Sehens (Abstand des Auges vom Bild) übertrifft. Letzteres umgekehrt wird abhängig von der Grösse der Objektivöffnung, nämlich für die Hauptstrahlen das halbe angulare Sehfeld im Bild gleich dem Verhältniss von halber Objektivöffnung und Abstand des Auges vom Objektiv. Die angulare Vergrösserung endlich wird gleich dem Verhältniss der Objektivbrennweite zur Sehweite.

[2]) Durch Zusammensetzung aus zwei einfachen Dioptern, d. h. einer einzigen entsprechend dicken Linse von passenden Krümmungen lässt sich zwar auch ein teleskopisches System herstellen; ein derartiges würde aber offenbar solche Beengungen im Gebrauch und für die Erzielung weiterer besonderer Eigenschaften mit sich bringen, dass es wohl mehr der Curiosität halber in früherer Zeit von DESCARTES vorgeschlagen worden ist, aber weder damals noch später Beachtung gefunden hat und zu finden verdiente.

$$\Gamma = +\frac{f_1}{f_2'} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{f_1'}{f_2'} \qquad (1)$$

da andere Fälle als $f_1 = -f_1'$, $f_2 = -f_2'$ hier nicht zu berücksichtigen sind. Damit durch diese Fundamentalwirkung das Auge eine Unterstützung erfahre, d. h. $\Gamma > 1$ sei, muss auch $f_1 > f_2$ sein. Demnach bieten sich für die Zusammensetzung des Fernrohrs nur die beiden Möglichkeiten, dass

A. f_1 positiv und f_2 negativ, oder

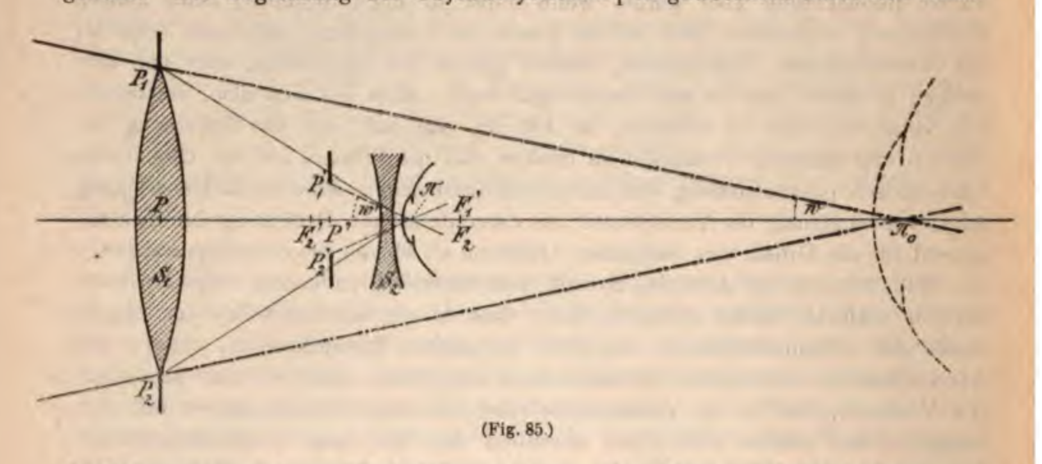
B. f_1 und f_2 beide positiv sind.

Da diese beiden Fälle, welche beide in gewissen Instrumentengattungen realisirt sind, eine verschiedene Art der Strahlenbegrenzung und dementsprechend des Strahlenganges herbeiführen, so müssen wir sie hier getrennt betrachten. Der Fall, dass f_2 zwar auch negativ, aber nicht nach dem Typus einer einfachen Linse, sondern complicirter zusammengesetzt sei, lässt sich dann ohne weiteres im Anschluss an die beiden grundlegenden eben genannten erledigen.

A. Das holländische Fernrohr.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang.

Die Lage der Brennpunkte ist bei diesem Instrument die in Fig. 85 angegebene. Die Begrenzung des Objektivsystems S_1 ist gewöhnlich durch den Rand



(Fig. 85.)

der Fassung von dessen Vorderlinse gegeben. Von dieser wird durch das ganze System bezw. durch das Ocular S_2 ein Bild entworfen, in P', welches vom hinteren Brennpunkt F_2' des Oculars um eine Strecke ξ' entfernt ist, die sich gemäss der bezüglichen Gleichung pag. 49, da F_1 und F_2' einander conjugirt sind in Bezug auf das ganze System, berechnet zu

$$F_2'P' = \xi' = \frac{\xi}{\Gamma^2},$$

wo $\xi = f_1$ und Γ, die Vergrösserung des Fernrohres $= -\frac{f_1}{f_2}$ ist, also

$$\xi' = +\frac{f_1}{\Gamma^2} = -\frac{f_2}{\Gamma}. \qquad (2)$$

Wenn die Ocularlinse nach dem Typus einer einfachen dünnen Linse construirt ist, so steht sie um $-f_2$ von F_2' ab; dann besagt Gleichung (2), dass das Objektivbild immer innerhalb des Instrumentes liegt, zwischen Objektiv und Ocular; und dies ist das unterscheidende Kennzeichen für diese Gattung von Instrumenten in Bezug auf den Strahlengang in ihnen.

Das Bild der Objektivöffnung hat eine Grösse (Halbmesser $P_1' P' = p'$), welche zu der des Objektivs selber, $PP_1 = p$, in dem für das System geltenden constanten Vergrösserungsverhältniss steht

$$\frac{p'}{p} = B = \frac{1}{\Gamma},$$

also

$$p' = \frac{p}{\Gamma}. \tag{2a}$$

Wir müssen hier abermals die beiden Fälle unterscheiden, dass die so bestimmte Austrittsöffnung p' grösser oder kleiner ist als diejenige, π, der Pupille des Beobachters. Nehmen wir den Durchmesser der Pupille $= 4$ *mm*, so liegt der eine oder der andere Fall vor, je nachdem der Durchmesser des Objektivs (in Millim.) grösser oder kleiner ist als das 4fache der mit dem Instrument erzielten Vergrösserungsziffer beträgt. Das Bild der Objektivöffnung, $P_1' P_2'$, ist nun in jedem Falle die eine der beiden Begrenzungen, welche stets für die durch ein Instrument tretenden Strahlen vorhanden sind. Ist dieses Bild kleiner als die Pupille des Auges, so stellt es die Aperturblende vor, und die Pupille des Auges ist dann die Gesichtsfeldblende (vergl. die analogen Betrachtungen pag. 207, Fig. 64); wenn aber das Objektivbild grösser ist als die Augenpupille, so wird diese die Aperturblende und jenes wird die Gesichtsfeldblende (vergl. Fig. 63). In beiden Fällen liegt die Gesichtsfeldblende ausserhalb, sogar erheblich ausserhalb des Bildes selbst, lässt also in diesem dieselben drei Zonen unterscheiden, welche wir pag. 207 namhaft gemacht haben, nämlich einen centralen kreisförmigen Theil, ab (vergl. Fig. 63 und 64 daselbst), von constanter und maximaler Helligkeit, in welchem die volle Apertur der Büschel wirksam ist; um diesen herum einen Ring, in welchem, bis AB, die Helligkeit abnimmt bis nur noch die Axen der Büschel in das Auge gelangen und endlich eine äusserste Zone, bis $\alpha\beta$, in welcher die Helligkeit auf den Werth 0 herabsinkt.

Die Bestimmung dieser drei Gebiete und der für die Mitte wirksamen Apertur hat in beiden Fällen ganz ebenso zu erfolgen wie mittelst der Gleichungen (2) und (3) pag. 207/8, wenn man dort für p die gemäss unserer Gleichung (2) bestimmte Grösse p', für π ebenfalls den Halbmesser der Augenpupille setzt und für d die Entfernung der Augenpupille vom Objektivbild P' II, die wir hier mit d' bezeichnen wollen. Das Sehfeld wird unter sonst gleichen Umständen desto grösser, je kleiner diese Entfernung ist. Da nun wie bemerkt das Objektivbild bei dem holländischen Fernrohr stets im Innern des Instruments liegt, so ist der Annäherung des Auges die Grenze gesetzt, dass dieselbe höchstens bis an die Ocularlinse erfolgen kann. (Genauer gesagt, würde selbst bei wirklicher Berührung der Hornhaut mit der unendlich dünn gedachten Ocularlinse die Pupille immer noch um ihren eigenen Cornealabstand, d. i. 3 *mm*, von ihr abstehen, in Wirklichkeit aber gewöhnlich um mindestens 10 *mm*; dazu kommt dann noch die auch immer einige Millimeter betragende Entfernung des Linsenscheitels vom zugehörigen Hauptpunkt).

Nennen wir den Abstand der Augenpupille von (dem 2. Hauptpunkte) der Ocularlinse b, so berechnet sich der Abstand der Pupille vom Objektivbild zu

$$d' = b + f_2 - \frac{f_1}{\Gamma^2} = b + f_1 \frac{\Gamma - 1}{\Gamma^2}; \tag{3}$$

also ist die Tangente des Sehfeldes der drei Gebiete im Bildraum im einen Fall, $p' > \pi$,

$$tg\, w' = \frac{p' - \pi}{d'} = \frac{\left(\frac{p}{\Gamma} - \pi\right)\Gamma^2}{b \cdot \Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} = \frac{(p - \pi\Gamma)\Gamma}{b \cdot \Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} \tag{3a}$$

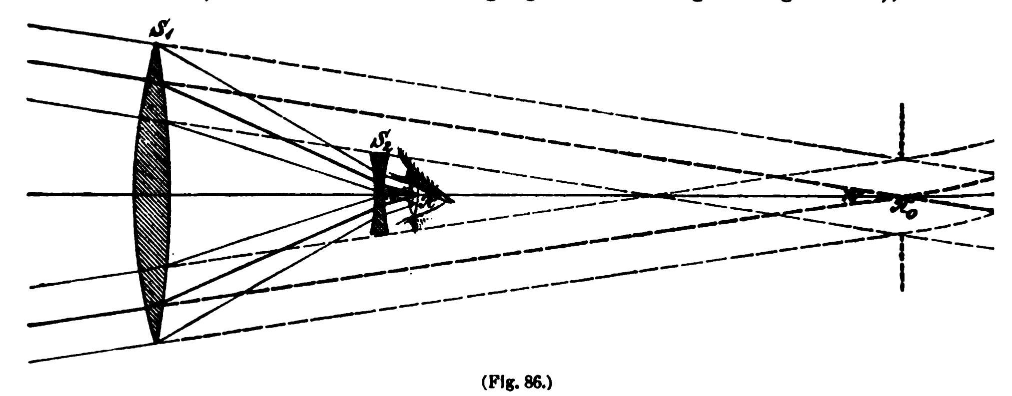
$$tg\, W' = \frac{p \cdot \Gamma}{b\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} \tag{3b}$$

$$tg\, \omega' = \frac{(p + \pi\Gamma)\Gamma}{b\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)}; \tag{3c}$$

und ganz entsprechend in dem andern Fall ($p' < \pi'$) gemäss Gleichung (3) pag. 208.

Die Tangenten der diesen Bildwinkeln entsprechenden Winkel im Objektraum w, W, ω sind einfach je der Γte Theil der oben angegebenen, werden also erhalten, indem man in den obigen drei Gleichungen rechts den Faktor Γ jedesmal weglässt. Diese Gleichungen kann man auch direkt erhalten, indem man die Bedeutung der im Bildraum stattfindenden Strahlenbegrenzung für den Objektraum feststellt. Dieselbe Function, welche das Bild der Objektivöffnung im Ersteren hat, kommt hier der Objektivöffnung selber zu, und diejenige Function, welche im Bildraum die Pupille des Auges hat, wird hier ausgeübt durch das vom ganzen System nach der Objektseite hin entworfene Bild dieser Pupille, Π_0.

Denken wir uns dies rechnerisch oder graphisch construirt, so ergiebt sich ohne weiteres der Strahlengang für das holländische Fernrohr. Ist die Objektivöffnung grösser als die Augenpupille (die Vergrösserung kleiner als der 4te Theil des Objektivdurchmessers), so resultirt ein Strahlengang wie der in Fig. 86 dargestellte[1]); ist das



(Fig. 86.)

Umgekehrte der Fall, so wird der Strahlengang entsprechend demjenigen, welcher in Fig. 73 pag. 218 für das CHEVALIER'sche (Präparir-) Mikroskop dargestellt ist. Nach unserer früheren Bezeichnung ist also im ersteren, uns hier vornehmlich interessirenden Falle das objektseitige vergrösserte Bild der Augenpupille, Π_0, die wahre Eintrittspupille des Instruments, die Augenpupille selbst Austrittspupille. Die Objektivöffnung bildet die Gesichtsfeldblende im Objektraum, das vom ganzen System entworfene Bild P' derselben die entsprechende Blende im Bildraum. Im andern Falle, $p' < \pi$, vertauschen P und Π_0, P' und Π nach Lage und Grösse einfach ihre Functionen.

Insoweit also nicht etwa die Augenlinse ihrerseits eine Beschränkung der Apertur herbeiführt, ist beim holländischen Fernrohr, in welchem $p' > \pi$, $p > \pi_0$ ist, und welches wir im besonderen »Perspectiv« nennen wollen, die Helligkeit in der Mitte des Sehfeldes immer gleich der des Sehens mit blossem Auge —

[1]) Die Vergrösserung ist in Fig. 85 und 86 eine 4fache; das Pupillenbild musste jedoch in beiden aus Raummangel doppelt so nahe an das Ocular herangerückt werden, als es in Wirklichkeit liegt.

abgesehen von den durch partielle Reflexion an den Linsen verursachten Verlusten. Die Grösse des von den Hauptstrahlen begrenzten objektseitigen Sehfeldes ist proportional dem Durchmesser des Objektivs; es ist desto kleiner, je weiter das Auge vom Instrument absteht und je grösser für gleiche Vergrösserung die Brennweite des Objektivs ist.

Im Grenzfall, $b = 0$, ist

$$tg\, W = \frac{p}{d} = \frac{p}{f_1(\Gamma - 1)}; \qquad tg \begin{Bmatrix} w' \\ \omega \end{Bmatrix} = \frac{p \mp \pi\Gamma}{f_1(\Gamma - 1)} \tag{4}$$

oder wenn wir $f_1 + f_2 = L$, den Abstand des Objektivs vom Ocular, d. h. die Länge des Perspectivs (beide Linsen als verschwindend dünn angenommen) einführen, so ist

$$tg\, W = \frac{1}{L} \frac{p}{\Gamma}$$

$$tg \begin{matrix} w' \\ \omega \end{matrix} = \frac{1}{L} \left(\frac{p}{\Gamma} \mp \pi \right), \tag{4a}$$

also das Sehfeld desto grösser, je kürzer das Instrument bei gegebener Vergrösserung und Objektivöffnung ist[*]).

Durch Bewegung des Auges senkrecht zur Axe kann man das Sehfeld bei diesem Instrument für ungeänderte Lage desselben vergrössern; denn eine solche Bewegung hat in der betreffenden Richtung offenbar den gleichen Einfluss wie eine Vergrösserung der Pupille bei centraler Lage derselben.

[*]) Der Strahlengang im holländischen Fernrohr wird fast stets falsch dargestellt, nämlich so, wie er nur bei einer das vierfache der Objektivöffnung übersteigenden Vergrösserung ist, also analog Fig. 73. Die erste richtige Darstellung habe ich in F. MOSSOTTI's Nuova teoria degli stromenti ottici, Pisa 1859, pag. 55 u. 87 gefunden. Offenbar unabhängig von diesem kam auf die Fehlerhaftigkeit der üblichen Auffassung N. LUBIMOFF, (CARL's Repert. 8, pag. 336, u. POGG. Ann. 148, pag. 405, 1873.) An seine Publikation knüpften sich wiederholt Discussionen; zuerst zwischen ihm, BREDICHIN u. BOHN (CARL's Repert. 9. pag. 97, 108, 381), zehn Jahre später noch einmal zwischen PSCHEIDL (CARL's Rep. 18, pag. 686) und BOHN (EXNER's Rep. 19, pag. 243), s. auch CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 7. pag. 409. 1887, 8, pag. 102. 1888. Trotzdem habe ich von neueren Werken nur in denen der Italiener G. FERRARIS (Fundamentaleigenschaften etc., pag. 419) und BILLOTTI (Teoria etc., pag. 137), sowie in VIOLLE's Lehrbuch der Physik die fraglichen Verhältnisse richtig dargelegt gefunden.

Das Gesichtsfeld ist nach der üblichen Darstellung — und bei den stark vergrössernden holländischen Fernrohren in der That — gleich dem Sehwinkel, unter welchem die Augenpupille vom Objektiv aus erscheint, nach der hier vorgetragenen aber gleich demjenigen, unter welchem das Objektivbild vom Auge aus erscheint.

Wird ein galiläisches Fernrohr als Ganzes benützt, um nach einer geringen Distanzänderung von Objektiv und Ocular reelle Bilder auf einem Schirm zu entwerfen (Telephotographie, MIETHE s. oben pag. 205) so ist der Strahlengang natürlich nicht mehr von der Augenpupille sondern von den etwa sonst vorgesehenen Blenden abhängig.

Ansprüche an die Bildeigenschaften von holländischen Fernröhren.

Das holländische Fernrohr darf für schwache Vergrösserungen, als Perspectiv, nicht als ein zusammengesetztes Instrument aufgefasst werden, unter den Gesichtspunkten, welche wir für die starken Mikroskope geltend machen konnten und welche ebenso für die starken Fernrohre bestehen. Bei einer 2—6fachen Vergrösserung, wie sie in diesen Instrumenten gewöhnlich erreicht ist, sind die Aberrationen im Ocular zwar unter sonst gleichen Umständen auch 2—6 mal geringer als diejenigen im Objektiv, aber mit eben diesem Maassstab doch vergleichbar mit jenen. Die wünschenswerthen Bildeigenschaften sind daher im Perspectiv ebenso zu erreichen wie in den zusammengesetzten Projectionssystemen

(photogr. Objektiven) oder wie in den Objektiven der Mikroskope, indem man entweder jeden Theil in Bezug auf diejenigen Eigenschaften und mit demjenigen Strahlengang, mit welchem er in Anspruch genommen wird, für sich corrigirt (aberrationsfrei macht), oder indem man die entsprechenden Fehler im Objektiv und Ocular nachdem Princip der gegenseitigen Compensation ausgleicht. Als die hier zu beachtenden Bildeigenschaften sind hervorzuheben

1) Die sphärische Aberration in der Axe. Wir werden bei der Erörterung des astronomischen Fernrohrs zeigen, dass dieselbe eine ziemlich geringe Rolle spielt wegen der Kleinheit der mit dem ganzen Instrument erreichten Vergrösserung. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass diese Aberration überhaupt nur innerhalb desjenigen Theils der Objektivöffnung aufgehoben zu sein braucht, welcher $= \Gamma\,\pi$, d. h. gleich der Eintrittspupille ist und nicht für das ganze Objektiv.

2) Die chromatische Aberration in der Axe. Für diese gilt das Gleiche wie für die sphärische.

3) Die Aberrationen ausser der Axe. Diese sind im Perspectiv von grösserer Bedeutung. Nimmt man irgend eine Lage der Augenpupille gegen das Instrument als die normale an, so müssen

a) die nach ihrer Neigung und Oeffnung gemäss dem sich für diese Lage ergebenden Strahlengang construirbaren Büschel genügend frei von Wölbung, Astigmatismus und Coma sein, damit die excentrischen Theile des Sehfeldes einigermaassen scharf erscheinen.

b) die Punkte Π und Π_0 orthoskopische Punkte des ganzen Systems sein, d. h. es muss in ihnen das Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahlenaxenwinkel bis zu den grössten vorkommenden Winkeln w bezw. w' ein constantes sein, damit das Bild frei von Verzerrung erscheine.

c) die chromatische Differenz der Vergrösserung muss aufgehoben sein innerhalb derselben Bereiche, d. h. es muss Orthoskopie in Π und Π_0 für mehrere (mindestens 2) Wellenlängen des sichtbaren Spectrums bestehen und das angulare Vergrösserungsverhältniss $\Gamma = \frac{tg\,w'}{tg\,w}$ muss für die betreffenden Wellenlängen das gleiche sein.

Nun ist aber zu bedenken, dass in diesen Instrumenten die Lage des Auges weder in Richtung noch senkrecht zu der Axe wirklich genau fixirt ist, sondern der gewöhnliche Gebrauch ziemliche Schwankungen in beiden Richtungen von selbst mit sich bringt. Wenn daher ein Instrument für eine bestimmte Lage des Auges vollkommen den unter a) b) c) namhaft gemachten Bedingungen genügte, eine Abweichung des Auges von der betreffenden Lage aber erhebliche Aenderungen in der Bildqualität nach irgend einer Seite hin herbeiführte, so würde dasselbe im gewöhnlichen Gebrauch immer als ein sehr mangelhaftes erscheinen. Es muss daher, ganz ähnlich wie bei den Lupen, als eine besondere Bedingung beim Perspectiv die aufgestellt werden, bezw. in guten Instrumenten erfüllt sein, dass

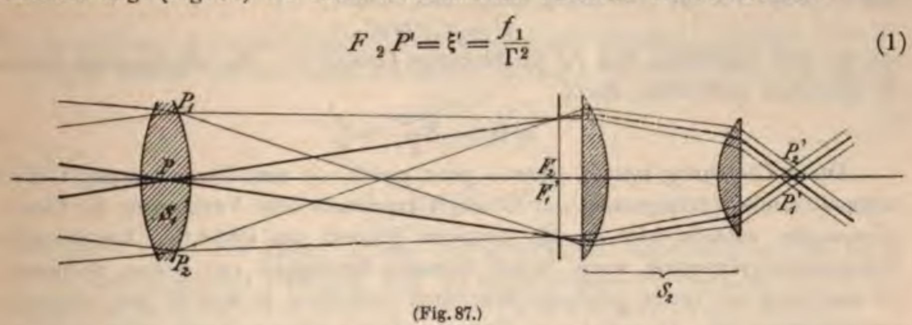
4) Die Bildqualität in keiner Beziehung durch Aenderung der Augenlage erheblich beeinflusst wird. Eine genauere Diskussion dieser letztern Anforderung zeigt, dass in Folge derselben die unter 1) bis 3) namhaft gemachten Bedingungen nicht nur innerhalb derjenigen Oeffnung des Objektivs erfüllt sein müssen, welche gemäss der Grösse der Pupille bei einer Lage derselben von den Strahlenbüscheln in Anspruch genommen wird, sondern für *die ganze* Objektivöffnung.

B. Das astronomische Fernrohr.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang.

Das Unterscheidende für das astronomische Fernrohr gegenüber dem holländischen liegt sowohl bei Anwendung einer einfachen Sammellinse als Ocular wie bei der Benützung eines zusammengesetzten Oculars darin, dass durch diese das Bild der Objektivöffnung jenseits ihrer letzten Fläche, im zugänglichen Theil des Raumes entwerfen wird. In der That liegt ja schon der zweite Brennpunkt F_2' des Oculars selber bei einer einfachen Sammellinse und ebenso bei geeignet angeordneten Combinationen von Solchen jenseits, rechts, von der Linse, also ist dies mit dem Bild der Objektivöffnung um so mehr der Fall. Dasselbe liegt (Fig. 87) wie beim holländischen Fernrohr um die Strecke

$$F_2 P' = \mathfrak{x}' = \frac{f_1}{\Gamma^2} \tag{1}$$



(Fig. 87.)

hinter dem zweiten Brennpunkt F_2' des Oculars, und sein Halbmesser p' steht zu dem des Objektivs p wiederum in dem constanten Verhältniss der teleskopischen Vergrösserung

$$\frac{p'}{p} = B = \frac{1}{\Gamma}. \tag{1a}$$

Das Auge kann daher jedenfalls mit dem Objektivbild in Coincidenz gebracht werden. Nur in dem Falle, dass $p' > \pi$, wirkt seine Pupille als Aperturblende, die Oeffnung der abbildenden Büschel beschränkend; keinesfalls als Gesichtsfeldblende. Im Falle $p' < \pi$ ist das Bild der Objektivöffnung nach Lage und Grösse Aperturblende, Austrittspupille, das Objektiv selber Eintrittspupille.

Das Gesichtsfeld würde, wenn es durch eine der Ocularlinsen begrenzt würde, in gleicher Weise wie beim holländischen Fernrohr drei Gebiete von verschiedener Helligkeit unterscheiden lassen. Es wird aber allgemein an derjenigen Stelle, an welcher das Objektiv oder dieses in Verbindung mit einem Theil des Oculars ein reelles Bild des Objektes entwirft, durch eine besondere Blende scharf begrenzt. Die Grösse dieses Diaphragmas wird unter dem Gesichtspunkt gewählt, dass einmal innerhalb desselben die Helligkeit eine gleichmässige, also der diesbezügliche Einfluss der Ocularlinse ausgeschlossen sein soll, und ferner das Sehfeld nur so weit reicht, als, sei es das Objektiv, sei es das Ocular seinerseits, sei es Beide zusammen, genügend scharfe Abbildung geben. Im Allgemeinen, namentlich bei Objektiven längerer Brennweite, ist es das Ocular, welches eine scharfe Abbildung über einen gewissen Winkel hinaus nicht mehr zulässt. Der Gesichtsfeldwinkel im Ocular ist also derjenige, unter welchem jene Blende durch den hinter ihr befindlichen Theil des Oculars hindurch von der *A.-P.* aus erscheint, der objektseitige Gesichtsfeldwinkel ist der Γte Theil von jenem. Der Strahlengang, welcher sich demgemäss für das astronomische Fernrohr mit positivem Ocular ergiebt, ist in Fig. 87 veranschaulicht.

Einfluss der Aberrationen von Objektiv und Ocular auf das Bild.

Abberrationen ausser der Axe. Nach dem Obigen können wir in der Gleichung für die Vergrösserung eines Teleskops mit positivem Ocular

$$\frac{tg\, w'}{tg\, w} = \Gamma \tag{2}$$

w' als gegeben ansehen. Also ist w, das Sehfeld, welches das Objektiv abzubilden hat, desto kleiner, je stärker die Gesammtvergrösserung ist.

Das vom Objektiv entworfene Bild y' dient als Objekt der Abbildung für das Ocular. Nehmen wir an — was sehr annähernd wirklich der Fall ist — dass Oculare verschiedener Stärke einander in allen Dimensionen einfach proportional sind, so ist der Gesichtsfeldwinkel w' derselben der gleiche, der lineare Durchmesser y' der das Bild begrenzenden Blende aber proportional ihrer Brennweite. Wir haben daher für die Abbildung durch das Ocular

$$y' = f_2' \cdot tg w' \tag{3}$$

wo w' eine gegebene, von f_2' unabhängige Grösse ist. Das objektseitige Sehfeld ist demnach darstellbar durch

$$tg\, w = \frac{tg\, w'}{\Gamma} = \frac{y'}{f_1} \tag{4}$$

Diese Gleichung besagt, dass — ganz gleich, ob eine Vergrösserung Γ durch entsprechende Verlängerung der Objektivbrennweite oder Verkürzung der Ocularbrennweite erreicht wird — das angulare Sehfeld des Objektivs bei derselben Gesammtvergrösserung auch immer derselbe Bruchtheil von dessen Brennweite ist und zwar ein desto grösserer Bruchtheil derselben, je stärker jene Gesammtvergrösserung ist. Je stärkere Gesammtvergrösserungen man also mit dem Fernrohr erzielt, desto geringer sind die Ansprüche, welche man an die Bildqualität (Aufhebung der Aberrationen) des Objektivs ausser der Axe zu stellen braucht. Es genügt daher selbst bei ziemlich schwachen Vergrösserungen (10—20 fachen), die Erfüllung der Sinusbedingung, um eine hinreichend scharfe Abbildung innerhalb des ganzen, vom Ocular in Anspruch genommenen Sehfeldes zu erzielen. Bei den grösseren Refraktoren ist die Abbildung in deren kleinem Sehfeld ohne weiteres immer genügend vollkommen.

Desgleichen ist die Verzerrung, Disproportionalität der Vergrösserung, mit zunehmendem Abstand von der Mitte des Bildes desto weniger merklich, je stärker die angewandte Vergrösserung ist. (Die orthoskopischen Punkte im Objektiv kann man unbedenklich in den Scheitel desselben vereinigen; die thatsächliche Blende und deren Bild wird immer nur relativ sehr wenig von dieser Lage abweichen.)

Das Gleiche endlich ist in Bezug auf die Bildwölbung der Fall. Es werden also mit zunehmender Vergrösserung die Aberrationen ausser der Axe im Objektivbild immer irrelevanter gegenüber den

Aberrationen in der Axe. Wir haben diese nach ganz gleichen Normen zu bestimmen und in ihrem Einfluss auf das letzte Bild zu beurtheilen wie beim Mikroskop. Sei der Durchmesser des Zerstreuungskreises der sphärischen Aberration des Objektivs, in seinem angularen Betrage d. h. bezogen auf die Objektseite $= \zeta$, so erscheint derselbe im letzten Bilde, durch das Ocular gesehen, in der Grösse $\Gamma \cdot \zeta$ wenn Γ die Gesammtvergrösserung ist. Wir haben also die Bedingungen dafür aufzusuchen, dass dieser Winkel nicht grösser werde als der Grenzwinkel ε für die Sehschärfe des Auges z. B. $\varepsilon = 2'$. Und ganz ebenso bei der chromatischen Abweichung bezw. deren Resten.

Bei dem Fernrohr spielt die lineare Oeffnung in Bezug auf das Abbildungsvermögen die gleiche Rolle wie beim Mikroskop die numerische Apertur. Einer gegebenen Oeffnung entspricht also eine bestimmte Grenze des Unterscheidungs-

vermögens und zwar ist der angulare Durchmesser ρ des Beugungscheibchens, als welches jeder Punkt des Objekts durch ein dioptrisch vollkommenes Fernrohr objektiv abgebildet wird, gemessen vom hinteren Knotenpunkte desselben

$$\rho = \frac{\lambda}{2p}; \tag{5}$$

also ist er ebenso gross auf die Objektseite bezogen. Hiernach ist die der Oeffnung $2p$ entsprechende Normalvergrösserung Γ_0 bestimmbar, nämlich derart, dass für sie das Beugungsscheibchen ρ unter einem Winkel von $2'$ erscheine oder was auf dasselbe hinauskommt, die Austrittspupille $2p' = 1$ *mm* werde. Dann ist

$$\Gamma_0 \rho = \frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma_0}{p} = \frac{\lambda}{2p'} = 0{\cdot}00055 \tag{6}$$

$$\Gamma_0 = \frac{p}{p'} = \frac{p}{0{\cdot}5} = 2p, \tag{6a}$$

also kommt auf je 1 *mm* Objektivdurchmesser eine Vergrösserungsziffer

Nun fanden wir das erste Glied der sphärischen Aberration pag. 91

$$\zeta_1 = \left(\frac{p}{f}\right)^3 K_1, \tag{7}$$

demnach

$$\varepsilon_\zeta = \left(\frac{p}{f}\right)^3 K_1 \Gamma = \frac{p^3 K_1 \Gamma}{f^3} \tag{7a}$$

d. h. der Einfluss des ersten Gliedes der sphärischen Aberration auf das letzte Bild ist bei gegebener Oeffnung und ihr entsprechender Vergrösserung umgekehrt proportional der dritten Potenz der Objektivbrennweite.

Ebenso ist zu zeigen, dass der Einfluss der höheren Glieder der sphärischen Aberration umgekehrt proportional der 5., 7. etc. Potenz der Objektivbrennweite ist.

Die chromatische Abweichung, in gleicher Weise bemessen, fanden wir

$$\gamma = \left(\frac{p}{f}\right) G, \tag{8}$$

demnach

$$\varepsilon_\gamma = \Gamma \cdot \gamma = \left(\frac{p}{f}\right) G \cdot \Gamma = \frac{p \cdot G \cdot \Gamma}{f}, \tag{8a}$$

also ist diese Abweichung, ebenso wohl als »primäres« wie als »secundäres« Spectrum bei gegebenem Constructionstypus einerseits proportional dem Oeffnungsverhältniss des Objektivs, andrerseits bei gegebener Oeffnung und ihr entsprechender Vergrösserung umgekehrt proportional der Objektivbrennweite.

Hiernach ergiebt sich z. B., dass eine einfache Crownglaslinse mit dem Brechungsexponenten $n_D = 1{\cdot}5$ und dem Zerstreuungsverhältniss

$$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{60},$$

was die sphärische Aberration (1. Ordnung) betrifft bei günstigster Form (vergl. pag. 93) für ein Oeffnungsverhältniss von

	$\left(\frac{2p}{f}\right) =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$
einen Werth von	$\Gamma =$	ca 2	7	16
und einen Durchmesser	$2p =$	4 *mm*	14 *mm*	32 *mm*
also eine Brennweite	$f =$	40 „	210 „	640 „

erhalten darf. Setzt man die zulässige Fehlergrenze statt bei $2'$ bei $4'$, so verdoppeln sich die Zahlen der zweiten dritten und vierten Zeile.

Hingegen erlaubt die chromatische Aberration einer solchen Linse bei den gleichen Oeffnungsverhältnissen wie oben nur Werthe von

$\Gamma =$	0·67	1	1·33
$2p =$	1·33 *mm*	2 *mm*	2·67 *mm*
$f =$	13·3 *mm*	30 *mm*	53·3 *mm*.

Das secundäre Spectrum eines gewöhnlichen achromatischen Doppelobjektivs kann man in seinem Winkelbetrage etwa $= \frac{1}{1000}$ annehmen. Dasselbe ist daher für $\frac{2p}{f} = \frac{1}{15}$ ganz unmerklich bei Objektiven von weniger als 10 *mm* Oeffnung, erreicht aber in den modernen Rieseninstrumenten den Betrag von mehreren Graden.

Da das Objektiv und das zu ihm gehörige Ocular von den Strahlenbüscheln stets mit gleichem Oeffnungsverhältniss in Anspruch genommen werden, so zeigen obige Erörterungen, dass auch beim Fernrohr in Bezug auf die Abbildung in der Axe die möglichen Aberrationen des Oculars mit wachsender Vergrösserung immer mehr zurücktreten hinter denen des Objektivs, da proportional mit der Vergrösserung das Verhältniss der Objektivbrennweite zur Ocularbrennweite wächst.

Die Oculare der Mikroskope und Fernrohre.

Die Ansprüche an die Leistungen, daher auch die Construction der Oculare für Fernrohre und Oculare sind im wesentlichen die gleichen; denn wie wir früher gesehen haben, kann das Mikroskop bei einigermaassen erheblicher Objektivvergrösserung als ein aus Lupe und Fernrohr zusammengesetztes Instrument angesehen werden. Die Ansprüche an die Leistungen der Mikroskop-Oculare sind nur insofern geringer wie die von den Fernrohrocularen zu vollziehenden, als bei diesen die Apertur der wirksamen Büschel eine grössere zu sein pflegt ($\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{5}$ beim Fernrohr gegenüber $\frac{1}{80}$ bis $\frac{1}{20}$ beim Mikroskop).

Eine geringe Verschiedenheit besteht ferner darin, dass der Augenpunkt (das vom Ocular entworfene Bild der Objektivöffnung, bezw. der *A.-P.* des Objektivs) bei den Fernrohren, entsprechend deren im Allgemeinen grösseren Dimensionen näher an dem hinteren Brennpunkt des Oculars liegt wie im Mikroskop. Immerhin kann man ein Ocular, welches am Fernrohr gute Dienste leistet, fast stets ohne weiteres auch am Mikroskop benützen; höchstens bedarf es einer geringen Modification seiner Zusammensetzung.

Wir haben die Anforderungen, welche an die Wirkung der Oculare zu stellen sind, bereits früher namhaft gemacht (pag. 221). Für die Erfüllung derselben sind aber nur wenige allgemein gültige Normen gefunden worden. Neben der Zusammensetzung aus einer, wesentlich den Strahlengang (Richtung der Hauptstrahlen) regulirenden Collektivlinse und einer vornehmlich die Lupenwirkung vollziehenden Augenlinse ist es fast nur die Aufhebung der chromatischen Vergrösserungsdifferenz, welche zu einer einfachen Regel geführt hat.

Beim Mikroskop geht die Forderung gleicher Vergrösserung für verschiedene Farben über in die gleichen Tangentenverhältnisse in den Pupillen des Oculars. Beim Fernrohr, wo die *E.-P.* des Oculars — das Objektiv — relativ weit von demselben entfernt ist, die *A.-P.* also nahezu in den hinteren Brennpunkt fällt, kommt jene Forderung darauf hinaus, die Aequivalentbrennweite des Oculars von der Variation mit der Farbe des Lichts zu befreien. Wir sahen (pag. 126), dass dies selbst mit zwei einfachen dünnen Linsen aus gleichem Material möglich ist, wenn deren Distanz D das arithmetische Mittel ihrer Brennweiten ist

$$D = \frac{f_1 + f_2}{2}.$$

In den beiden ältesten und noch gegenwärtig üblichsten Oculartypen, dem sogen. Huyghens'schen[1]) und dem Ramsden'schen[2]) Ocular ist dieser Bedingung in

[1]) Dioptrica, Prop. II. Ich habe trotz vielem Suchen nicht finden können, warum dieses oder ein ähnlich construirtes Ocular oft nach dem seiner Zeit berühmten praktischen Optiker Campani benannt wird; es scheint diese Bezeichnung auf Tradition zu beruhen.

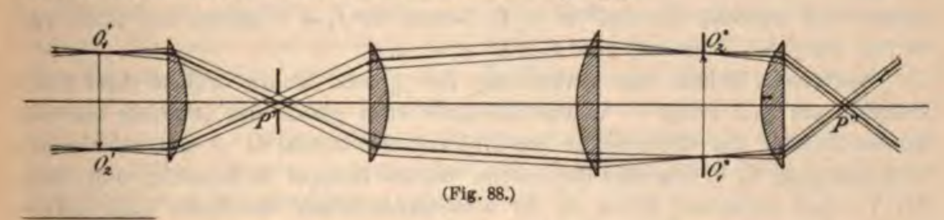
[2]) *Phil. Trans.* 1783, pag. 94.

der Weise genügt, dass bei ersterem $f_1 = 2f_2$, also $D = \frac{3f_2}{2}$ oder $f_2 : D : f_1 = 2 : 3 : 4$ ist, bei letzterem aber $f_1 = f_2 = D$. Bei ersterem liegt also der vordere Brennpunkt im Ocular, zwischen erster und zweiter Linse; ein reelles Bild kommt dann zwischen den Linsen zu Stande (vergl. Fig. 72). Bei dem RAMSDEN'schen Ocular liegt der vordere Brennpunkt in der ersten Linse selber; er wird aus praktischen Gründen um ein weniges vor dieselbe gelegt[1]) (Fig. 87).

Das HUYGHENS'sche Ocular enthält gewöhnlich zwei mit ihren gekrümmten Seiten nach dem Objektiv gewandte planconvexe Linsen; das RAMSDEN'sche zwei ebensolche mit ihren convexen Flächen einander zugewandte — beide um vermöge einer solchen Anordnung den übrigen an die Bildqualität zu stellenden Anforderungen innerhalb des gegebenen Rahmens möglichst zu entsprechen.

Von den Bemühungen, die Oculare durch Anwendung achromatischer Combinationen zu vervollkommnen, waren insbesondere die von C. KELLNER[2]) bemerkenswerth, welcher eine klare Einsicht in die hier zu erfüllenden Bedingungen besass. Dass die gleichgerichteten Bestrebungen AIRY's[3]), LITTROW's[4]), BIOT's[5]), SANTINI's[6]) u. A. irgend nennenswerthen Erfolg gehabt hätten, ist mir nicht bekannt geworden. Hingegen wird mit Recht die Leistung der astronomischen Oculare von MITTENZWEY gerühmt.

Um aufrechte Bilder zu erzeugen, kann man beim Fernrohr — und auch beim Mikroskop — entweder ein schwach vergrösserndes Mikroskop von negativer Brennweite als Ocular anwenden und man thut dies in der That, wenn es sich um ein starkes Ocular, von kurzer Brennweite, handelt; oder man benützt (der einfacheren Herstellung wegen) Zusammenstellungen einfacher Linsen, wie sie seit den ältesten Zeiten, z. B. mit besonderem Erfolge von DOLLOND und von FRAUNHOFER in deren terrestrischen Fernrohren angewandt wurden. Diese enthalten zwischen Ocular und Objektiv ein sogen. bildumkehrendes System aus zwei oder mehr einfachen planconvexen Linsen bestehend. Fig. 88 veranschaulicht ein solches und den in ihm stattfindenden Strahlengang[7]).



(Fig. 88.)

[1]) Die Unterscheidung dieser beiden Oculare als negatives und positives ist ganz missverständlich und sollte besser unterbleiben.

[2]) Das orthoskopische Ocular, Braunschweig 1849.

[3]) Principles and construction of achromatic eyepieces of telescopes etc. (1824). Cambr. Phil. Trans 2. 1827. Ders., Spherical aberration of eye pieces of telescopes (1827), ibid. 3, pag. 1. 1830.

[4]) BAUMGARTNER und v. ETTINGSHAUSEN's Zeitschr. f. Phys. u. Math. 4, pag. 17, 195, 501. 1828 (astron. u. terrestr. Oculare), auch Dioptrik, Wien 1830, 2. Abthlg. und Art. Mikroskop in GEHLER's Physik. Wörterb. Leipzig 1837, Bd. VI, 3, pag. 2238 ff.

[5]) Sur les lunettes achrom. à ocul. multiples (terrestr. Oc,) Mém. Ac. de Paris 19, pag. 1. 1842.

[6]) Al calcolo degli ocul. per i canocch. astron. etc. Mem. Ist. Venet. 1841.

[7]) Nähere Angaben über dieselben findet man in mehreren der in dem voranstehenden Anmerkungen genannten Abhandlungen und Werke sowie namentlich auch in J. J. PRECHL's Praktische Dioptrik, Wien 1828.

Handelt es sich darum, terrestrische Fernrohre herzustellen, welche nur schwache Vergrösserungen (10—20) bei möglichster Kürze ergeben sollen, so müssen wieder Objektiv und Ocular als ein einziges System behandelt und die Aberrationen in und ausser der Axe durch gegenseitige Compensation in ihnen gehoben werden.

Die Constructionsformen des Fernrohrs in geschichtlicher Entwickelung.

A. Das holländische Fernrohr.

Dasselbe wurde bekanntlich in den letzten Jahren des 16. oder (wahrscheinlicher) in den ersten des 17. Jahrhunderts in Holland erfunden oder vielmehr ebenso wie das zusammengesetzte Mikroskop mehr gefunden (wahrscheinlich von LIPPERHEY in Middelburg[1]). Sicher ist, dass GALILEI es 1609 auf die Nachricht von seiner Existenz hin nach bewussten Grundsätzen selbständig construirt, d. h. neu erfunden hat[2]). Dasselbe war natürlich bis zur Entdeckung der Achromasie, wie alle andern optischen Instrumente, aus 2 einfachen Linsen zusammengesetzt und mit allen Fehlern solcher behaftet. Mehr noch als diese wirkte störend bei seiner Anwendung die Kleinheit des Sehfeldes. Wie wir gesehen haben, ist das Sehfeld bei starken Vergrösserungen — wo eine das 4fache der Vergrösserungsziffer übersteigende Objektivöffnung sich von selbst verbietet — im Grenzwerth gleich dem Winkel, unter welchem die Pupille des Auges vom Objektivbild aus erscheint. Letzteres kann bei einigermaassen erheblichen Brennweiten als im hintern Brennpunkt der Ocularlinse liegend angenommen werden. Die Brennweite des Oculars aber kann füglich nicht unter ca. 10 *mm* gewählt werden, damit die im Objektiv vorhandenen Fehler-Reste nicht allzusehr mit vergrössert werden. Daher ist der Grenzwerth des erreichbaren Sehfeldes, wenn wir annehmen, dass die Pupille von 4 *mm* Durchmesser 10 *mm* vom vorderen Hauptpunkt des Oculars entfernt sei

$$\tang w' = 0{\cdot}1, \quad \text{also} \quad w' = 5{\cdot}7^\circ,$$

das ganze Sehfeld im Bilde also $2\,w' =$ ca. $11{\cdot}4^\circ$. Mit der Stärke des Oculars nimmt das Sehfeld ab und ist z. B. schon für $f_2 = -20$ *mm* nur noch $2\,w' = 7{\cdot}6^\circ$ für $f_2 = -30$ *mm*, $2\,w' = 5{\cdot}8^\circ$ u. s. w.

Andrerseits kommt die Verkürzung des ganzen Rohrs, welche diese Construction mit sich bringt — indem das Rohr etwa gleich der Differenz der absoluten Beträge der Brennweiten von Objektiv und Ocular ist — mit wachsender Vergrösserung d. h. Objektiv-Brennweite immer weniger in Betracht, und auch der Vortheil aufrechter Bilder ist für wissenschaftlichen Gebrauch ganz nebensächlich. Aus diesem Grunde ist das holländische bezw. galileische Fernrohr schon seit lange nur noch da in Gebrauch, wo jene Momente — Verkürzung des Rohrs und aufrechte Bilder — eher eine Rolle spielen, nämlich für den Handgebrauch als schwachvergrösserndes terrestrisches Fernrohr (»Perspectiv«, »Operngla s« »Feldstecher«), namentlich als Doppelfernrohr, zum gleichzeitigen Sehen mit beiden Augen eingerichtet.

Die Constructionsformen dieses haben sich bisher im engsten Anschluss an den ursprünglichen Typus der Zusammensetzung aus einfachen Linsen gehalten.

---

[1]) Ueber die Erfindungsgeschichte dieses wie des KEPLER'schen Fernrohrs siehe die bekannten Werke über Geschichte der Physik bezw. Optik von PRIESTLEY, WILDE, POGGENDORFF, E. GERLAND, histor. Apparate pag. 44 ff. Vergl. auch H. FREDERIKS, JOH. LIPPERHEY VAN WESEL, burger van Middelburg en Uitvinder der Verrekykers. Amsterd. 1885.

[2]) Sidereus nuncius, pag. 1.

Objektiv und Ocular oder auch nur ersteres allein wurde später, nach Erfindung der Achromasie, wohl aus 2, auch 3 mit einander verkitteten Linsen combinirt, um die sphärischen und chromatischen Fehler möglichst aufzuheben. Eine von dieser Zusammensetzung wesentlich abweichende ist mir nicht bekannt geworden. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass man durch geeignete Construction des Oculars dessen hinteren (zwischen Objektiv und Ocular gelegenen) Brennpunkt näher an die letzte Fläche legen könnte, als bei einer einfachen Linse der Fall ist. Dadurch würde man das Sehfeld vergrössern, was das Haupt-Desiderat bei diesen Instrumenten in ihrer gegenwärtigen Verfassung ist. Auch kann man in dem Verhältniss von Objektivöffnung zu Objektivbrennweite, von welchem, wie wir gezeigt haben, wesentlich die Grösse des Sehfeldes abhängt, vielleicht auch noch weiter gehen als jetzt, wo der Werth $\frac{1}{3}$ der äusserste praktisch relasirte ist.

Für den wissenschaftlichen Gebrauch ist aus den eben angeführten Gründen

B. Das Kepler'sche (astronomische) Fernrohr

bald nach seiner Erfindung[1] (1611) in allgemeine Anwendung genommen worden. Dasselbe wurde von Scheiner[2] zuerst praktisch ausgeführt und angewendet.

Schon Kepler hatte bemerkt[3], dass man das in diesem Fernrohr umgekehrt erscheinende Bild durch eine dritte Linse zwischen Objektiv und Ocular wieder aufrichten könne. Eine solche Einrichtung — ein »terrestrisches« Fernrohr — wurde von Schyrl auf Kloster Rheita 1645 ebenfalls vorgeschlagen und ausgeführt. Die späteren Bemühungen zur Herstellung von terrestrischen Fernrohren bezw. Ocularen haben wir oben bereits erwähnt.

Descartes suchte die sphärische Aberration der einfachen, damals allein verwandten Objektiv- und Ocularlinsen durch hyperbolische bezw. elliptische Gestaltung ihrer Flächen aufzuheben, aber »es scheint nicht, dass die dahin gerichteten Versuche irgend welchen Erfolg gehabt hätten« (Herschel).

In richtiger Erwägung der beim Fernrohr maassgebenden Faktoren ging Huyghens darauf aus, die Wirkung derselben dadurch zu steigern, dass er ihnen Brennweiten gab, die erhebliche Vielfache von deren Oeffnung (das 250fache und mehr) waren. Wir haben oben gesehen, dass unter sonst gleichen Umständen (gleiche Gesammtvergrösserung und Oeffnung) die Fehler eines Objektivs desto weniger störend werden, je geringer das Oeffnungsverhältniss ist. So kam er (1684) auf die sogenannten Luftfernrohre *(telesc. aëriens)*, welche von ihm, Campani, Divini, Rives und Cox, Auzout, Tschirnhausen und Andern in Dimensionen bis zu 200 *m* Objektivbrennweite ausgeführt wurden.

Newton erkannte, dass die Hauptursache der Mangelhaftigkeit der Bilder nicht die sphärische, sondern die chromatische Aberration sei. Da er aus seinen Versuchen entnommen hatte, dass sich dieser Fehler nicht beseitigen lasse, so wies er alle Bemühungen zur weitern Vervollkommung der dioptrischen Fernrohre zurück und wandte sich der Construction und Verbesserung der — vor ihm (von N. Zucchi, M. Mersenne, J. Gregory) wohl bereits als möglich angegebenen, von ihm aber zuerst (1670) ausgeführten — Spiegelteleskope zu. Den Bemühungen seiner Mitarbeiter und Nachfolger auf diesem Gebiete entsprangen die bekannten Constructionsformen von Gregory, Cassegrain, W. Herschel, Forster und Fritsch, die technischen Fortschritte in der Formgebung, Versilberung,

---

[1]) Kepler, Dioptrice, Aug. Vindelic. 1611, pag. 42.

[2]) Rosa ursina, Bracciani. 1630, pag. 130.

[3]) l. c., pag. 45.

Montirung, von J. SHORT, MOLYNEUX, BRADLEY, W. HERSCHEL, ROCHON, STEINHEIL, LIEBIG, FOUCAULT, SAFARIK, LASSELL, Lord ROSSE, BROWNING u. A.[1]).

Nach Erfindung der Achromasie wandten sich die Bemühungen der Mehrzahl der Optiker wieder der Verbesserung der dioptrischen Fernrohre zu. Lange Zeit unerreicht blieben die Leistungen PETER DOLLONDS und seines Sohnes JOHN. Um das bei grösseren Dimensionen bald sichtbar werdende secundäre Spectrum aufzuheben oder doch zu verringern, schlugen EULER[2]) und BLAIR[3]) die Anwendung von »Flüssigkeits-Linsen« vor, d. h. von Flüssigkeiten, welche zwischen die Linsen oder zwischen uhrglasförmigen Platten eingeschlossen selber linsenförmige Bestandtheile des Teleskops bildeten. In der Reihe der Flüssigkeiten boten mehrere in der fraglichen Beziehung günstigere Verhältnisse dar, als die zur Verfügung stehenden festen Körper, insbesondere als die Glasarten. Diese Bemühungen hatten aber gar keinen Erfolg, weil schon durch geringe Temperatur-Variationen die optische Beschaffenheit eines grössern Flüssigkeitskörpers in seinen verschiedenen Theilen viel zu stark geändert wird, und infolgedessen beträchtliche Inhomogenitäten innerhalb derselben Masse entstehen.

Die Constructionsformen des Fernrohrs wurden jederzeit in erheblichem Grade durch den Zustand mitbedingt, in dem die Technik der Materialbereitung (Glasschmelzerei) und der Materialbearbeitung (praktische Optik) sich befanden. So schien am Ende des vorigen und am Anfang dieses Jahrhunderts die Herstellung grösserer homogener Flintglasscheiben besondere Schwierigkeiten zu bereiten. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, schlugen BARLOW[4]), LITTROW[5]) und ROGERS[6]) vor, die Zerstreuungslinse, welche die sphärische und chromatische Untercorrection der collektiven Objektivlinse zu compensiren hat, in einen der Spitze der Lichtbüschel näheren und demnach engeren Theil derselben zu stellen. Sie kann dann also entsprechend ihrer Annäherung an das Bild kleiner sein als jene Vorderlinse.

Da diese Dispansivlinse dann aber, um Achromasie zu ermöglichen, eine im Verhältniss zu ihrer Brennweite grosse Zerstreuung besitzen muss, so wählte BARLOW als Material für sie den sehr stark zerstreuenden Schwefelkohlenstoff, während ROGERS eine aus Flint- und Crownglas zusammengesetzte Combination wählte, welche für Strahlen mittlerer Wellenlänge wie ein Planglas wirkte, in Bezug auf das gesammte Spectrum aber eine Uebercorrection von der erforderlichen Grösse besass. Bei beiden Constructionen, von denen die zweite unter dem Namen »Dialytische Fernrohre« namentlich von PLÖSSL ausgebildet und verbreitet wurde, konnte durch mässiges Variiren des Linsenabstandes die definitive Correction vollzogen werden. Gegenwärtig sind dieselben fast ganz verlassen.

J. FRAUNHOFER brachte im ersten Viertel dieses Jahrhunderts das Fernrohr auf die höchste Stufe der theoretischen und technischen Vollendung, deren es

---

[1]) Ueber diese sehe man die Geschichte des Spiegelteleskops von F. KLEIN, Wien 1882, und den Artikel »Telescope« von J. F. W. HERSCHEL in der 7. Aufl. der Encycl. Brit. (unter obigem Titel auch bes. erschienen. London 1861). Aelteren Datums aber für seine Zeit recht vollständig ist die Techn. Gesch. des reflekt. etc. Teleskops von J. G. GEISSLER. Dresden 1807.

[2]) Mém. de Berlin 1761, pag. 231.

[3]) Trans. R. Soc. Edinb. 3, pag. 3. 1791.

[4]) Phil. Trans. 1828, 1829, 1831, 1833. (Mehrere Abhandlungen und Berichte über den Erfolg ausgeführter Objektive.)

[5]) J. J. LITTROW, BAUMGARTNER und v. ETTINGSHAUSEN's Zeitschr. 4, pag. 257. 1828.

[6]) Edinb. Journ. of Science 9, pag. 126. 1828. Untersuchungen über diese Constructionsform von STAMPFER, Jahrb. d. K. K. polyt. Inst. 14, pag. 108. 1829.

mit den ihm zur Verfügung stehenden Glasarten fähig war[1]). Die Bemühungen HARCOURT's und STOKES', der Optik günstigere Glasflüsse zur Verfügung zu stellen haben wir früher schon erwähnt (pag. 128 ff.) ebenso die Ergebnisse der gleichgerichteten Arbeiten von SCHOTT und ABBE. Wieweit diese letzteren für die Fernrohrtechnik praktisch verwendbar sein werden, ist heute noch nicht endgiltg zu entscheiden, da die erheblichen sich hier darbietenden technischen Schwierigkeiten eine klare Beurtheilung der erreichbaren Erfolge erschweren. Astronomische Fernrohre mit erheblich vermindertem secundärem Spectrum sind nach den Rechnungen des Verfassers von C. BAMBERG ausgeführt und wiederholt untersucht worden[2]). Ueber die Aussichten, auf diesem Wege praktische Fortschritte zu erzielen, werde ich demnächst Veranlassung haben, ausführlicher zu berichten.

Aus gewöhnlichen Glasarten hat man Objektive bis zu 1 *m* freier Oeffnung bei 17—20fach grösserer Brennweite hergestellt (Lick-Sternwarte, Californien).

Literatur.

Die auf das Fernrohr bezügliche sehr umfangreiche Literatur ist theils im voranstehenden angegeben, zum anderen Theile identisch mit der pag. 118/20 angeführten. Denn, wie wir schon dort bemerkten, sind die Aberrationen meistens nur bis zu demjenigen Umfange (denjenigen Gliedern) untersucht worden, den sie bei Fernrohrobjektiven besitzen können und gewöhnlich auch unter direkter Bezugnahme auf die bei diesen vorliegenden Verhältnisse.

Die allgemeine Wirkungsweise der Fernrohre ist ausserdem meist zutreffend und z. Thl. eingehend beschrieben in den pag. 24 namhaft gemachten Lehrbüchern der Dioptrik, sowie in den meisten Darstellungen der GAUSS'schen Theorie der Abbildung, welche pag. 43 und 53 genannt sind. Man sehe ausserdem die Artikel »Optics« und »Telescope« von BARLOW, BREWSTER, HERSCHEL in der 7., 8. und 9. Aufl. der Encyclop. Brit. sowie diejenigen über »Linsenglas« und »Fernrohr« in GEHLER's Physikal. Wörterb., 2. Aufl., Leipz. 1827. Bezüglich der Montirung der Fernrohre, der zu demselben gehörigen Nebenapparate und deren mannigfacher Anwendungsweisen verweisen wir auf die Handbücher der praktischen Astronomie und Geodäsie.

IX. Die Methoden zur empirischen Bestimmung der Constanten optischer Instrumente.

Gegenstand der empirischen Bestimmung können bei optischen Instrumenten in erster Linie die Grundfaktoren der Abbildung sein. Die Abbildung ist nach Lage und Maass, wie wir früher gesehen haben, völlig bestimmt, wenn die Oerter der beiden Brennebenen und die Werthe der beiden Brennweiten ermittelt sind. Lassen wir den Fall, dass erstes und letztes Medium verschiedene Brechungsexponenten haben zunächst ausser Acht oder nehmen wir an, dass das relative Brechungsverhältniss beider Medien anderweitig her bekannt sei so ist es nur die eine der beiden Brennweiten, deren Kenntniss neben der der Brennpunktsenkörter erforderlich ist.

Ferner kann der experimentellen Bestimmung unterworfen werden die Art der Strahlenbegrenzung, sei es direkt durch Ermittelung der Lage und Grösse

[1]) Zahlreiche Berichte über dieselben z. B. von STRUVE, BESSEL, STAMPFER, PRECHTL, LITTROW.

[2]) H. C. VOGEL, Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 22, pag. 142; HASSELBERG, Mél. math. et astr. de Petersb; 6, pag. 669. 1888, s. auch Zeitschr. f. Instrkde. 9, pag. 16. 1889.

der in dem System wirksamen Blenden, sei es indirekt in deren Einfluss auf die lineare oder numerische Apertur und auf das Sehfeld. Die Methoden, um die Grösse des Sehfelds eines zum subjektiven Gebrauch bestimmten Instruments zu finden, stehen im engsten Zusammenhange mit denen, welche dazu dienen, seine Vergrösserung zu ermitteln. Diese werden den letzten Gegenstand unserer Betrachtungen bilden.

Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung.

Indirekte Methoden.

Die Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung wie auch die der anderen Constanten der optischen Instrumente kann auf zwei wesentlich verschiedene Arten geschehen, direkt und indirekt. Als direkte Methoden bezeichne ich diejenigen, welche zum Gegenstand der Messung unmittelbar — so weit dies der Natur der Sache nach angeht — diejenigen Grössen machen, deren Kenntniss zu erlangen gesucht wird. Als indirekte Methoden bezeichne ich diejenigen, bei welchen Gegenstand der Bestimmung die ersten Elemente sind, aus denen sich die Wirkung des Systems zusammensetzt, aus deren Werthen Art und Maass dieser Wirkung daher auch erst wieder mittels Rechnung abgeleitet werden muss. Es sind das die Krümmungen und gegenseitigen Abstände der einzelnen brechenden oder spiegelnden Flächen des Systems und die Brechungsverhältnisse der Medien, welche sich zwischen ihnen befinden, ferner, insoweit es sich um Bestimmung des Strahlengangs und der Strahlenbegrenzung handelt, auch die Durchmesser der freien Linsenflächen sowie die Oeffnungen und Oerter der etwa sonst im Instrument vorhandenen Blenden.

Auf diese indirekten Methoden soll hier nicht näher eingegangen werden. Dieselben sind neben den direkten meistens von Interesse nur einerseits für die praktische Optik[1]), wo die Bestimmung jener Elemente behufs genauer Erreichung vorgeschriebener Werthe erfolgen muss, andererseits für die physiologische Optik, wo die Kenntniss der Elemente des Systems neben derjenigen von dessen Gesammtwirkung aus anderen Gründen von Werth ist.

Der ersteren stehen — wie ich hier nur kurz erwähnen will — zur Bestimmung der Flächenkrümmungen auf mechanischem Wege besondere Instrumente zu Gebote, die Sphärometer, mittelst derer die einer Kugelhaube von gegebenem Halbmesser r zugehörige »Pfeilhöhe«, h, gemessen wird, aus welcher dann der Radius R der Kugel gemäss der Gleichung

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$$

zu berechnen ist. Solche Instrumente sind in neuerer Zeit insbesondere von A. M. Mayer[2]), C. Bamberg[3]) und E. Abbe[4]) vorgeschlagen bezw. construirt worden.

Die physiologische Optik kann von dergleichen Instrumenten keinen Gebrauch machen, da dieselben eine mechanische Berührung der Flächen er-

---

[1]) Eine Uebersicht der älteren hier angewandten Methoden giebt H. Schröder, Centr.-Zeitg. f. Mech. u. Optik 2, pag. 5, 15. 1891.

[2]) Am. Journ. of Science (3) 32, pag. 61. 1886.

[3]) S. Czapski, Zeitschr. f. Instrkde. 7, pag. 297. 1887.

[4]) C. Pulfrich, Ztschr. f. Instrkde. 12, pag. 307. 1892. Ueber die ersteren beiden Arten s. auch Violle, Lehrb. der Physik. D. Uebers. Berlin 1891, Bd. 1. pag. 315; über die letztgenannte den Katalog über Messinstrumente der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena.

fordern, welche hier wegen deren Empfindlichkeit und leichter Deformirbarkeit vermieden werden muss. Sie bedient sich daher ausschliesslich optischer Methoden.

Bei diesen wird entweder aus der Vergrösserung und Lage der durch Spiegelung an den betreffenden Flächen entstandenen Bilder auf die Krümmung der Fläche geschlossen oder unmittelbar die Entfernung zwischen Krümmungsmittelpunkt und Scheitel der Fläche gemessen[1]). Ersterer kann definirt sein als der zu sich selbst conjugirte Axenpunkt, in welchen also die von ihm ausgehenden Strahlen wieder zurück reflektirt werden. Bei Concavspiegeln lässt sich dieser Punkt als reeller unmittelbar finden und behufs grösserer Genauigkeit mittelst einer Lupe fixiren (Anwendung eines schrägen Deckglases oder Reflexionsprismas über der Focalebene der Lupe); bei convexen Flächen muss er als der zu dem anvisirten Punkte in Bezug auf ein convergentes Linsensystem conjugirte theoretisch und praktisch definirt sein[2]). FOUCAULT[3]) hat den Mittelpunkt der Kugelfläche dadurch definirt, dass nur in ihm eine genaue Vereinigung der reflektirten Strahlen stattfindet, d. h. die sphärische Aberration völlig aufgehoben ist.

R. KOHLRAUSCH[4]) hat an der Cornea des lebenden Auges mit einfachen Hilfsmitteln aus der Vergrösserung in einem Paar conjugirter Punkte der spiegelnden Fläche und aus dem Abstand des einen derselben von ihr den Radius ermittelt. Genauer hat bei der gleichen Methode v. HELMHOLTZ die Grösse der Bilder mit dem von ihm erfundenen Opthalmometer[5]) gemessen. Umständlicher aber ebenfalls zur Erlangung genauer Resultate geeignet ist das Verfahren von S. STAMPFER[6]), welcher mittelst Theodolits die gegenseitige Neigung der Strahlen bestimmte, welche von zwei nach ihrer Lage zu der Fläche gegebenen leuchtenden Punkten ausgehend an derselben reflektirt sind.

Für ebene Flächen ist ein besonders empfindliches Criterium ihrer Ebenheit in dem bereits pag. 90 erwähnten Verfahren OERTLING's gegeben. Derselbe gab in der dort citirten Abhandlung auch Methoden an, um den Parallelismus zweier ebener Flächen zu controliren.

Die Dicken der einzelnen Linsen des Systems — die Scheitelabstände der brechenden Flächen — werden ohne weiteres mit Hilfe der bekannten hierzu

---

1) Die vordere Brennweite eines Spiegels ist, wie wir früher gesehen haben, gleich der Hälfte seines Radius und zwar positiv bei Hohl-, negativ bei Convexspiegeln; der Brennpunkt liegt mitten zwischen Scheitel und Krümmungsmittelpunkt.

2) s. R. J. BOSCOVICH, Abh. v. d. verbess. dioptr. Fernrohren. Wien 1765 insbes. pag. 81 ff. Diss. quinque ad. Dioptr. pertin. Vindob. 1767, pag. 52 ff. — J. C. OUDEMANS Centr. Ztg. f. Opt. u. Mech. 1, pag. 66. 1880. — L. LAURENT, Compt. rend. 100, pag. 903.' 1885; refer. in Ztschr. f. Instrkde. 5, pag. 322. 1885.

3) Travaux scientif. Paris 1878, pag. 232.

4) s. F. KOHLRAUSCH, Leitfaden der praktischen Physik. 7. Aufl. Leipzig 1892, pag. 169.

5) Physiol. Optik pag. 8 ff. vergl. oben pag. 144. In der Angabe der Wirkungsweise des H.'schen Ophtalmometers an letzerer Stelle (Z. 3. v. u.) ist ein Schreibversehen untergelaufen welches sich allerdings aus dem Inhalt der vorangehenden Sätze von selbst als solches kenn zeichnet. Es muss dort richtig heissen: »bei welchem die scheinbaren Oerter zweier in geringer Entfernung von einander befindlicher Objekte (bezw. Bilder) durch entgegengesetzt gleiche Drehung zweier solcher Platten identisch gemacht werden.« Aus dem Brechungsexponenten und der Dicke der Platten sowie dem Drehungswinkel, bei welchem die Coincidenz stattfindet, lässt sich die (lineare) gegenseitige Entfernung der anvisirten Objektpunkte in einfacher Weise berechnen.

6) Jahrb. d. K. K. polyt. Inst. 13, pag. 30. 1828.

dienenden Vorrichtungen gemessen, (Schraubensphärometer, Fühlhebelapparate, Contaktkathetometer[1]) u. dergl.).

Die Brechungsexponenten endlich der das System constituirenden Medien werden entweder — auf diesem Wege immer nur sehr annähernd — aus den vorher ermittelten Radien der einzelnen Flächen und der katadioptrischen Wirkung von Paaren derselben gefunden (BOSCOVICH, STAMPFER a. a. O.) oder, genauer, mittelst besonderer Instrumente (Refraktometer, Spektrometer) an Stücken des betreffenden Materials, denen entweder nur eine ebene Fläche angeschliffen ist oder zwei solche, einen Winkel einschliessende d. h. an einem Prisma. Wegen der diesbezüglichen Methoden sei verwiesen auf den sie behandelnden Artikel von C. PULFRICH in dem Handbuche der Physik, hersg. von WINKELMANN, Bd. II. Breslau, EDUARD TREWENDT. 1893.

Direkte Methoden zur Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung.

Wichtiger als diese indirekten sphäro-refraktometrischen Methoden sind für den Benützer optischer Instrumente diejenigen, oben als direkte bezeichneten, welche die Gesammtwirkung des Systems unmittelbar zu bestimmen gestatten. Wie wir schon erwähnt haben, ist diese Wirkung erschöpft durch die Kenntniss der drei Grössen F, F' (Brennpunktsörter) und f (Gesammtbrennweite des Systems).

Für die Wahl der in einem besonderen Falle anzuwendenden Methode sind mehrere Rücksichten maassgebend. Erstens diejenige auf die erstrebte Genauigkeit des Resultats; zweitens diejenige auf die Dimensionen des der Messung zu unterziehenden Systems und drittens endlich die Rücksicht auf die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel der Messung.

Es braucht wohl kaum darauf hingewiesen zu werden, dass bei denselben Methoden der Erfolg ein sehr verschiedener sein kann je nach den angewandten instrumentellen Hilfsmitteln und der auf die Ausführung der Operationen selbst verwandten Zeit und Sorgfalt. Mit Bezug hierauf haben wir also nur im Allgemeinen den relativen Einfluss von Beobachtungsfehlern auf das Resultat zu veranschlagen. Die erstrebte Genauigkeit selbst aber wird im allgemeinen wesentlich abhängen von der Natur des zu messenden Systems, der Art seiner Verwendung und seinen Correctionszustand, z. B. meist eine viel höhere sein für ein aplanatisches Objektiv als für ein Ocular u. dergl.

Dass die Dimensionen des Systems von Belang sind für die Wahl der bei ihnen zur Anwendung zu bringenden Methode liegt auf der Hand, da die mit gegebenen Hilfsmitteln erreichbare relative Genauigkeit jeder Messung, z. B. der in jedem Falle mit eintretenden Messung einer Länge, in hohem Grade von dem Betrage derselben abhängt, eine andere ist für eine Gesammtlänge von 1, 10, 100 oder 1000 *mm*.

Die Rücksicht auf die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel endlich ist selbstverständlich und namentlich dann geboten, wenn es sich nicht um Präcisionsbestimmungen in wohl ausgerüsteten Laboratorien handelt, sondern um solche welche der berufsmässige Benützer eines Instruments ausführen will mit denjenigen Apparaten und womöglich sogar nach denjenigen Verfahrungsweisen, welche der Gebrauch seines Instruments ohnehin mit sich bringt. Auf diese Weise kann ein gut construirtes Mikroskop zu Messungen der Brennweiten etc. von Mikroskopobjek-

[1]) Wegen eines Instruments der letzteren Art von ABBE s. C. PULFRICH, a. a. O., Katalog von ZEISS über Messinstrumente, pag. 23/24.

tiven und Ocularen, ein Fernrohr zu der von Fernrohrobjektiven, ebenso eine photographische Camera für die von Projectionssystemen unter Hinzunahme nur weniger Hilfseinrichtungen meist ohne weiteres und mit bestem Vortheil benützt werden.

In Ermangelung oder zum Ersatz dieser sozusagen natürlichen sind vielfach besondere Brennweiten-Messapparate (»Focometer«) construirt worden, namentlich für Präcisionsbestimmungen. Das Gemeinsame aller dieser (mit Ausnahme derjenigen von SECRETAN und ABBE s. unten) ist einerseits eine sogen. optische Bank, eine gerade Schiene mit Längstheilung, auf welcher die an den Füssen mit Indices, Verniers oder dergl. versehenen Nebenapparate verschiebbar sind. Als solche treten stets auf ein Träger für das zu untersuchende System, welcher mit einer Centrireinrichtung für dieses versehen sein muss, um dasselbe in die optische Axe der anderen Nebenapparate zu bringen. Die letzteren bestehen in den Trägern von Objekten (Skalen, Marken), deren vom System entworfenes Bild pointirt wird und in den zugehörigen Pointirungsvorrichtungen.

Bedingungen der Schärfe von Pointirungen optischer Bilder im Allgemeinen.

Wir betrachten von den Grundfaktoren der Abbildung durch ein optisches System S zuerst diejenigen, durch welche dessen Lage im Raume fixirt wird, die Brennpunktsörter F, F'. Die Methoden zu deren Bestimmung zerfallen ebenso wie die zur Bestimmung der Constanten überhaupt und, wie wir sehen werden, auch die zur Ermittelung der Brennweite in mittelbare und unmittelbare. Die ersteren ergeben sich nebenbei bei mehreren der zur Bestimmung der Brennweiten dienenden Methoden und sollen bei der Besprechung dieser mit erwähnt werden. Die unmittelbaren Methoden beruhen, wie ihr Name es besagt, darauf, dass die Ebene, in welcher das Bild eines unendlich entfernten Gegenstandes auftritt, direkt kenntlich gemacht und festgelegt wird, und zwar geschieht dies durchgehends durch Pointiren (Focussiren, Einstellen) auf diese Ebene sei es mit blossem Auge unter Zuhilfenahme einer matten Glastafel, sei es mittelst eines einfachen oder zusammengesetzten Mikroskops M. Wir wollen hier kurz auf die Bedingungen eingehn, von denen die Schärfe derartiger Pointiıungen abhängen.

Die Ebene, welche der Netzhaut des Auges in Bezug auf dieses Mikroskop sammt dem optischen Apparat des Auges selbst conjugirt ist, ist die Pointirungsebene. Oft sucht man dieselbe körperlich zu markiren, indem man beim einfachen Mikroskop (Lupe) in oder nahe dessen Brennebene, beim zusammengesetzten Mikroskop in die untere Brennebene des Oculars bezw. Augenglases desselben ein Spinnwebfadenkreuz, ein auf einer dünnen Glasplatte mit Diamant eingerissenes Strichkreuz oder für Messzwecke eine feine Skala anbringt. Diese Marken- oder Mikrometerebene — beim Mikroskop die ihr in Bezug auf das Objektiv bezw. Objektiv plus Collektiv conjugirte — wird dann als Ort des Bildes angesehen.

Sie ist aber offenbar mit der wirklichen oben definirten Pointirungsebene nur dann identisch, wenn die Einstellung des Systems oberhalb der Marken auf diese und die des Gesammtsystems auf das zu pointirende Bild eine absolut vollkommene ist und während aller Versuche bleibt; also u. a. wenn Schwankungen des Accommodationszustandes des Auges gänzlich ausgeschlossen sind. Dies ist im Allgemeinen natürlich nicht der Fall; daher ist der Ort des pointirten Bildes im Allgemeinen verschieden sowohl von der eigentlichen Pointirungs- als von der Mikrometerebene.

Wir haben früher gesehen (pag. 169 ff.), dass die Einstellungsgenauigkeit, insoweit sie von der dem Instrument S inhärenten und von der Sehschärfe des Auges mitbedingten Focustiefe abhängt, direkt proportional ist der mit dem Instrument erzielten absoluten Vergrösserung V, der Tangente des halben Oeffnungswinkels auf der Objektseite u, und umgekehrt proportional der Sehschärfe des Auges, letztere ausgedrückt durch den Durchmesser des unter der Grenze der Wahrnehmung bleibenden Zerstreuungskreises ε. Es war der Spielraum der Einstellung beiderseits von der Objektebene (pag. 173)

$$2\Delta\xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{V \cdot \tang u}. \qquad (1)$$

Der andere Bestandtheil der Einstellungsgenauigkeit, von der Accommodationsbreite A des Auges herrührend, war

$$\Delta\xi_A = \frac{n}{n'}\,\frac{A}{V^2}. \qquad (2)$$

Der letztere fällt bei stärkerer Vergrösserung von selbst mehr und mehr fort. Bei schwachen Vergrösserungen, wo er eine erhebliche Rolle spielen könnte (vergl. die Tabelle pag. 173) wird er durch die Anbringung einer Marke im Sehfeld der Lupe bezw. des Oculars fast völlig eliminirt. Man bringt daher eine solche auch dann an, wenn sie nicht eigentlich dazu dienen soll, die Einstellungsebene zu markiren.

Eine beliebte Probe auf die Coincidenz von Bild und Marke ist dann die auf Parallaxe. Das Fehlen dieser bei seitlichen Bewegungen des Auges vor dem Ocular hin und her ist ein weit sichereres Kennzeichen für jene Coincidenz als die blosse Beobachtung der maximalen Schärfe des Bildes.

Ein anderes Mittel zur Sicherung genauer Focussirung besteht darin, dass man die zu den einzelnen Bildpunkten zielenden Büschel zerklüftet, indem man in oder möglichst nahe an der Aperturblende ein entsprechend durchbrochenes Diaphragma anbringt. Jeder Oeffnung dieses entspricht, wie man leicht einsieht, ein besonderes Bild des Gegenstandes, welches in irgend einer Ebene aufgefangen seitlich gegen die den anderen Oeffnungen entsprechenden verschoben ist. Nur in der wahren Bildebene der — aberrationsfrei angenommenen — Büschel fallen alle Partialbilder in eines zusammen. Hier ist also das Auftreten des einheitlichen Bildes statt der mehrfachen das Criterium für die Focussirung.

Im Uebrigen bleibt die durch Gleichung (1) ausgedrückte Abhängigkeit der Einstellungsgenauigkeit von der Gesammtvergrösserung und dem Oeffnungswinkel des Pointirungs-Mikroskops bezw. der Pointirungslupe bestehen. Es ist daher gemäss dieser die Pointirung eine desto genauere, je grössere Beträge jene beiden Faktoren haben.

Hierzu ist jedoch zu bemerken 1) dass der im Pointirungssystem M wirksame Oeffnungswinkel natürlich höchstens gleich demjenigen sein kann, welchen das der Messung unterzogene System gemäss den ihm vorhandenen Blenden für den betreffenden Bildort besitzt, 2) dass auch die Vergrösserung des Pointirungssystems aus den pag. 180 u. 231 namhaft gemachten Gründen nicht unabhängig von dem Oeffnungswinkel beliebig gesteigert werden kann, sondern eine in ziemlich enge Grenzen eingeschlossene Function desselben ist, und 3) dass bei Ableitung der Gleichung (1) die Voraussetzung vollkommen aberrationsfreier Abbildung durch das System S zu Grunde gelegt war. Da die letztere Voraussetzung niemals völlig erfüllt ist, so ist der Spielraum der Einstellung auch nicht genau durch jene Gleichung angegeben. Insbesondere aber verträgt in Folge dessen *das von S entworfene* Bild in noch viel geringerem Maasse eine weitere Ver-

grösserung durch M, als ein reales Objekt. In jedem Falle ist zu beachten, dass ein System nur ein Paar aplanatische Punkte besitzen kann, dass daher allenfalls nur bei der Einstellung auf den einen dieser die volle ihm zugehörige Apertur des Systems wirksam sein darf, bei der Einstellung auf andere Stellen der Axe aber die Apertur von S oder M desto mehr eingeschränkt werden muss, je weiter diese Stellen von den aplanatischen entfernt sind.

Diese Gesichtspunkte sind bei jeder Einstellung auf Bilder mittelst anderer Systeme — auch mittelst des Auges allein — zu beachten. Im übrigen ist selbstverständlich, dass Lupen mit vor den Linsen gelegener Markirungsebene nur zur Pointirung auf reelle Bilder dienen können und dass man zusammengesetzte Mikroskope mit um so weiter abliegendem Objektpunkt anwenden muss, — die also bei grösseren Abständen dieses schon mehr Fernrohre sind — je weiter das zu beobachtende Bild vor der letzten Fläche des Systems S liegt. (Im letzteren Falle verringert sich der Oeffnungswinkel und damit die Einstellungsgenauigkeit von M proportional jener Entfernung).

Ermittelung der Brennebenen.

Die voranstehenden Betrachtungen finden bei allen Einstellungen auf optische Bilder — wo dieselben auch liegen mögen — Anwendung.

Was nun im besonderen die Brennpunktsörter betrifft, so erfordert deren unmittelbare Beobachtung die Anwendung eines unendlich fernen, d. h. gegen die Brennweite des Systems sehr weit entfernten Objekts, dessen von S entworfenes Bild in F' auftritt. Gemäss der Grundgleichung für conjugirte Punktorte, $xx' = -f^2$ oder

$$\frac{x'}{f} = -\frac{f}{x} \tag{3}$$

muss der Abstand, x, des Objektes, vom vorderen Brennpunkt F des Systems im Verhältniss zu dessen Brennweite desto grösser sein, mit je grösserer Annäherung x' zu vernachlässigen sein, d. h. das Bild in die andere Brennebene F' fallen soll. Bei Systemen von kurzer Brennweite (Mikroskopobjektiven, Ocularen) können daher mässig entfernte irdische Objekte schon als genügend weit abstehend betrachtet werden (bei 30 *mm* Brennweite ergiebt ein Objektabstand von 30 *m* schon eine Genauigkeit des Zusammenfallens von Bild und Brennebene von $= 0{\cdot}1\%$). Bei grösseren Brennweiten muss man entweder siderische Objekte benützen (sehr entfernte terrestrische sind wegen der in der Horizontalen besonders störenden Wallungen der Atmosphäre und der durch sie verursachten Bildverwaschung ungünstig) oder wo das unbequem ist durch optische Mittel ein entferntes Objekt erzeugen.

Dies letztere ist auf drei schon seit den ältesten Zeiten betretenen Wegen ausführbar.

1) In der Axe des Systems S und Mikroskops M wird jenseits des ersteren ein sogen. Collimator C aufgestellt, d. i. ein collektives Linsensystem (Fernrohrobjektiv), in dessen abgewandter Brennebene ein geeignetes Objekt (»Mire«) angebracht und von hinten beleuchtet wird. Dann entwirft offenbar C ein virtuelles Bild der Mire in unendlicher Entfernung und dieses dient als Objekt für S.

2) Ebenfalls sehr alten Datums[1]) ist ein Verfahren, welches die Umkehrung des ad 1) angegebenen bildet: es wird der Ort aufgesucht, dessen von S ent-

[1]) Nach SCHERFFER (Instit. dioptr. pag. 40.), von MASKELYNE herrührend; einen besonderen Apparat hierfür beschrieb TH. BAUMANN, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. Berlin 1846.

worfenes Bild unendlich entfernt ist. Zu dem Zwecke wird statt M ein auf Unendlich (Sterne) eingestelltes Fernrohr auf die optische Bank gebracht und eine Marke auf der anderen Seite von S solange verschoben, bis ihr Bild in dem Fernrohr scharf erscheint. Ist dies der Fall, so befindet sich die Marke offenbar in der abgewandten Brennebene von S.

Wenn das System ein dispansives ist, so wird der Vorgang der umgekehrte[1]. Man visirt mit einem Fernrohr, dessen Ocularauszug genügend gross ist, erst durch S hindurch nach einem sehr entfernten Objekte und bestimmt dann nach Entfernung von S die Lage desjenigen Objekts auf der Bank, welches unmittelbar durch das Fernrohr gesehen scharf erscheint.

3) Statt eines besonderen Collimators wird das System selbst zur Autocollimation verwandt[2]. Zu diesem Zwecke wird jenseits S, (von M aus), ein gut planer Spiegel senkrecht zur gemeinsamen Axe von M und S aufgestellt. Die Markenebene von M wird von der Seite des Beobachters her beleuchtet durch ein über sie gestelltes unter 45° gegen die Axe geneigtes Glasplättchen, welches von einer seitlichen Lampe Licht erhält und gleichzeitig freie Durchsicht gestattet (Bohnenberger) oder besser, weil mit grösserer Lichtstärke wirkend, durch ein kleines totalreflectirendes in gleicher Weise beleuchtetes Prisma, welches einen Theil des Sehfeldes, mit der einen Kathetenfläche dessen Ebene parallel gestellt, ganz verdeckt, einen anderen Theil frei lässt; im bedeckten Theil befindet sich eine geeignete Marke (heller Spalt in dunklem Felde, in Silberniederschlag eingerissenes Netz oder dergl.), dessen Reflexbild in dem freien Theil des Sehfeld beobachtet wird (Abbe).

Wenn die von hinten beleuchtete Marke bezw. das von ihr durch den zwischen ihr und S befindlichen Theil von M entworfene Bild sich genau im Brennpunkte von S befindet — und nur dann — werden auch die nach der Brechung in S an dem Spiegel reflectirten und wieder durch S gebrochenen von der Marke ausgegangenen Lichtbüschel in deren Ebene wiedervereinigt. Man sieht also dann ein scharfes Bild der Marke in deren Ebene. Ist das System S divergent, so muss durch ein zwischen M und S angebrachtes Hilfssystem S' ein reelles Bild der Marke in M nach S hin entworfen und zur Coincidenz mit dessen Brennebene gebracht werden.

Die Methode der Autocollimation ist besonders empfindlich, weil die Strahlen das System S zwei Mal passiren müssen. Nahe der Brennebene entspricht einer um dx von ihr abweichenden Stellung der Marke, wie man sich leicht überzeugt, eine um ebenso viel nach der entgegengesetzten Richtung von ihr abweichende Lage des Markenbildes, also eine relative Verschiebung von $2dx$. Somit ist die Focussirungsgenauigkeit verdoppelt. Damit die pointirte Ebene wirklich die Brennebene sei, muss der benützte Hilfsspiegel natürlich sehr gut plan sein.

Um bei allen diesen Methoden zur Bestimmung der Brennpunktsörter die relative Lage des Brennpunkts gegen irgend eine mit dem Linsensystem fest verbundene, zur Axe senkrechte Ebene, D, zu bestimmen, kann man entweder mit demselben System welches zur Einstellung auf den Brennpunkt diente und ohne dasselbe irgendwie zu ändern, vor- oder nachher auf die betreffende irgendwie markirte Ebene einstellen. Oder man ersetzt die erstere Pointirungs-

---

[1] L. Merz, Pogg. Ann. 54, pag. 321. 1845.

[2] S. die neuerlich vorgeschlagenen Anordnungen von E. Lommel, Zeitschr. f. Instrkde. 5, pag. 124. 1885. L. Laurent, Compt. rend. 100, pag. 100. 1885. Zeitschr. f. Instkde. 5, pag. 322. 1885.

vorrichtung durch eine genau bis in ihren Einstellungspunkt reichende Spitze (von Elfenbein oder Stahl) und verschiebt diese bis zum Contakt mit der festen Ebene D. Die Differenz der Ablesungen an der optischen Bank bei der einen und anderen Stellung des Systems bezw. Spitzenträgers ist dann die gesuchte Entfernung DF bezw. DF' (vergl. Fig. 89 unten).

Zu Ausgangsebenen D empfehlen sich am meisten die durch einen bezw. beide Fassungsränder und die durch die äusseren Linsenscheitel gehenden.

Bestimmung der Brennweite.

Die Brennweite eines optischen Systems ist ihrer fundamentalen Definition nach (s. pag. 40) das Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des betreffenden Raumes gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Grösse seines Objektes. Die Brennweite tritt ausserdem als wesentlicher Faktor in alle Abbildungsgleichungen mit ein und kann aus jeder derselben ebenfalls durch die andern in ihr auftretenden Grössen definirt, daher auch durch empirische Bestimmung jener gemessen werden (als Abstand der ersten Hauptpunkte von den Brennpunkten oder der Brennpunkte von den zweiten Hauptpunkten u. dergl.). Dementsprechend scheiden sich die Methoden zur empirischen Bestimmung der Brennweite auch in zwei Gruppen. In solche, welche auf die fundamentale Bedeutung der Brennweite gegründet sind — direkte Methoden — und in solche, welche auf den Nebenbeziehungen beruhen — indirekte Methoden.

Bei den ersteren kann man eine weitere Scheidung vornehmen in solche, welche die Definition unmittelbar, ohne jedes Zwischenglied, zur Anwenduug bringen und in solche, bei denen solche Glieder vorhanden sind, durch welche letztere die eigentliche Bedeutung der Unterlage für die Methode oft fast verdeckt wird.

I. Methoden welche unmittelbar auf der Definition der Brennweite beruhen.

1) Bei den ersteren ist der Definition gemäss die lineare Grösse des in der Brennebene auftretenden Bildes eines sehr entfernten Objektes zu messen. Ist das System für den unendlich fernen Punkt, wenigstens auf der einen Seite, aplanatisch — wie die Objektive der Fernrohre oder die photographischen Systeme und in umgekehrter Stellung als der gewöhnliche Gebrauch sie mit sich bringt auch die Lupen und annähernd die Objektive der Mikroskope — so bietet jene Messung keine Schwierigkeiten dar. Speciell beim Fernrohr liegt gerade diese Bestimmung ganz im Rahmen von dessen sonstigem Gebrauch. Denn schon kurz nach der Erfindung des Fernrohrs wurde speciell beim KEPLER'schen der grosse Vortheil erkannt, den dasselbe für die mikrometrische Messung der angularen Abstände von Sternen oder der scheinbaren Grösse von Planeten darbot. Zu diesem Zwecke wird in der Brennebene ein sogen. Mikrometer[1]) angebracht, d. i. entweder ein feststehendes System von parallelen Spinnwebfäden oder eben solchen feinen Strichen aut einer Glasplatte oder ein mittelst einer feinen Schraube seitlich um genau messbare Beträge verschiebbarer Faden bezw. Fadenpaar, welches einmal auf den einen und das andere Mal auf den anderen Punkt des Sehfeldes eingestellt wird[2]). Wenn auf diese Weise die lineare Grösse des von

---

[1]) Erfunden nach Einigen von GASCOIGNE 1640, nach Andern (GOVI) von DIVINI 1649.

[2]) Ueber die zahlreichen neueren Formen der Mikrometer sei auf die Artikel »Mikrometer« in GEHLER's physik. Wörterbuch und der Encyclop. Brit. sowie auf die Lehrbücher der praktischen Astronomie verwiesen.

dem Fernrohrobjektiv entworfenen Bildes und durch direkte Winkelmessung die scheinbare Grösse seines Objektes gemessen ist, so hat man in dem Verhältniss dieser beiden Grössen unmittelbar die Brennweite des Objektivs.

2) Bei anderen Systemen, als den Objektiven von Fernrohren, sind gewöhnlich die Einrichtungen für die direkte Winkelmessung der scheinbaren Grösse des Objektes von vornherein nicht vorhanden und auch weniger leicht anzubringen. Andererseits ist bei diesen, wegen ihrer im Allgemeinen sehr viel kürzern Brennweite auch ein geringerer Abstand des Objektes schon genügend. Bei Ocularen und den schwächeren Objektiven von Mikroskopen ist daher ein ganz bequemes Verfahren zur Bestimmung der Brennweite das folgende (nach ABBE, siehe DIPPEL, das Mikroskop, pag. 331): Man bringt in der Entfernung von einem oder wenigen Metern z. B. am Fenster, mehrere gut markirte Objekte (kreisförmige Scheiben von Papier oder dergl.) an und berechnet aus deren linearer Grösse y — dieselben einzeln und paar- oder gruppenweise genommen — und ihrem Abstand von der Tischfläche des Mikroskops, s, — diesen Abstand gerechnet auf dem gebrochenen Wege über die Mitte des planen Beleuchtungsspiegels des Mikroskops — die angulare Grösse y/s der einzelnen Marken oder Markengruppen. Misst man dann die lineare Grösse des Bildes, y', welches ein centrisch auf den Tisch gelegtes Ocular oder schwaches Mikroskopobjektiv von jenen Marken entwirft, mit einer Mikrometerlupe (RAMSDEN-Dynameter) oder besser mit einem mit Mikrometer versehenen Mikroskop[1]), so hat man in dem Verhältniss $y':(y/s)$ wieder ohne weiteres die Brennweite des Systems.

Diese Methode lässt sich natürlich eben so gut wie am Mikroskop an der optischen Bank zur Anwendung bringen. Aehnlich kann man bei photographischen (Projections-) Objektiven verfahren.

Wenn der Abstand der Marke nicht sehr gross gegen die Brennweite des Systems ist, so ist die Anwendung der Gleichung $f=(h'/tang\, u)$ in den letzgenannten Fällen nicht mehr ohne weiteres zulässig. Man kann dann entweder[2]) durch ein Hilfs-System — eine Art Collimator — künstlich ein in unendlicher Ferne liegendes Objekt erzeugen, dessen angularen Durchmesser man ein für alle Mal bestimmt, oder man muss den Abstand des Objektes vom vordern bezw. den des Bildes vom hintern Brennpunkt besonders in Anschlag bringen (s. unten).

3) Gerade bei den Mikroskop-Objektiven kürzester Brennweite — welche, wie wir früher gesehen haben, rationeller Weise die grösste Apertur besitzen — lässt sich, wenn sie aplanatisch sind, ein Verfahren anwenden, welches auf den Sinus-Satz gegründet die ursprüngliche Definition der Brennweite ebenso unmittelbar zum Ausdruck bringt, wie die Bestimmung des Verhältnisses der angularen Entfernung von Sternörtern zur linearen Grösse ihrer Bilder bei Fernrohrobjektiven. Gemäss dem Sinus-Satz genügt a, die numerische Apertur auf der Objektseite, [vergl. pag. 169 Gleichung (5a)] der Gleichung

$$a=\frac{p'}{f'}, \quad \text{also} \quad f'=\frac{p'}{a}. \tag{4}$$

Wenn daher diese Apertur bekannt ist, so reicht die Messung des ihr entsprechenden Querschnittes der Büschel in der hintern Brennebene, $2p'$, vollständig hin zur Bestimmung der hinteren Brennweite, f', des Systems. Die Apertur a lässt sich nach einer der Methoden bestimmen, welche wir hierfür weiter unten angeben werden. Ohne die Voraussetzung einer solchen vorgängigen Bestim-

[1]) Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, dass das zur Bildmessung dienende optische Hilfssystem am besten nach der Objektseite telecentrisch gemacht wird.

[2]) SECRETAN, De la distance focale des syst. converg. Paris 1855.

mung, also ganz ohne weiteres, ist diese Methode der Brennweitenbestimmung anwendbar bei Systemen, deren Apertur $a > 1$ ist, d. h. bei solchen, deren volle Apertur nur durch Zwischenfügen einer Immersionsflüssigkeit herstellbar ist. In diesen erreicht die Apertur der in das System eintretenden Büschel bei Weglassung der Immersionsflüssigkeit, also Luft vor der Frontlinse, höchstens den Wert 1·0, diesen Werth aber mit Sicherheit, wenn der Beleuchtungsapparat eine die Einheit übersteigende Apertur besitzt. Man verfährt folgendermaassen: Man schiebt in den Haupt-Tubus des Mikroskops ein Hilfsmikroskop mit Mikrometer-Ocular, mit dem man annähernd auf die hintere (obere) Brennebene des zu untersuchenden Objektivsystems S einstellt. Man senkt den Haupt-Tubus so weit, bis der in dem Hilfsmikroskop hell erscheinende Kreis in der hintern Brennebene von S seine maximale Grösse erreicht hat, natürlich nachdem aus dem Beleuchtungsapparat alle Blenden entfernt sind, so dass man sicher ist, dass dieser Büschel bis zum streifenden Austritt liefert. Die Grösse dieses hellen Kreises bestimmt man mit dem Mikrometermikroskop ihrem absoluten Betrage nach (in Millimeter) unter Berücksichtigung der Vergrösserung, welche das Hilfsmikroskop selber zwischen Objekt und Mikrometer besitzt. Die Hälfte des Durchmessers dieses Kreises ist dann die gesuchte Brennweite.

Um sicher zu sein, dass der überstehende Fassungsrand der Frontlinse des Systems nicht dessen Annäherung an die Oberfläche des Condensorsystems, und dadurch die Aufnahme der von diesem streifend austretenden Büschel verhindert, befestigt man unter der Frontlinse von S durch Adhäsion mittelst der Immersionsflüssigkeit ein dünnes Deckglas und nähert nun S sammt diesem Deckglas dem Condensor bis zur völligen Berührung. Die Luftschicht zwischen beiden kann dann als verschwindend dünn angesehen werden, und da das System innerhalb Deckglas und Immersionsflüssigkeit der Voraussetzung nach eine die Einheit übersteigende Apertur besitzt, so ist es sicher im Stande, Büschel von der Apertur 1·0 durch Deckglas und Immersionsflüssigkeit hindurch aufzunehmen. Da ferner der Eintritt der totalen Reflexion nur von der Richtung der einfallenden Büschel abhängt, so entsprechen den Punkten auf dem Umfang des hellen Kreises oberhalb von S parallelstrahlige Büschel vor S. Damit ist den Bedingungen der Anwendung von Gleichung (5a) genügt.

II. Methoden, bei welchen die Definition der Brennweite mittelbar zur Anwendung kommt.

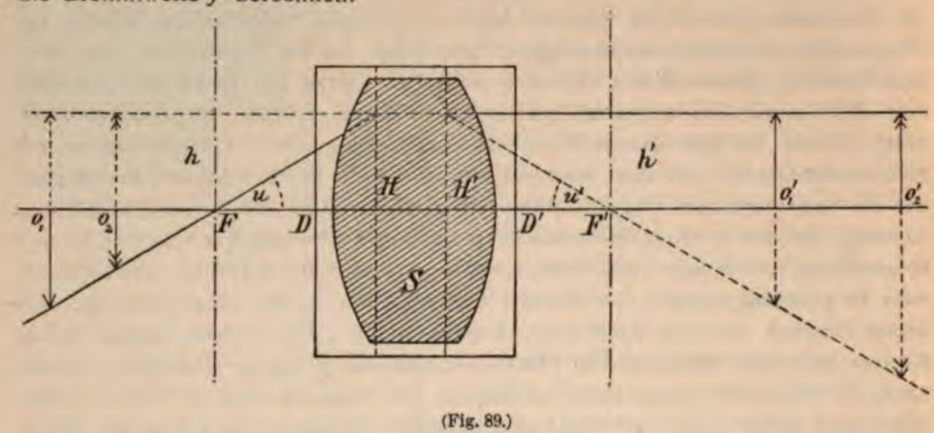
(Bestimmung der Brennweite aus Lage und Vergrösserung conjugirter Ebenen).

4) Man kann unter Beibehaltung der unter 2) erwähnten Anordnung, d. h. bei mässig entferntem Objekt erst die Lage des einen Brennpunktes, z. B. F (Fig. 89), in Bezug auf die durch den Fassungsrand des Systems gehende Ebene bestimmen, $DF = z$, dann bei umgekehrter Lage des Systems, also F nach dem Objekt hin, wie vorher mikrometrisch die Grösse des Bildes der Marke messen, $= y'$, und dann nach der Gleichung für die Vergrösserung in einem optischen System[1])

[1]) Diese Gleichung ist, wie man sich leicht überzeugt, nur ein veränderter Ausdruck für die Definitionsgleichung der Brennweite. Man hat nur denjenigen vom Objekt ausgehenden Strahl zu betrachten (Fig. 89), welcher durch den vorderen Brennpunkt F geht, nach der Brechung also der Axe des Systems parallel ist, oder für die unter 5) angeführte Methode umgekehrt denjenigen Strahl, welcher der Axe parallel einfallend nach der Brechung durch den zweiten

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x}, \quad \text{also} \quad f = x\frac{y'}{y} = (s - z)\,\frac{y'}{y} \tag{5}$$

die Brennweite f berechnen.



(Fig. 89.)

Durch Wiederholung der angegebenen Messungen in umgekehrter Lage des Systems erhält man einen zweiten Werth von f, welcher mit dem ersten übereinstimmen muss, daher zur Controle der ersten Messung dient.

5) Man kann namentlich bei stärkeren Mikroskop-Objektiven vortheilhaft den umgekehrten Weg einschlagen, das Objekt wie ein gewöhnliches mikroskopisches Objekt nahe dem vorderen Brennpunkt anbringen und die Grösse des Bildes messen, welches das System von ihm in erheblichem und genau ermitteltem Abstande vom hinteren (oberen) Brennpunkte entwirft. Als solches Objekt empfiehlt sich dann ein sogen. Objektmikrometer, eine sehr fein getheilte Glas-Skala von bekanntem Theilungswerth (z. B. 0·01 *mm*). Das Bild wird auf einer eben solchen aber meist gröberen Theilung aufgefangen, einem Ocularmikrometer (0·1 *mm*). Man darf hier aber nicht ein Ocular anwenden, welches wie das Huyghens'sche seinen unteren Brennpunkt und die reelle Diaphragmenebene zwischen den Linsen enthält, sondern ein solches, welches wie das Ramsden'sche seinen vorderen Brennpunkt ausserhalb derselben hat.

Der Abstand der oberen Brennebene des Objektivs von der Mikrometerebene, x', muss dann besonders bestimmt werden, am besten, indem man mit einem Hilfsmikroskop, welches sich in den Haupttubus des Mikroskops einschieben lässt einmal auf diese Ebene als die Bildebene sehr entfernter Gegenstände (geeignet sind kahle Bäume, durchbrochene Gitter auf Häusern) einstellt und dann mit demselben auf die durch den unteren Rand des Tubus gehende Ebene, welche nach Entfernung des Objektivs auf irgend welche Weise markirt wird.

Die Verschiebung, z', des Hilfsmikroskops, welche von der einen Einstellung bis zur andern nöthig ist, unter Beachtung des Vorzeichens, welches man ihr geben muss, addirt zu der für sich ermittelten, s', der Mikrometerebene vom

Brennpunkt F' geht. Man sieht dann, dass die eben benützten Gleichungen für die lineare Vergrösserung in conjugirten Axenpunkten nichts anderes sind als der mathematische Ausdruck für diejenige Definition der Brennweiten, nach welcher sie gleich sind dem Verhältniss der scheinbaren Grösse eines in endlicher Entfernung gelegenen Objekts, dieses gesehen vom Brennpunkte der Objektseite zur linearen Grösse seines Bildes oder *vice versa*. Umgekehrt führen die Gleichungen $f = \frac{h'}{tang\, u}$ bezw. $f' = \frac{h}{tang\, u'}$, auf jene Strahlen angewendet, sofort zu den Gleichungen für die lineare Vergrösserung in conjugirten Axenpunkten.

unteren Tubusrande ist dann $s' + z' = x'$, gleich der Entfernung der Bildebene vom Brennpunkt des Bildraumes, daher aus

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'}; \quad f' = x' \frac{y}{y'} = (s' + z') \frac{y}{y'}. \tag{5a}$$

6) Eine Modification der zu 4) und 5) angegebenen Verfahren besteht darin, dass man die Bestimmung der relativen Lage des dem Objekt bezw. Bild zugewandten Brennpunktes umgeht, indem man die Vergrösserungen bestimmt, welche das System in Bezug auf zwei um eine gemessene Entfernung ξ abstehende Objekte oder in zwei um eine ebenfalls gemessene Entfernung ξ' abstehenden Bildebenen besitzt. Ist die erstere Vergrösserung

$$\frac{y_1'}{y_1} = \beta_1, \quad \text{die letztere } \frac{y_2'}{y_2} = \beta_2,$$

so hat man

a) bei dem einen Verfahren aus

$$x_1 = \frac{f}{\beta_1} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{f}{\beta_2},$$

$$x_2 - x_1 = \xi = f\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right),$$

also

$$f = \frac{\xi}{\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}} = \frac{\xi}{\frac{y_2}{y_2'} - \frac{y_1}{y_1'}} \tag{6a}$$

(vergl. Gleichung II*, pag. 45);

b) bei dem andern Verfahren ganz entsprechend

$$x_2' - x_1' = \xi' = f'(\beta_2' - \beta_1'),$$

also

$$f' = \frac{\xi'}{\beta_2' - \beta_1'} = \frac{\xi'}{\frac{y_2'}{y_2} - \frac{y_1'}{y_1}}. \tag{6b}$$

Die Art der Verwirklichung dieser beiden Verfahrungsweisen liegt auf der Hand[1]). Ist ausser dem gegenseitigen Abstand der beiden Objekt- bezw. Bildebenen auch noch derjenige einer derselben von einem festen Punkte D, gemessen z. B. $DO_1 = a_1$ so berechnet sich aus ihm und dem Werthe von f der Brennpunktsabstand $DF = p = a_1 - \frac{f}{\beta_1}$, der Abstand des Hauptpunkts der betreffenden Seite von derselben festen Ebene $DH = e = a_1 - f(1 - 1/\beta_1)$ u. s. w., ebenso auf der Bildseite, wenn $DO_1' = a_1'$ gemessen ist $DF' = p' = a_1' - f\beta_1$; $DH' = e' = a_1' + f'(1 - \beta_1)$.

7) Bei den zur (subjektiven) Beobachtung virtueller Bilder benützten Systemen von endlicher Brennweite, also den einfachen und zusammengesetzten Mikroskopen, ist es vortheilhaft, diese virtuellen Bilder zur Messung zu verwenden, da in Bezug auf sie das System am besten corrigirt ist. Man kann dies durch Vermittelung eines der Zeichenapparate (sogen. *Camerae lucidae*), welche an diesen Instrumenten häufig gebraucht werden, deren Constructionsformen man

[1]) Das erstere ist das von ABBE für seinen Apparat adoptirte, s. unten. Wenn man nicht sehr enge Strahlenbüschel wirken lässt, so wird man bei einem System, dessen Bildabstand viel grösser ist als der Objektabstand (z. B. Mikroskopobjektiv) das Verfahren 6b in der normalen Gebrauchslage des Systems anwenden und 6a event. zur Controle in der umgekehrten Lage desselben (Bild- und Objektseite vertauscht). Umgekehrt wenn das System für grossen Objekt- und kleinen Bildabstand corrigirt ist.

in den pag. 246 citirten Lehrbüchern der Mikroskopie beschrieben findet (s. auch unten pag. 384). Bringt man den Apparat in den mit der oberen Brennebene ja stets nahezu coincidirenden Augenpunkt des Instruments und misst man die Vergrösserung der virtuellen Bilder bei zwei verschiedenen Entfernungen des Projectionsschirms, so kann man aus der absoluten Entfernung des Schirms vom Augenpunkt oder aus dem gegenseitigen Abstand der beiden Schirmlagen und dem in ihnen stattfindenden Vergrösserungsverhältnisse wie in Methode 5) und 6b) die Gesammtbrennweite des Mikroskops berechnen[1]).

8) Eine andere Methode, bei welcher die Bestimmung der Brennpunktsörter umgangen wird, wandte MEYERSTEIN[2]) an. Er stellte eine Skala O und ein Mikrometermikroskop M fest auf. Die Pointirungsebene des letzteren O' war dabei um die messbare Grösse c entfernt von der Skala. Das zu untersuchende Linsensystem S wurde zwischen O und O' so lange verschoben, bis in O' ein scharfes Bild von O entstand, dessen Vergrösserung β mit M bestimmt wurde; ausserdem wurde der Abstand a eines mit dem System fest verbundenen Punktes (Index am Fuss des Trägers auf der optischen Bank) von der Skala O gemessen. Die letztere Operation wurde wiederholt, nachdem das System S um 180° gedreht war (Objekt- und Bildseite vertauscht) und dasselbe in seiner neuen Lage wiederum verschoben, bis das Bild in O' scharf war und von gleicher Grösse wie vorher. Die Entfernung des Index, durch welchen die Drehaxe des Systems geht, von O sei jetzt b. Dann liegt der zweite Brennpunkt des Systems jetzt an der gleichen Stelle wie vorher der erste und *vice versa*. Hieraus leitet man ab

$$f = \frac{c-(a+b)}{\beta - 1/\beta}. \tag{7}$$

8a) Eine Modification dieser Methode bildet die von E. HOPPE[3]), welcher in der zweiten, umgekehrten Lage des Systems nicht den Abstand des Fixpunkts D desselben (er wählt hierzu die Ebene des einen Fassungsrandes) von O, sondern denjenigen von O' bestimmt, $DO' = b'$. Er erhält dann aus a, b', c und β

$$f = \frac{\beta(a-b')}{\beta^2-1}, \tag{8}$$

und ebenso lassen sich dann aus einfachen Gleichungen die Oerter der Brenn- und Hauptpunkte gegen O und O' oder gegen D berechnen, z. B.

$$OF = \frac{\beta^2(a-b')}{\beta^2-1}; \quad F'O' = \frac{a-b'}{\beta^2-1}; \quad DH = \tfrac{1}{2}(c-a-b') \text{ u. s. w.}$$

8b) Eine andere Modification ist die erste der drei von MAC GILLAVRY[4]) vorgeschlagenen Bestimmungsweisen (die zweite und dritte sind fast identisch mit den unter 6a und 6b angeführten). Bei dieser misst er die Vergrösserungen β_1, β_2 eines Systems in zwei Stellungen zu Objekt und Bild ohne Umkehrung des Systems, und die Differenz d der Entfernungen von Objekt und Bild in den beiden Fällen. Hieraus berechnet sich die Brennweite

$$f = \frac{d\beta_1\beta_2}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1\beta_2-1)} \tag{9}$$

[1]) Diese Methode wurde neuerdings zu sehr exacter Ausführung gebracht (die Projectionsschirme an den Fernrohrträgern eines Kathetometers angebracht, ihre absoluten und gegenseitigen Entfernungen an dessen Theilung abgelesen) von C. M. GARIEL, Séanc. Soc. franc. de phys., pag. 186. 1887.

[2]) WIED. Ann. 1, pag. 315. 1877; CARL's Repert. 14, pag. 363. 1877.

[3]) POGG. Ann. 160, pag. 169. 1876.

[4]) *Maandblad voor* Natuurwetensch. 5, pag. 73. 1875.

und ebenso genügen die Messungsdaten auch für die Berechnung der Brennpunksörter und Hauptpunktsabstände.

9) Statt die in conjugirten Ebenen stattfindenden Vergrösserungsverhältnisse zu messen, kann man man einfache Zahlen (1, 2, 3, 4 oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$) für dieselben wählen. Alsdann hat man nur die Coincidenz von Strichen in der Objekt- mit solchen in der Bildskala herüberzuführen und als Criterium zu benützen. In dieser Weise verfuhren HANSEN[1]) und MERGIER[2]), von denen der letztere auf mechanischem Wege die Stellungen der Linse und Skala, wo die Vergrösserung = 1, 2, 3 . . . ist, herbeiführte. Die Bildebenen, in welchen die Vergrösserung = 1, 2, 3, ist und ebenso die Objektebenen, denen im Bilde die Vergrösserungen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ . . entsprechen, sind von einander je um f entfernt.

Auf demselben Princip beruhen auch die Methoden von DONDERS[3]) und SNELLEN[4]) zur Bestimmung der Stärke von Brillengläsern.

Endlich bilden ebenfalls nur Modificationen des hier genannten Verfahrens die Methoden, bei welchen zuerst die Lage der Brennebenen (wo die Vergrösserung = 0 ist) und dann die der TÖPLER'schen Hauptebenen (Vergr. = — 1) aufgesucht und der Abstand dieser beiden gemessen wird[5]). Diese sind ebenfalls je um f entfernt.

Es hat kaum einen Zweck, die verschiedenen anderen sich hier darbietenden Möglichkeiten aufzuzählen.

III. Methoden, welche bloss auf der Ermittelung der Oerter conjugirter Punkte auf der Axe beruhen.

Die Brennweite eines Systems lässt sich, wie schon bemerkt, auch aus jeder anderen Gleichung, in welcher sie in irgend welcher Verbindung mit anderen Grössen auftritt, bestimmen, indem man diese anderen Grössen misst[6]). Namentlich die Grundgleichung für die Oerter conjugirter Punkte auf der Axe

$$xx' = -f^2 \qquad (10)$$

kann zu solchen Bestimmungen dienen und ist vornehmlich zur Grundlage von solchen benützt worden. GAUSS[7]) diskutirte ziemlich vollständig die verschiedenen Möglichkeiten, und die Vortheile oder Nachtheile derselben, auf Grund jener Gleichung f zu bestimmen.

10) Wenn die Lage der Brennpunkte F, F' unbekannt ist, ihre Entfernungen von einem festen Punkte D des Systems in Richtung des einfallenden Lichtes

---

1) Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. 15 (10). 1874 (nach THOMPSON).

2) Séances de la Soc. franç. de phys. 1887, pag. 193.

3) Versl. en Mededeel. 15, pag. 402. 1863.

4) Maandb. voor Natuurwetensch. 7, pag. 23. 1876.

5) Z. B. H. SCHRÖDER, Photogr. Mittheilgn. hrsg. v. H. W. VOGEL, 23, pag. 254. 1887. Im wesentlichen die gleiche Methode ist die von S. P. THOMPSON, Journ. Soc. of Arts 40, pag. 22. 1891, bei welcher die Lagen beider Brennebenen eines Systems durch Mikrometer markirt und letztere auf mechanischem Wege (rechts- und linksgängige Spindel) in die symmetrischen Ebenen übergeführt werden, in welchen die Vergrösserung = — 1 ist. Anwendung dieser Methode auf dispansive Systeme von A. ANDERSON, Phil. Mag. (5) 31, pag. 511. 1891. Auf die Bestimmung der Distanz der positiven wie negativen Hauptebenen haben, wie TH. zeigt, die Focussirungsfehler einen geringeren Einfluss, als auf die Bestimmung der Entfernung jedes anderen Paares conjugirter Ebenen.

6) Natürlich kann auch jede dieser Gleichungen als Definitionsgleichung der Brennweite benützt werden. Nach der hier vertretenen Auffassung aber sind diese Definitionen für die Brennweite weniger charakteristisch als die von uns stets festgehaltene.

7) Dioptr. Unters., Göttingen 1841, pag. 23 ff.

gemessen, $DF = p$, $DF' = p'$ gesetzt werden, die Entfernungen eines Objektpunktes O und seines Bildpunktes O' von demselben Punkte D, im selben Sinne gemessen, DO mit a und DO' mit a' bezeichnet werden, so sind zur Ermittelung von f, p und p' stets drei Versuche nöthig. Seien die bei denselben erhaltenen Werthe von a und a' durch Indices unterschieden, so ergiebt die dreimalige Anwendung der Gleichung (10), wenn berücksichtigt wird, dass $x = FO = a - p$ und $x' = F'O' = a' - p'$ ist, also die Gleichung

$$(a_k - p)(a_k' - p') = -f^2 \tag{11}$$

für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$ nach bekannten Verfahrungsweisen die Werthe von p, p' und f^2 (GAUSS, l. c. pag. 23/24). Das Vorzeichen von f bestimmt sich aus der aufrechten oder verkehrten Lage des Bildes zum Objekte im Verhältniss zum Vorzeichen von $x' = a' - p'$ in einem der drei Versuche.

11) Sowohl an einer einfachen Linse als an einer solchen, die aus zwei oder mehreren sehr nahe zusammenliegenden zusammengesetzt ist (wie an achromatischen Fernrohrobjektiven von der gewöhnlichen Einrichtung) stehen die beiden Hauptpunkte in geringer Entfernung von einander. Dürfte man diese Entfernung $HH' = l$ wie eine bekannte Grösse betrachten, so würden zwei Versuche hinreichend sein, indem die Gleichung

$$p' - p = 2f + l \tag{12}$$

die Stelle des dritten Versuches vertritt. Verbindet man mit derselben die für die beiden ersten Versuche geltenden

$$(a_k - p), \quad (a_k' - p') = -f^2, \tag{11}$$

so erhält man nach Elimination von p und p' zur Bestimmung von f eine quadratische Gleichung, welche aber in eine lineare übergeht, wenn $a_2' - a_2 = a_1' - a_1$, d. h. wenn die beiden Versuche so angeordnet sind, dass die Entfernung des Bildes vom Objekt in beiden dieselbe bleibt, während die Linse in ihnen zwei verschiedene Stellungen einnimmt. Sei jene Entfernung $OO' = c$, also $a_1 = a_1' - c$, $a_2 = a_2' - c$, so wird

$$f = \tfrac{1}{4}(c - k) - \frac{(a_2' - a_1')^2}{4(c - l)}. \tag{13}$$

Man hat also ausser c nur $(a_2' - a_1')$, d. i. die Verschiebung des Systems vom einen Versuch zum andern zu messen. Wenn $OO' = const$ ist, so ist auch $x + x' = const$. Aus dieser Gleichung in Verbindung mit $x \cdot x' = (-f^2) = const$ ist zu schliessen, dass bei den zuletzt gedachten Versuchen $x_1 = -x_2'$ $x_2 = -x_1'$ ist, also die Brennpunktabstände des Bildes und Objektes in beiden Versuchen der Grösse und dem Vorzeichen nach mit einander vertauscht werden[1]).

12) Bei derjenigen Stellung des Systems, wo $x = -f$ wird, d. h. wenn der Gegenstand in die negative erste Hauptebene rückt (vergl. pag. 42) rückt das Bild in die zweite negative Hauptebene, also ist $x' = +f$ und der Abstand zwischen Objekt und Bild

$$OO' = c = 4f + l \tag{14}$$

wird ein Minimum. In Folge dieser Minimum-Eigenschaft ändert in der Nähe dieser Lage eine kleine Verschiebung des Objektes die Lage des Bildes fast gar nicht, daher der Abstand beider sich besonders bequem und genau ermitteln lässt (s. Anm. 5 auf pag. 291).

---

[1]) Diese Methode wurde unter Vernachlässigung von l von BESSEL benützt. Astron. Unters. Bd. 1, pag. 136; Astron. Nachr. 17, No. 403. Unter Berücksichtigung des Hauptpunktabstandes wurde sie von GAUSS entwickelt und von HASSELBERG sehr sorgfältig ur Ausführung gebracht. Mél. math. et astr. de Petersb. 6, pag. 669. 1888 (vergl. CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 9, pag. 16. 1889); s. auch OUDEMANS, Arch. Néerland. 13, pag. 149. 1877.

Diese Methode war früher unter Vernachlässigung von l in der praktischen Optik beliebt. Man wird bemerken, dass sie ebenso wie die unter 11) angegebene sehr »sperrig« ist, d. h. einen grossen Raum beansprucht, da der zu messende Abstand OO' mehr als das vierfache der zu ermittelnden Brennweite beträgt. Das gleiche gilt auch von den oben angeführten Methoden von HANSEN, S. P. THOMPSON und der von SILBERMANN[1]), welche letztere im wesentlichen die gleiche ist wie 12), nur dass SILBERMANN statt des Minimalabstandes selbst die Gleichheit von Objekt und Bildgrösse als Criterium benützt.

13) Bei den unter 11) und 12) angeführten Methoden ist l als bekannt bezw. $= 0$ angenommen. Will man sich mit einer ungefähren Kenntniss des Werthes von l nicht begnügen, so kann zu seiner Ermittelung und gleichzeitig zur Bestimmung der Brennweite selbst folgendes Verfahren von GAUSS dienen: Man bestimme nach einer der pag. 365 ff. angegebenen Methoden die Lage der beiden Brennpunkte des Systems gegen einen festen Punkt desselben, d. h. die Grössen p und p' in Gleichung (11) pag. 276, sowie den Abstand eines (am besten in der Nähe des Systems befindlichen) Objektes sowohl gegen jenen festen Punkt ($DO = a$) als gegen sein vom System entworfenes Bild $OO' = c$. Man hat dann unter Berücksichtigung, dass $DO' = a' = c + a$ ist,

$$(p - a), (p' - a') = f^2 \quad \text{und} \quad l = p' - p - 2\sqrt{(p - a)(p' - a')}. \qquad (15)$$

Nach diesem Verfahren, dessen praktische Realisirung GAUSS näher darlegt[2]), wird l, wie er zeigt, besonders genau bestimmt, so dass man es für die Bestimmung dieser Grösse allein vortheilhaft als Hilfsverfahren zu einer der Methoden 11) und 12) benützt. Auch wenn die Brennpunkte nicht genau ermittelt sind, kann man, wie er des weiteren zeigt, entweder aus einer genäherten Kenntniss der drei Grössen f, p, p' eine einfache Correction der erhaltenen Werthe berechnen oder die Methode in etwas abgeänderter Form zur Anwendung bringen, nämlich

14) Man bestimmt die Grössen a und a' für irgend welche Entfernung des Objektes bei zwei Stellungen des Systems, in welchen Objekt und Bild im Raum dieselbe Lage haben, das System aber um 180° gedreht (Objektseite mit Bildseite vertauscht) ist; dann ist $a_1 = -a_2'$, $a_2 = -a_1'$. Man erhält aus diesen beiden Versuchen — denen wieder zwei Gleichungen von der Form (11) entsprechen — in Verbindung mit dem ad 13) genannten zur Bestimmung der Grössen a und c bei kleinem Betrag von c dienenden entweder die Grössen p und p' und aus diesen durch Anwendung der Gleichung (11) auf eine der beiden bei entfernten Objekten ausgeführten Messungen die Grösse von f — oder die Lage der beiden Hauptpunkte des Systems gegen den festen Punkt D desselben.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Beschreibung des Verfahrens und des ihm dienenden Apparates, welche von ABBE herrühren[3]).

Fast alle Methoden zur Brennweitenbestimmung von Linsensystemen beruhen, wie wir gesehen haben, auf der Messung mittelst optischer Bilder; für solche stellte ABBE[4]) drei Fundamentalbedingungen auf, nämlich

---

[1]) Compt. rend. 14, pag. 340. 1830; BIOT, Traité élem. d'astron. physique, 3. ed. Paris 1841, I, pag. 646; s. auch WEBB, Month. Not. 17, pag. 269. 1857.

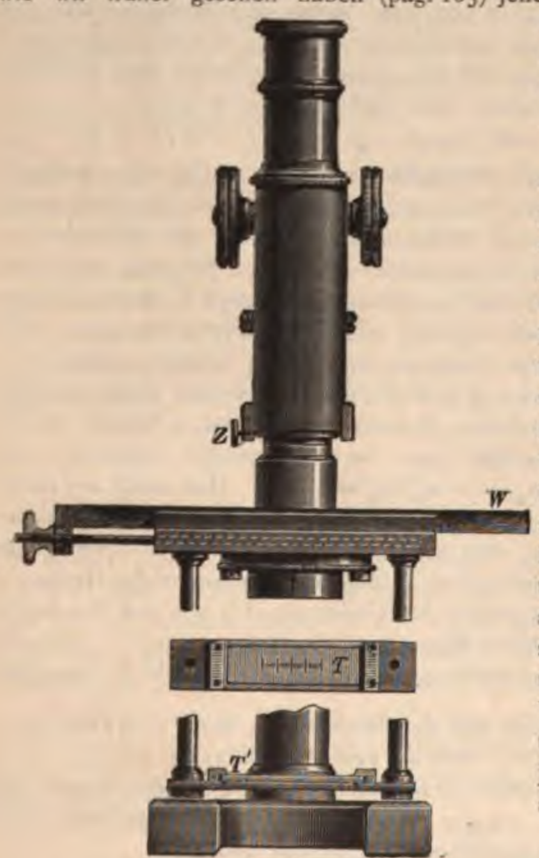
[2]) Von THOMPSON fälschlich als PENDLEBURY's Methode namhaft gemacht. Auch die Methoden von A. MARTIN, Ann. de chim. et de phys. (4) 10, pag. 385, 447. 1876 und CORNU, Journ. de phys. 6, pag. 276. 1877 sind fast genau identisch mit der von GAUSS angegebenen.

[3]) s. S. CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 12, pag. 185. 1892.

[4]) Mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1878.

1) Eine solche Messung darf nicht abhängig gemacht werden von der Auffassung des Ortes eines optischen Bildes — wegen des unvermeidlichen Spielraums, der bei solchen Einstellungen bestehen bleibt und desto grösser ist, je mehr man das System abblendet, um dessen Aberrationen zu reduciren und die für die centrale Zone geltenden Faktoren zu erhalten (gemäss dem pag. 365 ausgeführten).

2) Es darf auch indirekt die Messung nicht von einer Einstellung abhängig sein. In Folge der vorgenannten unvermeidlichen Einstellungsunsicherheit würde auch die Grösse von Bildern falsch aufgefasst werden, wenn die Hauptstrahlen (Achsen) der sie formirenden Büschel beliebige Neigung gegen die Achse des Systems haben. Nur bei »telecentrischer« Einrichtung, wo durch eine im vorderen Brennpunkt des Systems befindliche axiale Blende die Hauptstrahlen der austretenden Büschel der Systemaxe parallel gemacht sind, wirkt wie wir früher gesehen haben (pag. 165) jener Fehler nicht mit. Es ist dann die Grösse des Bildes gänzlich unabhängig von der Stelle, an welcher es — scharf oder unscharf — eingestellt wird.



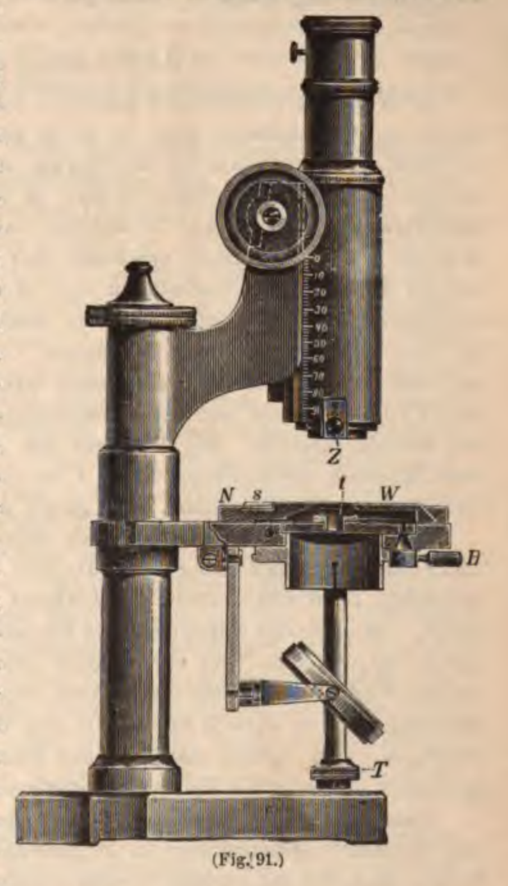
(Fig. 90)

3) Da die dioptrischen Constanten eines Systems (Vereinigungsweiten, Vergrösserung und auch die Brennweite selbst) im Allgemeinen von Zone zu Zone variiren, das zu zweit genannte Element auch noch mit der absoluten Grösse des Bildes bezw. Objektes selbst (Verzerrung), so ist es nothwendig, auf diese Variationen Rücksicht zu nehmen. Dies geschieht am zweckmässigsten durch Ermittelung des Faktors der fraglichen Variation, indem man der Messung an jeder Stelle der Achse verschieden grosse Bilder unterwirft und den Fundamentalwerth der Vergrösserung, welcher der centralen Zone des Bildes und Objektivs entspricht, durch Rechnung ableitet.

Obigen Anforderungen entsprechend gründet sich die Methode von Abbe wie die oben unter 6a) angeführte auf die Bestimmung der Vergrösserungen welche ein System in gegebener Lage bei telecentrischem Strahlengang von zwei auf derselben Seite in genau messbarer Entfernung von einander befindlichen Skalen entwirft. Der telecentrische Strahlengang wird hierbei nicht durch eine Blende in dem — von vornherein ja unbekannten — Brennpunkt des Systems erreicht, sondern dadurch, dass das Bild durch ein Hilfsmikroskop beobachtet wird, dessen Axe parallel der des Systems verschoben wird. Diese letztere

Parallelverschiebung ermöglicht die Beobachtung des Bildes in grösserer Ausdehnung als irgend ein feststehender optischer Apparat sie gestatten würde. Da jedoch ihre Verwirklichung in mechanischer Beziehung grosse Schwierigkeiten und entsprechend constructive Complication verursachen würde, so ist der Ausweg gewählt, dass nicht das Mikroskop parallel über das zu untersuchende System hingeführt, sondern umgekehrt dieses in einem Schlitten unter dem Mikroskop fortgeführt wird, wobei die Skalen ebenfalls ihre Lage zum Beobachtungsmikroskop behalten. Diese Veränderung vermeidet die angedeutete Schwierigkeit unter Anwendung sehr geringer mechanischer Hilfsmittel vollständig und verursacht nur eine geringfügige Aenderung in den Formeln für die Berechnung der Vergrösserung.

Der Apparat besteht demgemäss in der Form, in welcher er von der optischen Werkstätte von C. ZEISS in Jena fabrikatorisch ausgeführt wird, im wesentlichen in einem Mikroskop grösseren Modells mit ausziehbarem Tubus, dessen Tisch *W* in Schlittenführung von rechts nach links um messbare Beträge (Skala *s*, Nonius *N*, Ablesung auf 0·02 *mm*) beweglich ist. Nahe unter der Tischebene befindet sich eine mittelst Hebels *H* bei Seite zu schlagende feingetheilte (0·1 *mm*) Glas-Skala *t*, oberhalb des Fusses eine zweite gröber getheilte (0·5 *mm*) *T*; die Entfernung beider (ca. 100 *mm*) wird vom Verfertiger ein für allemal oder mittelst eines beigegebenen Tiefentasters vom Beobachter bestimmt. Dem Mikroskop sind 5 Objektive beigegeben, welche gestatten, unter Zuhilfenahme des Tubusauszuges auf alle Entfernungen von der Tischebene bis Unendlich einzustellen, sodass stets das von dem System entworfene Bild auch der unteren Skala beobachtet werden kann. Die Einrichtung dieses Focometers, welches in der ausgeführten Form und unter Benützung der beschriebenen Methode zunächst für Linsen von etwa 20 bis 100 *mm* Durchmesser bestimmt ist — in grösseren Dimensionen für entsprechend grössere — ist eine derartige, dass auch die Bestimmung von Systemen kürzerer Brennweite z. B. der Oculare und Objektive von Mikroskopen nach den oben namhaft gemachten für solche geeignete Methoden auf das bequemste ausführbar ist.



(Fig. 91.)

Zu diesem Zwecke hat sowohl das Tubusauszugsrohr eine Millimeter-Theilung, welche die Gesammtlänge des Tubus, von der unteren Ansatzfläche des Objektivgewindes bis zum Auflagerand der Oculare, angiebt als auch trägt der Haupttubus eine solche, welche an festem Index die axiale Verschiebung des Ge-

sammttubus zu messen gestattet. Letztere kann ausserdem innerhalb kleinerer Intervalle (5 *mm*) durch die mit getheiltem Kopfe versehene Mikrometerschraube, welche zur feinen Einstellung dient, sehr genau gemessen werden (0·003 *mm*). Die Brennweite von Systemen mittlerer Dimension (etwa 50 *mm* Oeffnung) kann mittelst des Apparates bei wenigen Wiederholungen leicht mit einer Genauigkeit von 0·1$\frac{0}{0}$ bestimmt werden.

Auf die Verwendung des Apparates zur Bestimmung von Vergrösserungen und Aperturen ist im folgenden hingewiesen.

Empirische Bestimmung der Strahlenbegrenzung.

Nächst der Bestimmung der Grundfaktoren ist es die der Strahlenbegrenzung, welche bei optischen Instrumenten ein Interesse bietet, also I. die Bestimmung der Apertur und II. die des Gesichtsfeldes, mit welcher letzteren die der Vergrösserung Hand in Hand geht.

I. Bestimmung der Apertur.

1) Wenn die wirksamen Büschel auf der einen Seite nahezu parallelstrahlig, telecentrisch sind, so ist es genügend, auf dieser Seite die lineare Grösse der wirksamen Oeffnung zu ermitteln. Liegt diese Oeffnung ausserhalb des Linsensystems, so hat man einfach mit einem geeigneten Messwerkzeug (Maassstab, Schublehre oder dergl.) ihren Durchmesser zu bestimmen. Am genauesten geschieht dies natürlich mit einem Comparator. Als solcher kann bis zu Dimensionen von 10 *mm* der oben beschriebene Brennweitenmessapparat von Abbe ohne weiteres benützt werden, indem man das System S mit der Blende nach oben annähernd centrisch auf den Schlitten W legt und mit dem mit Fadenkreuz versehenen Mikroskop erst auf den einen und dann, durch entsprechende seitliche Verschiebung des Schlittens, auf den andern Rand der Blende einstellt. Die Differenz der Ablesungen des Nonius N an der mit dem Schlitten verbundenen Skala s ist dann unmittelbar gleich der Grösse der Verschiebung des Schlittens, d. i. gleich dem Durchmesser der Blende.

Das letztere Verfahren ist auch dann in unveränderter Weise anwendbar, wenn die betreffende Blende zwischen den Linsen liegt, also ihr vom davor liegenden Theil des Systems entworfenes Bild die Eintrittspupille des Systems bildet. Ist jetzt das Mikroskop des Focometers auf das durch das System S hindurch erscheinende Bild der Blende scharf eingestellt, so ergiebt genau das gleiche Verfahren wie bei ausserhalb liegender Blende den Durchmesser der Eintrittspupille in diesem Falle. Da das Mikroskop der Axe des Systems parallel bleibt, so wird hierbei das Bild der Blende sogar mit demselben Strahlengang gemessen, für welchen es als Eintrittspupille wirksam ist.

Dies Verfahren zur Bestimmung der Eintrittspupille bei Systemen von mittleren und grösseren Dimensionen (z. B. photographischen Objektiven) ist ein so einfaches, dass wir die andern zu dem gleichen Zweck vorgeschlagenen füglich ganz übergehen können.

Bei sehr kleinen Dimensionen des zu untersuchenden Systems bezw. seiner Blende, kann die Messung ihres wirklichen Durchmessers oder desjenigen ihres durch den über ihr liegenden Theil des Systems entworfenen Bildes besser mikrometrisch bei feststehendem Mikroskop erfolgen. (Natürlich wird man hier vortheilhaft wieder am Objektiv des Mikroskops eine Blende in dessen *hinterem Brennpunkt* anbringen, um es nach vorn telecentrisch zu machen und

auf diese Weise die aus ungenauer Einstellung entspringenden Fehler in der Bestimmung der Grösse der Blende möglichst auszuschliessen).

2) Die angulare Apertur — in ihrem rationellen Maass als numerische Apertur — kann entweder so gemessen werden, dass man den Durchmesser der nach dieser Seite hin wirksamen Blende bezw. Pupille und die Entfernung des Objekts bezw. Bildes von ihr bestimmt. Die Anhaltspunkte für ein solches Verfahren sind in dem Voranstehenden bereits vollständig gegeben. Bei Systemen von grösserer Dimension; wie den Objektiven von Fernrohren und den photographischen Systemen, dürfte dieses Verfahren das angemessenste sein. Bei Systemen von kleinen Dimensionen aber ist es in den meisten Fällen einfacher, bei sehr kurzen Brennweiten sogar kaum etwas anderes möglich, als diese Apertur unmittelbar zu bestimmen nur nach dem Sinus des Sehwinkels, unter welchem die Pupille von O bezw. O' aus erscheint.

a) Bei Aperturen unter 0·5 kann man zu diesem Zweck nach folgendem Princip verfahren: Man lässt die im System vorhandene Begrenzung sich durch den centralen Theil des Objektes bezw. Bildes virtuell auf eine beliebig angenommene äussere Fläche projiciren und bestimmt Durchmesser und Entfernung dieser Projection.

In gemessener Entfernung von dem Punkt, in Bezug auf welchen die Apertur bestimmt werden soll — also bei Mikroskopobjektiven dem mittleren Objekt, bei photographischen Systemen und astronomischen Objektiven dem Bildpunkt — wird eine zur Axe des Systems senkrechte Skala angebracht. Es handelt sich dann nur darum, zu beurtheilen, in welcher Ausdehnung diese Skala durch das System kraft der in diesem vorhandenen Begrenzung abgebildet wird mittels Strahlenbüschel, welche sich im mittleren Objektpunkt kreuzen [1]). Zu diesem Zwecke muss also entweder in der Objektebene eine physische Blende mit centralem Loch angebracht sein oder eine ebensolche optisch daselbst eingeführt werden. Letzteres kann, wie wir früher sahen, in einfacher Weise dadurch geschehen, dass eine Blende in der dem Objekt in Bezug auf das System conjugirten Ebene angebracht wird. Bei Mikroskop-Systemen z. B. geschieht dies, indem man das Bild der Skala über dem System S vom oberen Ende des Tubus aus beobachtet. Die Pupille des Auges ist dann die an richtiger Stelle befindliche Blende. Oder man beobachtet jenes Bild mit dem Hilfsmikroskop, dessen Objektiv nach der Objektseite nahezu telecentrisch gemacht ist, nämlich dessen Blende in Bezug auf sein Objektiv sammt dem System S conjugirt ist der Objektebene [2]). Bei einem System, welches nach der andern Seite hin mit telecentrischem Strahlengang benützt wird, wie ein Fernrohrobjektiv oder photographisches System, wird das Bild der Skala auf dieser Seite ebenfalls am besten mittelst eines seinerseits nach der Objektseite telecentrischen Hilfssystems beobachtet, z. B. in der durch das Abbe'sche Focometer gegebenen Einrichtung.

Aus dem Durchmesser des durch das System S zur Abbildung gelangenden Theils der Skala und ihrer Entfernung vom Objektpunkt kann dann zunächst die Tangente und aus dieser weiter der Sinus des halben Winkels berechnet werden, unter welchem die Skala von hier aus erscheint.

b) Bei Aperturen, welche über 0·5 gehen, ist es bequemer und genauer, bei

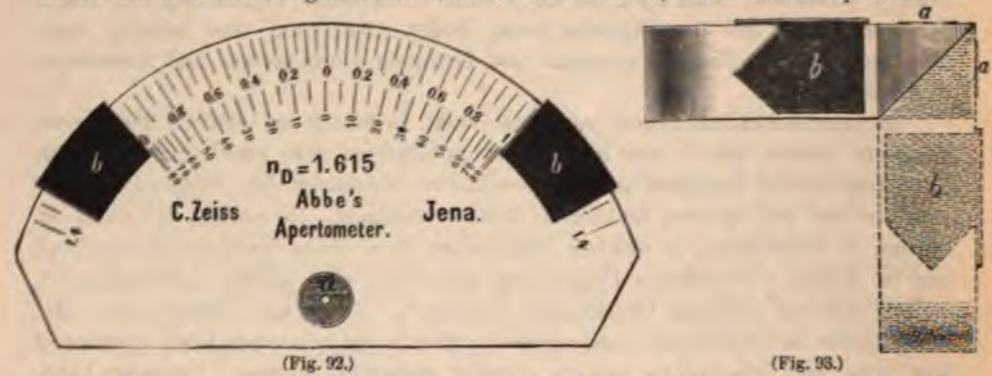
---

[1]) Die Grenzen des zur Abbildung gelangenden Skalenbereichs müssen durch deutliche Marken, die man langsam nach aussen verschiebt, gekennzeichnet werden, etwa durch die Ränder geschwärzter Blechscheiben od. dergl.

[2]) Siehe E. Abbe, Journ. R. Micr. Soc. 3, pag. 20. 1880.

Aperturen über 1·0 sogar unerlässlich, von der virtuellen Projection der im System vorhandenen Blende auf eine im äusseren Luftraum gelegenen Schirmebene abzusehen und statt Luft ein Medium von höherem Brechungsindex einzuführen. Man kann dies dadurch, dass man unter dem Tisch des Mikroskops — um die Objektive von solchen kann es sich jetzt allein noch handeln — eine Halbkugel von bekanntem Index mit der planen Seite nach oben centrisch befestigt und die Aenderung des Winkels in Anschlag bringt, welchen die von den Punkten der Skala ausgehenden Strahlen durch Brechung in der Halbkugel erfahren[1]. Vorzuziehen ist die Anwendung eines Apparates, bei welchem einerseits das Centrum der Winkelmessung genau markirt ist und andererseits die Richtungen der Strahlen sicherer bestimmt sind als durch Brechung der entfernten Skala an der Halbkugel im obigen Falle. Einen solchen Apparat erhält man[2] nach ABBE folgendermaassen (Fig. 92 und 93).

Auf einer überhalbkreisförmigen Cylinderscheibe wird der Mittelpunkt *a* durch ein in Silber ausgekratztes kleines Loch markirt, nahe der Peripherie die



(Fig. 92.) (Fig. 93.)

diesem Centrum entsprechende Theilung, ebenfalls auf der Planfläche der Scheibe, aufgetragen. Die von ZEISS in Jena gefertigten Apparate tragen eine solche nach der numerischen Apertur fortschreitende Theilung — wie sie sich aus dem Winkel der Strahlen innerhalb des Glases und dem Brechungsexponenten dieses berechnet — und eine zweite nach innen gelegene, welche die den Glaswinkeln entsprechenden Luftwinkel angiebt. An der Platte lassen sich zwei aus schwarzem Blech gebogene Indices *b* verschieben, deren Form Fig. 93 näher zeigt. Die geradlinige Kante derselben dient zur Ablesung der Theilung. Die an der Cylinderwand anliegende in derselben vertikalen Ebene liegende Spitze dient als Objekt für die Beobachtung in der hintern Brennebene des Mikroskopobjektivs. Ein Bild von ihr wird dadurch in das System übergeführt, dass an dem Durchmesser der Scheibe unter 45° eine Facette angeschliffen ist (s. Fig. 93), durch welche die von der Peripherie horizontal auf sie fallenden Strahlen nach oben gespiegelt werden. Durch die Spiegelung an dieser Facette entsteht eine virtuelle, vertikal nach unten liegende Halbcylinderscheibe (in der Figur gestrichelt).

Das Verfahren mit diesem Apparat ist nun folgendes:

Man legt die halbkreisförmige Apertometerplatte, mit der Theilung nach oben, auf den Objekttisch des Mikroskops und stellt mit dem zu untersuchenden Objektiv — wenn es ein Immersionssystem ist, nach Zwischenfügung der Immersionsflüssigkeit — auf das kleine Loch in dem kreisförmigen Silberscheibchen mit einem beliebigen Okular grob ein. Die Tubuslänge

[1]) E. ABBE, l. c., pag. 30. H. L. SMITH, Am. Quart. Micr. Journ. 1, pag. 194. 1879.

[2]) CARL ZEISS, Description of Prof. ABBE's Apertometer etc. Journ. R. Micr. Soc. 1, *pag. 19. 1878.* S. auch E. ABBE, l. supra cit.

muss bei dieser Einstellung diejenige sein, mit welcher man das System im gewöhnlichen Gebrauch benutzt.

An den Rand der Apertometerplatte und zwar nahe der Mitte des Halbkreises legt man die beiden Indices, und zwar so, dass die mit einer Spitze versehenen Seiten an dem vertikalen, cylindrischen Rand, die anderen, geradlinig begrenzten an der ebenen Oberfläche der Platte anliegen, wobei am besten die Spitzen von einander weg, nach aussen gekehrt sind, wenn das zu untersuchende System relativ stark ist (Numerische Apertur grösser als 0·6—0·7), oder zu einander, nach innen, wenn das System schwächer ist.

Nun schraubt man in das untere Gewinde des Tubusauszugs das dem Apparat beigegebene Hilfsobjektiv, dessen mit einem Diaphragma geschlossenes Rohr hierbei in das Innere des Tubus zu liegen kommt. In das andere Ende des Auszugs steckt man ein Okular und stellt mit dem so erhaltenen Hilfsmikroskop durch Hineinschieben in den Haupttubus auf das in ihm erscheinende Bild der Indices ein.

Man verschiebt nun die Indices — stets darauf achtend, dass sie an der Platte möglichst gut anliegen — bis ihre Spitzen die Peripherie des hellen Kreises von innen resp. aussen eben berühren. Wenn nöthig, korrigirt man noch die Einstellung des Hilfsmikroskops so, dass die Indexspitzen und der Rand des hellen Kreises etwa gleich scharf werden. Ist auf diese Weise die richtige Stellung der Indices erreicht, so liest man bei beiden die Lage derjenigen oberen Blechkante, welche mit der Spitze in derselben Verticalebene liegt, an einer der beiden Skalen auf der Glasplatte ab. Die halbe Summe der beiden Ablesungen an der äusseren, dem Rande näher liegenden Skala, ist dann der gemessene Werth der numerischen Apertur des untersuchten Objektivs. Die Summe der beiden Ablesungen an der inneren, Gradskala, ist der Werth des Oeffnungswinkels in Luft (resp. desselben auf Luft bezogen).

Will man sich für die Bestimmung niedriger Aperturen (unter 0·4 bezw. 50°) — denen gewöhnlich auch entsprechend lange Brennweiten (7 *mm* und mehr) zugehören — auch des Apertometers bedienen, so stellt man die Beobachtung der Indexbilder etc. ohne Hilfsmikroskop, mit blossem Auge an. Man entfernt also, nach der Einstellung des Mikroskops auf das Loch in der Silberschicht, das Ocular und bringt an seiner Stelle ein Scheibchen aus Blech oder Pappe mit einem kleinen axialen Loch an, um eine constante centrale Stellung des Auges zu erreichen, mit welchem man dann durch dieses Loch einfach nach dem Objektivsystem hinsieht.

c) Ein drittes Verfahren endlich zur Bestimmung der Apertur besteht darin, dass man erst die Brennweite des Systems S nach einer der hierfür angegebenen Methoden bestimmt. Misst man dann mittelst eines Hilfsmikroskops die Grösse des Kreises, welcher bei voller Beleuchtung als lichte Oeffnung des Systems über demselben erscheint, mikrometrisch, so folgt aus diesem, $2p'$, und der Brennweite, f', des Systems dessen Apertur a gemäss Gleichung 5a, pag. 169,

$$a = \frac{p'}{f'}.$$

II. Bestimmung des Sehfeldes und der Vergrösserung virtueller Bilder.

Die Bestimmung des linearen Sehfeldes sowohl als der linearen Vergrösserung bei Projectionssystemen, also in reellen Bildern auf Schirmen, bedarf keiner Erläuterung; wir wollen uns daher hier ausschliesslich mit der Bestimmung derjenigen beschäftigen, welche bei den zu subjektivem Gebrauch dienenden Instrumenten statthat. Da die Verfahren zur Bestimmung des Sehfeldes ganz auf denjenigen zur Bestimmung der Vergrösserung beruhen, so wollen wir in erster Reihe diese betrachten.

a) Ein Verfahren, mehr zur Schätzung als zur Messung, ist dasjenige, welches die ersten wissenschaftlichen Benützer des Fernrohrs[1]) und zusammengesetzten Mikroskops[2]) anwendeten:

---

[1]) GALILEI, Nuncius sidereus, pag. 11.

[2]) HOOKE, Micrographia.

Beim Fernrohr ist dies Verfahren folgendes: Blickt man mit dem einen Auge durch das Instrument auf einen Gegenstand von periodischer Struktur (Gitter, Zaun, Mauerwerk oder dergl.) und mit dem andern gleichzeitig auf denselben Gegenstand ohne Bewaffnung, so kann man durch scheinbare Uebereinanderlegung des Bildes und Gegenstandes feststellen, wie viel Elemente des einen auf eine bestimmte Anzahl Elemente des andern fallen. Das Verhältniss beider Zahlen ist die angulare Vergrösserung. Eine Modification dieses Verfahrens, um es innerhalb des Laboratoriums ausführen zu können, ist von WALTENHOFEN[1]) angegeben. Dasselbe ist jedoch ebenfalls nicht bei Messungen anwendbar, an welche grössere Ansprüche in Bezug auf Genauigkeit gestellt werden.

Achtet man darauf, auf einen wie grossen Theil des Gegenstandes sich bei dieser Beobachtungsweise die Begrenzung des Sehfeldes (das Bild der Sehfeldblende) projicirt, so kann man aus der Grösse und Entfernung des Gegenstandes auch die angulare Grösse des Sehfeldes berechnen.

Beim Mikroskop benützt man als Objekt am besten ein solches von bekannten absoluten Dimensionen, z. B. ein Objektmikrometer. Indem man dann wieder darauf achtet, wie viel Theile dieses, durch das Instrument gesehen, sich auf eine in bestimmter Entfernung gehaltene mit dem andern, unbewaffneten, Auge betrachtete Skala von ebenfalls bekannter Theilung projiciren, erhält man das in der Ebene der Theilung stattfindende lineare Vergrösserungsverhältniss. Ist die Entfernung der Skala hierbei gleich k *mm*, so ist die in der normalen Entfernung $l = 250$ *mm* stattfindende lineare Vergrösserung im Verhältniss von $l : k$ grösser oder kleiner, als jene in der Entfernung k stattfindende.

b) Genauer werden beide Verfahren, wenn man die Projection des virtuellen Bildes auf den Schirm nicht mit dem andern Auge ausführt, dessen Haltung niemals eine genügend ruhige ist, sondern mit demselben Auge mit Hilfe einer Spiegelvorrichtung, wie sie zum Zeichnen von virtuellen Bildern dient.

Bei diesen Vorrichtungen (Zeichenapparat, *Camera lucida*) wie sie zuerst von WOLLASTON, AMICI und SÖMMERING vorgeschlagen bezw. construirt worden sind, wird in die Austrittspupille eine unter 45° gegen die Axe geneigte spiegelnde Fläche eingeschaltet. Entweder eine solche, welche etwa die Grösse dieser Austrittspupille hat, jedenfalls aber kleiner ist als die normale Augenpupille, sodass das Bild durch die Spiegelung an jener, ein aussen befindliches Objekt (Schirm, Skala) aber direkt durch die rings um den Spiegel herum in die Pupille des Auges eintretenden Strahlen gesehen wird (SÖMMERING's Spiegel). Oder es wird umgekehrt in der Belegung eines etwas grössern Spiegels ein centrales Loch ausgekratzt, welches kleiner als, die Augenpupille ist und die Austrittspupille des Instruments ganz oder theilweise zum Auge gelangen lässt; dann sieht man das Bild durch dieses Loch hindurch direkt an, den äusseren Schirm durch Vermittelung der Spiegelung (ABBE'scher Zeichenapparat. Bei andern solchen Apparaten wird mit einem Spiegel bezw. Reflexionsprisma die Austrittspupille bis zur Hälfte bedeckt, sodass man das Bild durch die freie Hälfte hindurch, den Schirm mittelst der Spiegelung sieht (oder umgekehrt). Bei einer letzten Klasse endlich wird ein halbdurchsichtiger Spiegel (Neutralglas, dünnes Glassplättchen) vor die ganze Austrittspupille gestellt, sodass man das Bild durch partielle Reflexion an diesem Spiegel, den Gegenstand durch ihn hindurchscheinend sieht (oder abermals umgekehrt).

Bei allen diesen Vorrichtungen wird also das virtuelle vom System gelieferte

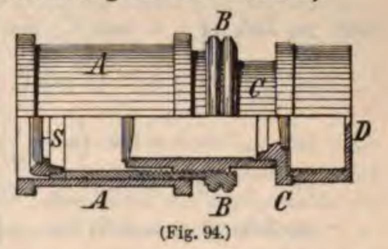
[1]) CARLS Repert. f. Exper. physik. 8, pag. 184. 1872.

Bild seinerseits virtuell in die Ebene eines ausserhalb liegenden Schirmes projicirt. In diesem kann man die Dimensionen des Bildes genauer markiren, z. B. auch das Bild erst nachzeichnen und hinterher ausmessen. Kennt man noch die Entfernung des Schirms von der Austrittspupille, so berechnet sich beim Fernrohr der Sehwinkel des Bildes bezw. der Gesichtsfeldblende, beim Mikroskop die in der nämlichen Entfernung statthabende lineare Vergrösserung[1]).

c) GAUSS bestimmte mittelst eines Theodoliten die angulare Grösse eines geeigneten sehr entfernten Objektes einmal direkt und dann durch das **umgekehrte** Fernrohr hindurch. In letzterem erscheint das Bild dann soviel Mal verkleinert, als das Fernrohr im gewöhnlichen Gebrauch vergrössert.

Da aber bei diesem Verfahren das Fernrohr mit ganz anderem Strahlengang in Anspruch genommen wird, als für welchen es eingerichtet ist, so werden Aberrationsrechte erheblichen Einfluss auf das Resultat gewinnen müssen[2]).

d) Endlich kann bei Teleskop-Systemen die Bestimmung auch auf den Satz von LAGRANGE bezw. auf die metrischen Beziehungen gegründet werden, welche zwischen Pupille und Blende in solchen Systemen statthaben (pag. 168). Wir fanden a. a. O., dass bei Systemen, die beiderseits von Luft begrenzt sind, die angulare Vergrösserung gleich dem Verhältniss der linearen Durchmesser von Eintritts- und Austrittspupille sei. $\Gamma = \frac{p}{p'}$. Misst man also nach dem oben angegebenen Verfahren die Eintrittspupille und, am einfachsten mittelst des hierzu von seinem Erfinder vorgeschlagenen RAMSDEN'schen **Dynameters** (oder Dynamometer?) (Fig. 94) die Austrittspupille des Teleskops, so ist ihr Verhältniss gleich der angularen Vergrösserung.



(Fig. 94.)

Man stellt zuerst mit der (durch die Blende D nach vorn telecentrisch gemachten) Lupe C auf die feine Skala S scharf ein. Dann bringt man diese Skala zur Coincidenz mit der Austrittspupille, indem man die Hülse B gegen A verschiebt, während man den äusseren Rand von A gegen das Ocu ar des zu untersuchenden Fernrohres schwach angedrückt hält.

Eine nicht zu vernachlässigende Vorsicht namentlich bei terrestrischen Fernrohren ist bei diesem Verfahren, dass man sich durch Betrachtung der Eintrittspupille mit der Lupe (z. B. mit dem Dynameter selbst) davon überzeugt, ob die äussere Objektivfassung wirklich die Eintrittspupille vorstellt, und nicht etwa weitere innerhalb des Systems angebrachte Blenden die Apertur begrenzen. Man setzt daher vortheilhaft vor die Oeffnung des Objektivs nacheinander mehrere Blenden von verschiedenem bekanntem Durchmesser und misst die Grösse ihres Bildes in der Austrittspupille. Das Vergrösserungsverhältniss der Pupillen muss dann in einem aplanatischen System unabhängig von ihrer absoluten Grösse constant sein.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Vergrösserung d. h. Brennweite eines zusammengesetzten Systems sich auch stets dadurch ermitteln lässt, dass man die Brennweiten und Orte der einander zugewandten Brennpunkte seiner Bestandtheile (Objektiv, Ocular) gemäss einer der oben hierfür angegebenen Methoden bestimmt.

---

[1]) v. JACQUIN-BAUMGARTNER u. v. ETTINGHAUSEN's Ztschr. 4, pag. 1. 1828, hat diese Methode wohl zuerst angewandt.

[2]) Die Anwendung eines Spectrometerfernrohres ist zwar methodisch einwandfrei, aber praktisch unbequem.

Berichtigungen.

Seite 30, Zeile 14 v. o. statt: $\frac{A'}{B'}$ lies: $\frac{A'}{D'}$

„ 32, „ 18 v. o. „ $tg\,v = \frac{1}{m}$ lies: $tg\,v = \frac{1}{n}$

„ 32, „ 16 v. u. lies: $\left(m - \frac{1}{m}\right)(b_2 c_3 + b_3 c_2) = c_2^2 + c_3^2 - (b_2^2 + b_3^2)$

„ 32, „ 13 v. u. statt: $b_2 = c_3 = b_3 = c_2$ lies: $b_2^2 = c_3^2 = b_3^2 = c_2^2$

„ 34, Zeile 12 v. u. statt: $\alpha = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right)\beta^2$ lies: $\beta^2 = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right)\alpha^2$

„ 34, „ 23 v. o. „ $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ lies: $\mathfrak{b} = \pm\,\mathfrak{c}$

„ 35, „ 6 v. u. „ $\mathfrak{a} < 0$ lies: $\mathfrak{a} < 0$

Bezüglich dieses Absatzes vergl. das nachstehend bemerkte.[4]

„ 54, „ 3 v. u. statt: von dem Punkte L lies: nach dem Punkte.

„ 55, „ 4 v. o. nach: $(n/n')r$ schalte ein: vom Mittelpunkt

„ 61, „ 7 v. o. nach: winkels schalte ein: vor oder

„ 61, „ 18 v. o. vor: Medien schalte ein: Brechungsexponenten dei

„ 63, „ 5 v. o. statt: congruent lies: symmetrisch gleich

„ 64, 1. Absatz. Hier ist zu berichtigen, dass die Giltigkeit der Beziehung $\beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'}$ für ein beliebiges centrirtes System vor HELMHOLTZ schon von L. SEIDEL (Astr. Nachr. 43, pag. 302. 1856), nachgewiesen wurde.

„ 66. In den Gleichungen für s_H und s_H' ist rechts der Faktor $(n - 1)$ im Zähler und Nenner zu heben.

„ 78, Zeile 5 v. u. statt: zu l lies: zur Einfallsebene

„ 90, „ 21 v. o. lies: $n_k' u_k' z_k' = n_1 u_1 (z_0)'k = a_1 (z_0)k'$
und $n_k u_k z_k = n_1 u_1 (z_0)k + a_1 (z_0)k$

„ 90, Gl. (8) statt: $\Delta(z_0) = a_1$ . . . . lies: $\Delta(z_0) = a_1^2$ . . . . .
Gl. (8a) rechts ebenfalls a_1^2 als Faktor statt: a_1.

„ 91, Zeile 7 v. o. nach: Brechung lies: $n_1 = 1$ gesetzt

„ 101, Anm. Zeile 2 u. 3 v. o. statt: $\frac{\pi}{4}$ lies: $\frac{\pi}{2}$

„ 104, Zeile 4 v. u. statt: $\frac{\beta}{\beta_l}$ lies: $\frac{\beta_s}{\beta_l}$

„ 108, Zeile 7 v. u. statt: dem Quadrate der linearen Oeffnung h_0 des einfallenden Büschels lies: dem Quadrate des Objekthalbmessers y_0.

„ 115, Zeile 6 v. u. Nach: denken kann schalte ein: Da es senkrecht steht zu der Bildlinie jener Elementarbüschel, so breitet es dieselbe in einen schweifartigen Zerstreuungsfleck aus; daher die Bezeichnung dieses Fehlers als »Coma«.

„ 116, Gl. (2) (2a) (2b) und (3) muss Q^* das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, also: $-\,QQ^* \frac{1}{nt}$ etc.

Seite 120 ist die Unterschrift S. CZAPSKI zu streichen und vor die folgende Capitelüberschrift V. zu setzen.

„ 123, Zeile 10 v. o. statt: $\frac{df_2}{f_2}\frac{d\Delta}{\Delta}$ lies: $\frac{df_2}{f_2}-\frac{d\Delta}{\Delta}$

„ 123, Fig. 34 ist unzutreffend, da der Strahl λ nach der falschen Seite liegt.

„ 124, Gl. (1) der Faktor $\frac{1}{2}$ rechts ist zu streichen.

„ 137, Zeile 16 v. u. nach: Werth hat schalte ein: und $s(p) > 0$ ist

„ 144. Zeile 3 v. u. nach: Ophthalmometer lies: bei welchem durch entgegengesetzte Drehung zweier Glasplatten um dieselbe Axe die scheinbaren Orte zweier, in naher Entfernung von einander befindlicher Objekte identisch gemacht werden

„ 154, „ 7 v. u. statt: 79° 56′ lies: 79° 26′

„ 160, Zeile 6 v. o. statt: beistehender Figur lies: Fig. 45, Taf. I.

„ 171, „ 10 v. u. statt: ξ/β lies: β/ξ'

„ 173, „ 7 v. u. in der Gleichung für $2\Delta\xi_t$ ist rechts der Faktor ξ zu streichen.

„ 182, „ 24 v. u. statt: $k' = kn'/n^2$ lies: $k' = k(n'/n)^2$

„ 193, „ die Gleichung für As lautet rechts: $\frac{1}{p}-\frac{1}{P}$

„ 208, Gl. (4a) statt: $\zeta = \frac{\pi^2 K}{f\cdot 3}$ lies: $\zeta = \frac{\pi^2\cdot K}{f^2}$

In der Charakteristik der verschiedenen Gattungen von Abbildung bezw. von abbildenden Systemen (pag. 35 ff) ist mir ein handgreifliches Versehen untergelaufen, auf welches mich aufmerksam zu machen, Herr Prof. RUNGE in Hannover die grosse Liebenswürdigkeit hatte.

Rein mathematisch bieten sich allerdings beide Fälle als möglich dar: sowohl der, dass $\mathfrak{a} < 0$, die Abbildung also rechtläufig, wie der, dass $\mathfrak{a} > 0$, d. h. dieselbe rückläufig sei. Physisch verwirklichen lässt sich aber bloss der Fall der rechtläufigen Abbildung, wenn man nämlich für die Beurtheilung der Recht- und Rückläufigkeit an der eingeführten Coordinatenbestimmung festhält, wonach die Richtung der wachsenden x in jedem Raume zusammenfallen soll mit der Bewegung des Lichts in ihm. Eine kurze Ueberlegung zeigt dann, dass z. B. bei der einmaligen Spiegelung Objekt und Bild sich entlang den Hauptaxen ihrer Räume im gleichen Sinne bewegen.

Der wesentliche Unterschied zwischen der katoptrischen und der dioptrischen Abbildung ist also nicht in jenem Merkmal zu suchen, sondern vielmehr darin, dass die Nebenaxen der Abbildung ($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) das eine Mal — dioptrische Abbildung — gleiches, das andere Mal — katoptrische Abbildung — entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Bei der um die x-Axe symmetrischen Abbildung (pag. 34) hat man demnach zu unterscheiden zwischen dem Falle dass $\mathfrak{b} = +\mathfrak{c}$ (dioptr. A.) und dem, dass $\mathfrak{b} = -\mathfrak{c}$ (katoptr. A.).

Dieser Unterschied äussert sich z. B. darin, dass dem Durchlaufen der Pheripherie eines zur x-Axe senkrechten Kreises im Objektraum bei der dioptrischen Abbildung ein gleichsinniges, bei der katoptrischen ein entgegengesetztes Durchlaufen der Peripherie des Kreises im Bildraum entspricht; oder dass das Bild einer rechtsgewundenen Schraube wieder eine rechtsgewundene, das katroptische Bild derselben aber eine linksgängige Schraube ist — jene Kreise und die Schrauben in dem betreffenden Raum immer in der gleichen Stellung zur Lichtbewegung in demselben angesehen.

Inhalt.

III. Realisirung der optischen Abbildung.

A. Durch dünne Büschel nahe der Axe centrirter Kugelflächen.

B. Durch schiefe Elementarbüschel.

IV. Die künstliche Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

(Theorie der sphärischen Aberrationen).

V. Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Theorie der Achromasie.

VI. Prismen und Prismensysteme.

VII. Die Begrenzung der Strahlen und die von ihr abhängigen Eigenschaften der optischen Instrumente.

VIII. Die Hauptgattungen der optischen Instrumente.

I. Projectionssysteme.

II. Instrumente zur Unterstützung des Sehens. 205

IX. Die Methoden zur empirischen Bestimmung der Constanten optischer Instrumente.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).

